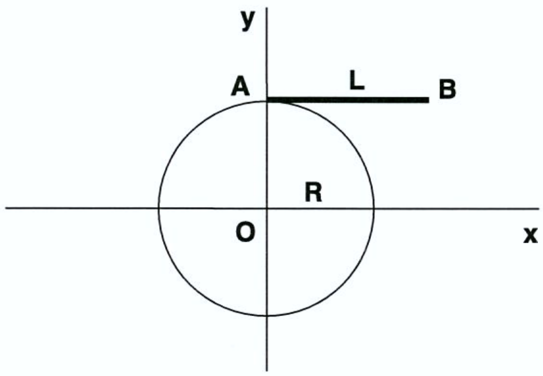
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

Nome:...............................

N. matr.:...............................

Ancona, 12 dicembre 2008

1. (8 punti) Un corpo rigido è formato da un cerchio di raggio R e massa m e da un'asta AB di lunghezza $L = R\sqrt{5}$ e massa m, saldata ad un punto del bordo del disco come in figura.



   (i) Calcolare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura (con l'asse z ortogonale al piano della figura);

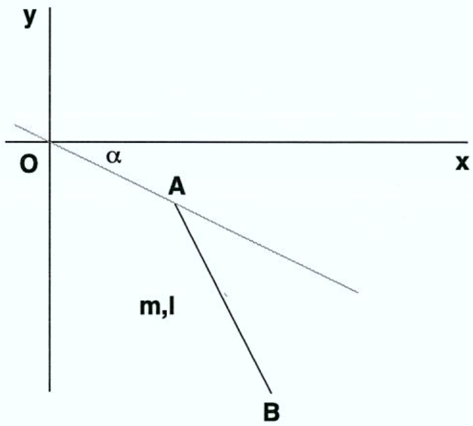
   (ii) determinare le direzioni principali d'inerzia diagonalizzando la matrice.

2. (7 punti) Enunciare e dimostrare le formule di Poisson per le derivate temporali dei versori solidali di un sistema rigido e ricavare la formula fondamentale dei moti rigidi.

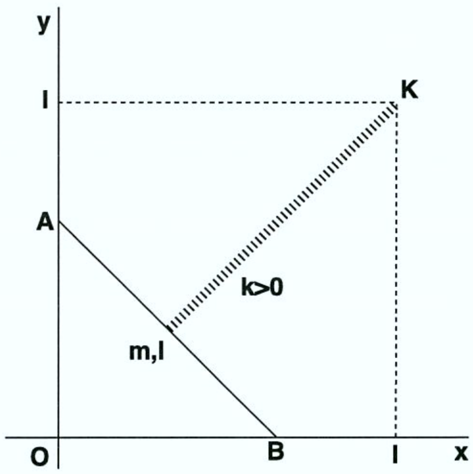
3. (7 punti)

(i) Enunciare e dimostrare il teorema di König per l'energia cinetica di un sistema di punti materiali;

(ii) utilizzando il teorema di König, scrivere l'energia cinetica di un'asta AB, di lunghezza l e massa m, libera di ruotare attorno all'estremo A, a sual volta vincolato a scorrere su una guida formante un angolo α con l'orizzontale (vedi figura).



4. (8 punti) Un'asta AB di massa m e lunghezza l si muove nel piano verticale $O(x, y)$, con gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente sull'asse y e sull'asse x. Oltre alla forza di gravità, sull'asta agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega il centro di massa P_0 con il punto K di coordinate (l, l).



(i) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) determinare tutte le forze che agiscono sull'asta;

(iii) scrivere le equazioni cardinali della dinamica per l'asta;

(iv) scrivere le equazioni del moto eliminando le reazioni vincolari.

1) (i) $I_{11} = \frac{1}{4} mR^2 + mR^2 = \frac{5}{4} mR^2$

$$I_{22} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{3} m \left(5R^2\right) = \frac{23}{12} mR^2$$

$$I_{12} = -mR \cdot \frac{R\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} m R^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{19}{6} mR^2$$

$$\underline{\underline{I}} = mR^2 \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{23}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

(ii) $\left(\frac{5}{4} - \lambda\right)\left(\frac{23}{12} - \lambda\right) - \frac{5}{4} = 0$ $\qquad \lambda^2 - \frac{19}{6}\lambda + \frac{55}{48} = 0$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 5/12 \\ 11/4 \end{cases}$$

$$\frac{5}{6} \longrightarrow \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{12}\right)x - \frac{\sqrt{5}}{2} y = 0 \qquad y = \frac{\sqrt{5}}{3} x$$

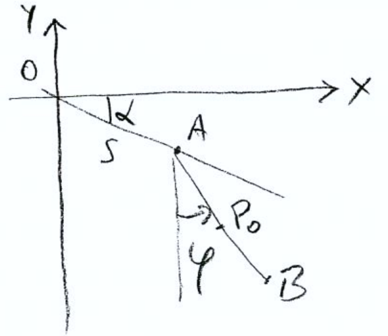
$$\underline{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{11}{2} \longrightarrow \left(\frac{5}{4} - \frac{11}{4}\right)x - \frac{\sqrt{5}}{2} y = 0 \qquad y = -\frac{3}{\sqrt{5}} x$$

$$\underline{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

3) (ii)

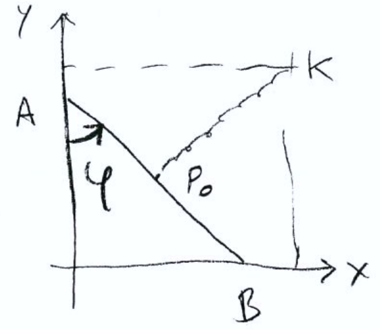


$$P_0 - O = \left(s\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\sin\varphi\right)\hat{\imath} - \left(s\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_0 = \left(\dot{s}\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\hat{\imath} - \left(\dot{s}\sin\alpha - \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\hat{\jmath}$$

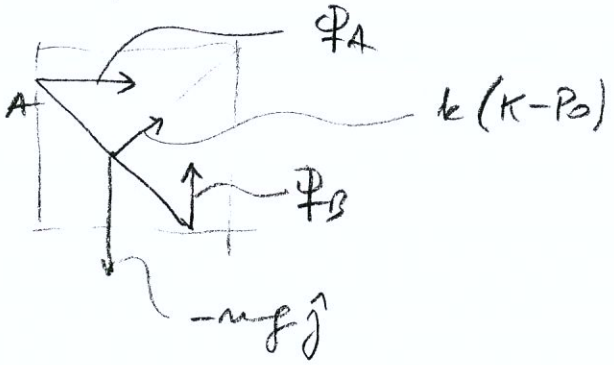
$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m\ell^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left\{\dot{s}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \ell\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)\right\}$$

4)



(i) $l = 1 \qquad q = \vartheta$

(ii)



(iii) $P_0 - O = \frac{l}{2}\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\varphi + \frac{l}{2}\hat{\jmath}\cos\varphi$

$$\underline{v}_0 = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\,\hat{\imath} - \mathrm{sen}\varphi\,\hat{\jmath}\right); \quad \underline{a}_0 = \frac{l}{2}\left\{\ddot{\varphi}\left(\cos\varphi\,\hat{\imath} - \mathrm{sen}\varphi\,\hat{\jmath}\right) + \dot{\varphi}^2\left(-\mathrm{sen}\varphi\,\hat{\imath} - \cos\varphi\,\hat{\jmath}\right)\right\}$$

$$\begin{cases} m\underline{a}_0 = \underline{R}^{(e)} = \Phi_A\hat{\imath} + \Phi_B\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath} + k(K-P_0) \\ \underline{\dot{K}}(P_0) = \underline{M}^{(e)}(P_0) = (A-P_0)\times(\Phi_A\hat{\imath}) + (B-P_0)\times(\Phi_B\hat{\jmath}) = \frac{l}{2}\left(-\Phi_A\cos\varphi + \Phi_B\,\mathrm{sen}\varphi\right)\hat{k} \end{cases}$$

$\underline{K}(P_0) = \frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}\,\hat{k}$ $\qquad\qquad K - P_0 = l\left\{\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\varphi\right)\hat{\imath} + \left(1-\frac{1}{2}\cos\varphi\right)\hat{\jmath}\right\}$

$$\begin{cases} m\frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\varphi\right) = \Phi_A + kl\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\varphi\right) \\ m\frac{l}{2}\left(-\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = \Phi_B - mg + kl\left(1-\frac{1}{2}\cos\varphi\right) \\ \frac{1}{12}ml^2\ddot{\varphi} = \frac{l}{2}\left(\Phi_B\sin\varphi - \Phi_A\cos\varphi\right) \end{cases}$$

(iv) $$\Phi_A = m\frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\varphi\right) - kl\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\varphi\right)$$

$$\Phi_B = m\frac{l}{2}\left(-\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + mg - kl\left(1-\frac{1}{2}\cos\varphi\right)$$

$$\frac{1}{12}ml^2\ddot{\varphi} = \frac{l}{2}\left\{-m\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\right\} - kl\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) + mg\sin\varphi$$

$$\boxed{\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi - kl\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right)}$$