Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

Nome ....

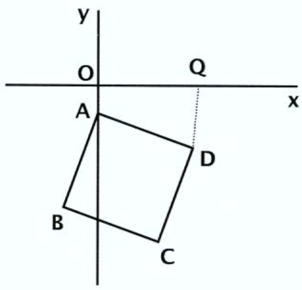
N. Matricola ....

Ancona, 11 dicembre 2009

1. (9 punti)

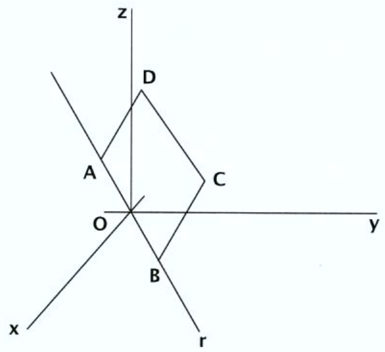
   (i) Enunciare e dimostrare le equazioni cardinali della dinamica.

   (ii) Utilizzando le equazioni cardinali della dinamica, scrivere le equazioni del moto del sistema mostrato in figura, costituito da una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e massa m, il cui vertice A scorre senza attrito lungo l'asse Oy (verticale), e che è libera di ruotare attorno al vertice A. Due molle collegano il vertice A con l'origine O ed il vertice D con il punto $Q(L, 0)$.



2. (9 punti)

   (i) Esprimere il momento angolare di un corpo rigido che ruota con un punto fisso mediante la matrice d'inerzia e la velocità angolare.

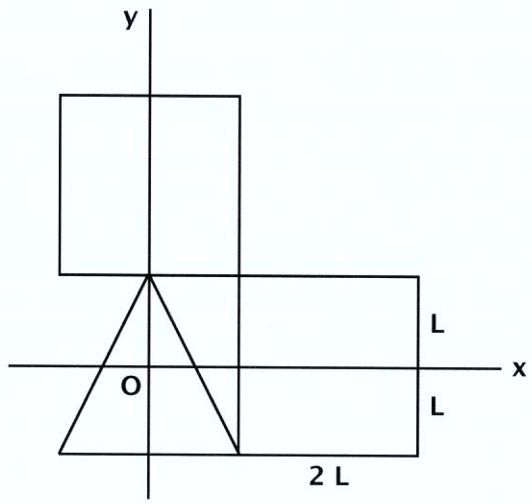


(ii) Si consideri il corpo rigido mostrato in figura, costituito da una lamina rettangolare $ABCD$ di lati a e b e massa m, libera di ruotare attorno all'asse Oz ed attorno alla retta passante per l'origine e su cui giace il lato AB, di cui O è il punto medio. Scrivere il momento angolare del sistema rispetto all'origine del sistema di riferimento fisso $O(x, y, z)$ indicato nella figura.

3. (8 punti)

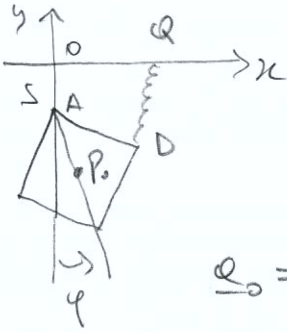
   (i) Calcolare la matrice d'inerzia del corpo rigido piano mostrato in figura, costituito da un triangolo isoscele di base $2\,L$, altezza $2\,L$ e massa m e da due quadrati di lato $2\,L$ e massa m, nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ mostrato (l'asse z ortogonale al piano della figura).

   (ii) Indicare se la terna di riferimento in questione è principale d'inerzia, giustificando la risposta sulla base delle simmetrie materiali.



4. (8 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Mozzi.

1)



$$P_0 - O = L\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\varphi - (s + L\cos\varphi)\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_0 = L\dot\varphi\hat{\imath}\cos\varphi - (\dot s - L\dot\varphi\sin\varphi)\hat{\jmath}$$

$$\underline{a}_0 = L\hat{\imath}(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\varphi) - [\ddot s - L(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi)]\hat{\jmath}$$

$$Q - D = L\hat{\imath} - \left[L\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right]\hat{\imath} - \left[s + L\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)\right]\hat{\jmath}$$

$$\underline{K}(P_0) = I_{33}(P_0)\dot\varphi\hat{k} = \frac{1}{6}mL^2\dot\varphi\hat{k}$$

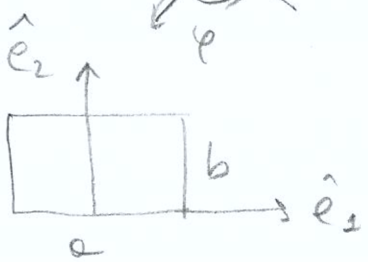
$$\underline{M}(P_0) = (A - P_0)\times[k(O-A)] + (D - P_0)\times[k(Q-D)] + (A - P_0)\times(\phi_A\hat{\imath})$$

$$\begin{cases} m\,\underline{a}_0 = -mg\hat{\jmath} + k(Q-D) + ks\hat{\jmath} + \phi_A\hat{\imath} \\ \frac{1}{6}mL^2\ddot\varphi = \underline{M}(P_0) \end{cases}$$

etc.

---

2) ii)

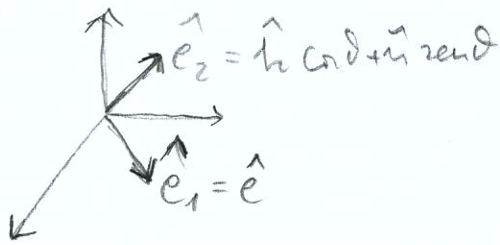


$$\hat{e} = \hat{\imath}\cos\varphi + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\underline{\omega} = \dot\varphi\hat{k} - \dot\theta\hat{e}$$

$$\hat{n} = -\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat{\jmath}\cos\varphi$$

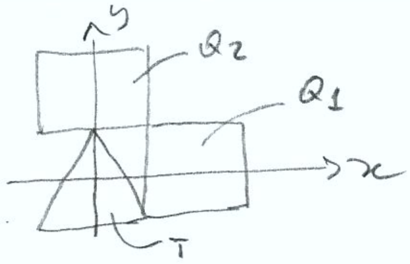
$$\hat{k} = \hat{e}_2\cos\theta + \hat{e}_3\sin\theta$$



$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} -\dot\theta \\ \dot\varphi\cos\theta \\ \dot\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underline{K}(O) = I\omega = \begin{pmatrix} -I_{11}\dot\theta \\ I_{22}\dot\varphi\cos\theta \\ I_{33}\dot\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$$

3) $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_{Q_1} + \underline{\underline{I}}_{Q_2} + \underline{\underline{I}}_{T}$



Q_1 $\quad I_{11} = \sigma \int_L^{3L} dx \int_{-L}^{L} dy\, y^2 = 2L\sigma \cdot 2\frac{L^3}{3} =$

$= \frac{1}{3} m L^2 \quad ; \quad I_{22} = \sigma \int_L^{3L} dx \int_{-L}^{L} dy\, x^2 = 2L\sigma \frac{x^3}{3}\Big|_L^{3L} = \frac{2}{3}\sigma L^4 \cdot 26 = \frac{13}{3} m L^2$

$I_{33} = \frac{14}{3} m L^2$

Q_2 $\quad I_{11} = \frac{13}{3} m L^2 \; ; \; I_{22} = \frac{1}{3} m L^2 \; ; \; I_{33} = \frac{14}{3} m L^2$

T $\quad I_{11} = 2\sigma \int_0^L dx \int_{-L}^{L-2x} y^2\, dy = 2\sigma \int_0^L dx \frac{(L-2x)^3 + L^3}{3} = \frac{2}{3}\sigma \int_0^L dx \left(2L^3 - 6L^2 x + 12 L x^2 - 8x^3\right) =$

$= \frac{2}{3}\sigma \left\{ 2L^4 - 6L^2 \frac{L^2}{2} + 12 \frac{L^4}{3} - 8\frac{L^4}{4} \right\} = \frac{2}{3} L^4 (2 - 3 + 4 - 2) = \frac{2}{3}\sigma L^4 = \frac{1}{3} m L^2$

$I_{22} = 2\sigma \int_0^L dx \int_{-L}^{L-2x} x^2\, dy = 2\sigma \int_0^L dx\, x^2 (2L - 2x) = 2\sigma \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) L^4 =$

$= \frac{1}{6}\sigma L^4 = \frac{1}{12} m L^2 \qquad I_{33} = \frac{5}{12} m L^2$

In totale $\quad I_{11} = \left(\frac{1}{3} + \frac{13}{3} + \frac{1}{3}\right) m L^2 = 5 m L^2$

$I_{22} = \left(\frac{13}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) m L^2 = \frac{19}{4} m L^2$

$I_{33} = \frac{39}{4} m L^2$

La terna è principale d'inerzia per ciascuna parte, dunque è principale d'inerzia per tutta la figura