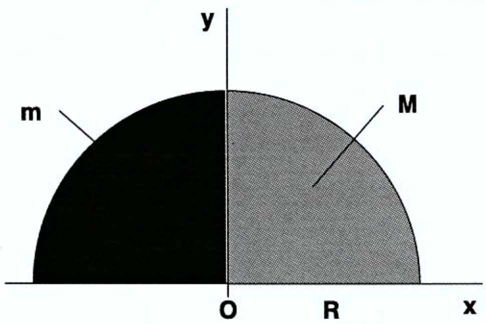
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 10 gennaio 2009

1. *(i)* (3 punti) Fornire la definizione di piano di simmetria materiale per un sistema rigido e dimostrare che una retta perpendicolare ad un piano di simmetria materiale è asse principale d'inerzia;

   (ii) (4 punti) Un corpo rigido è formato da un semicerchio non omogeneo di raggio R; il quarto di cerchio a sinistra dell'asse di simmetria ha massa m ed il quarto a destra ha massa M.



   – Calcolare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura (con l'asse z ortogonale al piano della figura);
   – individuare le direzioni principali d'inerzia sulla base delle simmetrie materiali e calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia in tale sistema di riferimento.

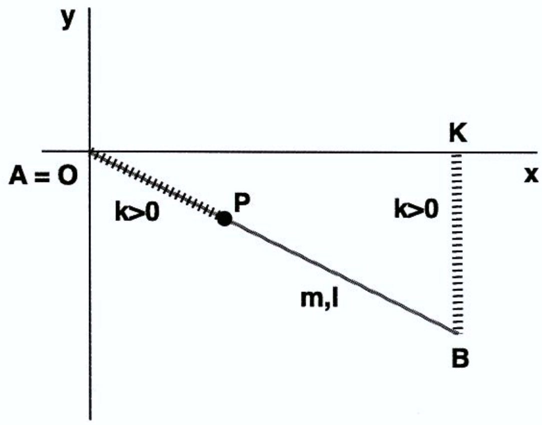
2. *(i)* (3 punti) Fornire la definizione di campo conservativo, introdurre la funzione potenziale, enunciare il teorema sulla relazione tra conservatività ed irrotazionalità e dimostrarne la necessità.

   (ii) (4 punti) Dato il campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,\hat{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2},$$

   – verificare se è irrotazionale;
   – verificare se è conservativo ed in caso affermativo calcolarne il potenziale.

3. Un'asta AB, di lunghezza l e massa m, mobile nel piano verticale $O(x, y)$, è libera di ruotare attorno all'estremo A, fisso nell'origine. Un punto P di massa m scorre senza attrito lungo l'asta (vedi figura). Due molle, di costante elastica $k > 0$, collegano il punto P con l'origine O e l'estremo B dell'asta con la sua proiezione ortogonale K sull'asse x.

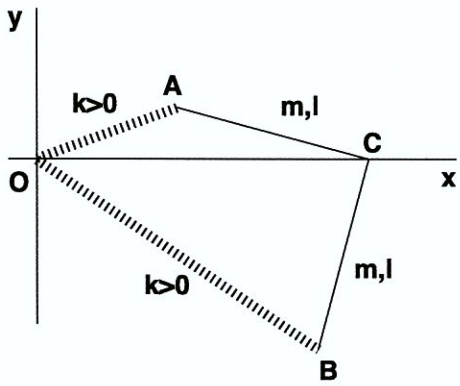


(i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) (2 punti) esplicitare tutte le forze agenti sul sistema;

(ii) (3 punti) determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando le equazioni cardinali della statica.

4. Un sistema rigido è costituito da due aste AC e BC, di massa m e lunghezza l, saldate ad angolo retto in C e libere di muoversi nel piano orizzontale $O(x, y)$. L'estremo C scorre senza attrito sull'asse x e le due aste sono libere di ruotare attorno a C.



(i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(ii) (2 punti) esplicitare tutte le forze agenti sul sistema;

(iii) (4 punti) scrivere le equazioni cardinali della dinamica;

(iv) (3 punti) eliminare le reazioni vincolari e scrivere le equazioni del moto.

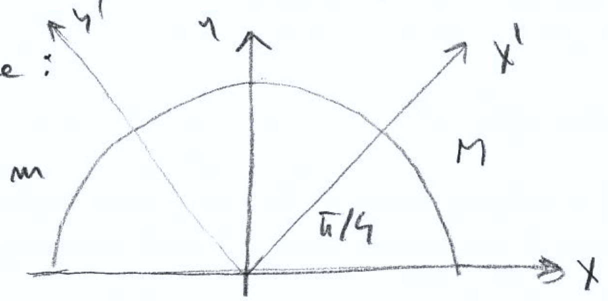
1) $$I_{11} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_1 r^3 \sin^2\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_2 r^3 \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{4}(\sigma_1+\sigma_2) = \frac{1}{4}(M+m)R^2 = I_{22} \qquad I_{33} = \frac{1}{2}(M+m)R^2$$

$$I_{12} = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_1 r^3 \cos\varphi \,\mathrm{sen}\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_2 r^3 \cos\varphi\, \mathrm{sen}\varphi =$$

$$= -\frac{R^4}{4}\left\{ \sigma_1 \frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \sigma_2 \frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right\} = -\frac{MR^2}{\pi}\cdot\frac{1}{2} + \frac{mR^2}{\pi}\frac{1}{2} = -\frac{R^2}{2\pi}(M-m)$$

Terna principale d'inerzia:



$$I'_{11} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_1 r^3 \sin^2\varphi + \int_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^R dr\, \sigma_2 r^3 \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4}\sigma_1 \frac{\pi-2}{4} + \frac{R^4}{4}\sigma_2 \frac{\pi+2}{4} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi-2}{\pi}M + \frac{\pi+2}{\pi}m\right]R^2$$

$$I'_{22} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi+2}{\pi}M + \frac{\pi-2}{\pi}m\right]R^2 \qquad I'_{33} = I'_{11} + I'_{22}$$

2) $$\underline{F} = \frac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{x^2+y^2} \qquad \underline{\nabla}\times\underline{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

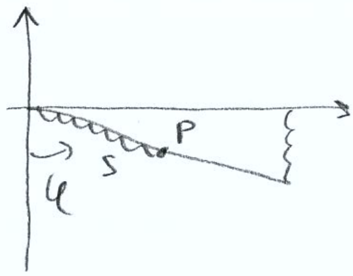
$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=y=0\} \qquad = \frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

NON è SEMPL. CONN.

Circuitazione su circonf. di raggio 1 e centro l'origine

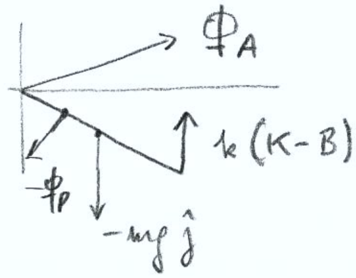
$$\oint \underline{F}\cdot dP = \int_0^{2\pi} \underline{F}\cdot(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\varphi + \hat{\jmath}\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\right]d\varphi = 2\pi \neq 0$$

NON CONS.

3) 

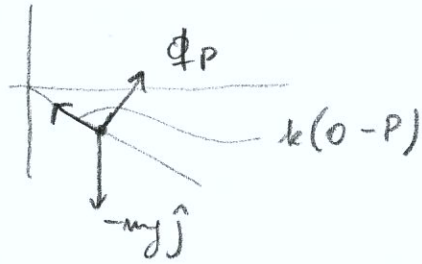
$\ell = 2 : \; s, \varphi$

Forze sull'asta



$$\begin{cases} k(O-P) - mg\,\hat{j} + \Phi_P = 0 \\ k(K-P) - mg\,\hat{j} + \Phi_A - \Phi_P = 0 \\ (B-O)\times[k(K-B)] + (P_0-O)\times(-mg\,\hat{j}) + (P-O)\times(-\Phi_P) = 0 \end{cases}$$

Forze sul punto P



$$\begin{cases} -ks\sin\varphi + \Phi_P\cos\varphi = 0 & (1) \\ ks\cos\varphi - mg + \Phi_P\sin\varphi = 0 & (2) \\ \Phi_{Ax} - \Phi_P\cos\varphi = 0 & (3) \\ \Phi_{Ay} - \Phi_P\sin\varphi - mg + k\ell\cos\varphi = 0 & (4) \\ k\ell^2\cos\varphi\sin\varphi - mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi - s\,\Phi_P\cos\varphi = 0 & (5) \end{cases}$$

Dalla (1) $\Phi_P\cos\varphi = ks\sin\varphi$

Dalla (5) $k\ell^2\sin\varphi\cos\varphi - mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi - ks^2\sin\varphi = 0$

Da (1) e (2)

$ks = mg\cos\varphi$

$s = \frac{mg}{k}\cos\varphi \quad (*)$

Introducendo (*) nella (5)

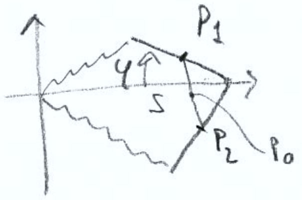
$$\sin\varphi\left\{k\ell^2\cos\varphi - \frac{mg\ell}{2} - k\frac{m^2g^2}{k^2}\cos^2\varphi\right\} = 0$$

$\sin\varphi = 0 \qquad \varphi = 0, \pi \qquad s = \pm\frac{mg}{k}$

$$\frac{m^2g^2}{k}\cos^2\varphi - k\ell^2\cos\varphi + \frac{mg\ell}{2} = 0 \qquad \left(\frac{mg}{k\ell}\right)^2\cos^2\varphi - \cos\varphi + \frac{mg}{2k\ell} = 0 \qquad \frac{mg}{k\ell} = \lambda$$

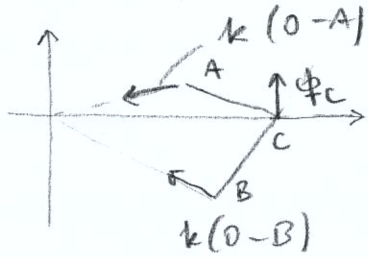
$$(\cos\varphi)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2\lambda^3}}{2\lambda} \qquad \text{etc.}$$

4)



$\ell = 2 \qquad s, \varphi$

Forze:



$$\begin{cases} P_1 - O = \left(s - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat{i} + \frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\hat{j} \\ P_2 - O = \left(s - \frac{\ell}{2}\sin\varphi\right)\hat{i} - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\hat{j} \end{cases}$$

$$P_0 - O = \frac{P_1 + P_2}{2} = \left[s - \frac{\ell}{4}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]\hat{i} + \frac{\ell}{4}(\sin\varphi - \cos\varphi)\,\hat{j}$$

$$\underline{v}_0 = \left[\dot{s} - \frac{\ell}{4}\dot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)\right]\hat{i} + \frac{\ell}{4}\dot{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)\,\hat{j}$$

$$\underline{a}_0 = \left[\ddot{s} - \frac{\ell}{4}\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) - \frac{\ell}{4}\dot{\varphi}^2(-\sin\varphi - \cos\varphi)\right]\hat{i} + \frac{\ell}{4}\left[\ddot{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \dot{\varphi}^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\right]$$

$$\begin{cases} 2m\,\underline{a}_0 = \underline{R}^{(e)} = k(O-A) + k(O-B) + \Phi_c\,\hat{j} \\ \dot{\underline{K}}(C) = \underline{M}^{(e)}(C) + \underline{Q} \times \underline{v}_c \end{cases}$$

$$\underline{v}_c = \dot{s}\,\hat{i}$$

$$\underline{K}(C) = 2m(P_0 - C) \times \underline{v}_c + \underline{\underline{I}}(C)\cdot\underline{\omega}$$

$$2m\left[\ddot{s} - \frac{\ell}{4}\ddot{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{\ell}{4}\dot{\varphi}^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right] = -k(s - \ell\cos\varphi) - k(s - \ell\sin\varphi) \quad (1)$$

$$\frac{m\ell}{2}\left[\ddot{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \dot{\varphi}^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\right] = k\ell(\sin\varphi - \cos\varphi) + \Phi_c$$

$$\frac{d}{dt}\left[2m(P_0 - C) \times \underline{v}_c - 2\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}\,\hat{k}\right] = (A - C)\times[k(O-A)] + (B-C)\times[k(O-B)] +$$

$$+ 2m\underline{v}_0 \times \underline{v}_c$$

$$2m\left[(\cancel{\underline{v}_0} - \cancel{\underline{v}_c}) \times \underline{v}_c + (P_0 - C)\times \underline{a}_c\right] - \frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\varphi}\,\hat{k} = \ell\sqrt{s^2 + \ell^2 - 2s\ell\cos\varphi}\,\sin\varphi\,\hat{k} +$$

$$- \ell\sqrt{s^2 + \ell^2 - 2s\ell\sin\varphi}\,\cos\varphi\,\hat{k} + 2m\cancel{\underline{v}_0} \times \underline{v}_c$$

$$-2m\frac{\ell}{4}(\sin\varphi - \cos\varphi)\ddot{s} - \frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} = \ell\left\{\sqrt{}\,\sin\varphi - \sqrt{}\,\cos\varphi\right\} \quad (2)$$

(1) + (2) danno le equazioni del moto