Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

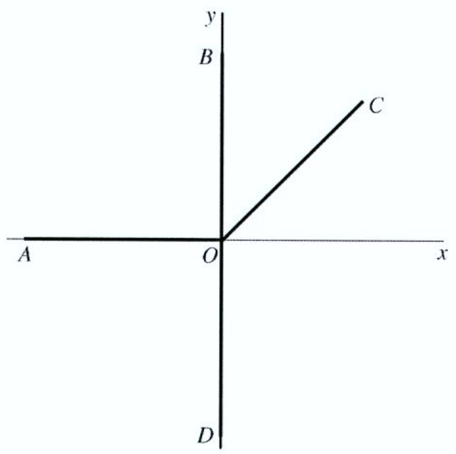
Nome:. . . . .

N. matr.:. . . . . Ancona, 9 settembre 2009

1. (8 punti)

   (i) Enunciare e dimostrare le proprietà della matrice d'inerzia di un corpo rigido in generale e di un corpo rigido piano.

   (ii) Si consideri quindi il corpo rigido omogeneo, di massa $4m$, costituito dalle aste AO, OC e BD, con O il punto medio di BD, e con $AO = OC = OB = OD = l$ e rappresentato in figura. Calcolarne la matrice d'inerzia nel sistema solidale $O(x, y, z)$ ivi indicato (con l'asse z ortogonale al piano della figura) e determinare per via algebrica le direzioni principali ed i momenti principali d'inerzia.

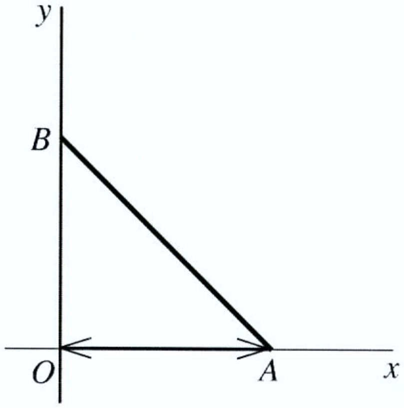


2. (6 punti) Enunciare e dimostrare il primo ed il secondo teorema di König.

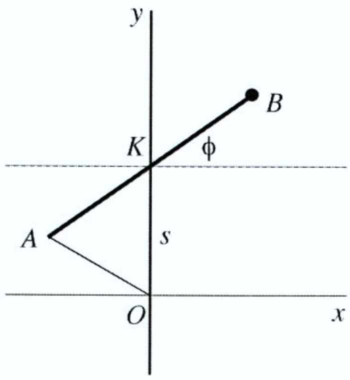
3. (8 punti)

(i) Ricavare le equazioni cardinali della dinamica e discuterne la necessità e sufficienza.

(ii) Si consideri quindi un'asta omogenea pesante AB, di massa m e lunghezza l, che si muove nel piano verticale $O(x, y)$, con gli estremi A e B vincolati a scorrere senza attrito rispettivamente sugli assi Oy ed Ox. Una forza elastica di costante $k > 0$ agisce inoltre sull'estremo B, con centro l'origine. Scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.



4. (8 punti) Nel piano verticale $O(x, y)$ si consideri un'asta AB di massa M e lunghezza $2L$, il cui punto medio K è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y; sull'estremo A agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega A con l'origine O e sull'estremo B è saldato un punto materiale di massa m. Siano s e ϕ le coordinate lagrangiane come indicato in figura.



Determinare le configurazioni di equilibrio usando le equazioni cardinali della statica.

(1) (i) $\underline{\underline{I}}$ matrice simmetrica con $I_{ii} \geq 0$

Figura piana: $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ assi ortogonali e principali d'inerzia $I_{13} = I_{23} = 0$

(ii) $I_{11} = \frac{1}{3} m\ell^2 + \frac{1}{3} m\ell^2 + \frac{1}{3} m\ell^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} m\ell^2$

$I_{33} = \frac{4}{3} m\ell^2$

$I_{22} = \frac{1}{3} m\ell^2 + \frac{1}{3} m\ell^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} m\ell^2$

$I_{12} = I_{12}^{OC} = -\int_0^\ell \lambda^2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4} \mu \, d\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\ell^3}{3} \cdot \mu = -\frac{1}{6} m\ell^2$

$$\underline{\underline{I}} = m\ell^2 \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{5}{6} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{36} = 0$$

$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{5}{12} - \frac{1}{36} = 0$ $\qquad 36\lambda^2 - 48\lambda + 14 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 504}}{36} = \frac{24 \pm 6\sqrt{2}}{36} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{6}$

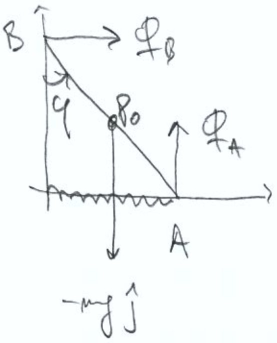
$\lambda_1 \rightarrow \left(\frac{5}{6} - \frac{4 - \sqrt{2}}{6}\right) x - \frac{1}{6} y = 0$

$\frac{1+\sqrt{2}}{6} x - \frac{1}{6} y = 0$ $\qquad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 \rightarrow \left(\frac{5}{6} - \frac{4+\sqrt{2}}{6}\right) x - \frac{1}{6} y = 0$

$\frac{1-\sqrt{2}}{6} x - \frac{1}{6} y = 0$ $\qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3)



$$P_0 - O = \frac{\ell}{2}\left(\hat\imath \operatorname{sen}\varphi + \hat\jmath \cos\varphi\right)$$

$$\underline{v}_0 = \frac{\ell}{2}\dot\varphi\left(\hat\imath\cos\varphi - \hat\jmath \operatorname{sen}\varphi\right)$$

$$\underline{a}_0 = \frac{\ell}{2}\left\{\ddot\varphi\left(\hat\imath\cos\varphi - \hat\jmath\operatorname{sen}\varphi\right) - \dot\varphi^2\left(\hat\imath \operatorname{sen}\varphi + \hat\jmath\cos\varphi\right)\right\}$$

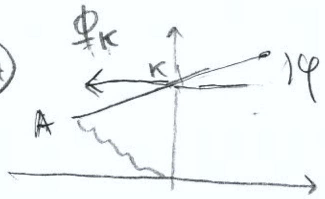
$$\underline{K}(P_0) = \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\omega} = I_{33}(P_0)\,\dot\varphi = \frac{1}{12}m\ell^2\dot\varphi\,\hat k$$

$$\begin{cases} m\underline{a}_0 = \underline{R}^{(e)} \\ \dot{\underline{K}} = \underline{M}^{(e)}(P_0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{m\ell}{2}\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi\right) = -k\ell\operatorname{sen}\varphi + \Phi_B \\ \frac{m\ell}{2}\left(-\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi - \dot\varphi^2\cos\varphi\right) = \Phi_A - mg \\ \frac{1}{12}m\ell^2\ddot\varphi = \frac{\ell}{2}\left(\Phi_A\operatorname{sen}\varphi - \Phi_B\cos\varphi\right) - \frac{k\ell^2}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_B = \frac{m\ell}{2}\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi\right) + k\ell\operatorname{sen}\varphi \\ \Phi_A = mg - \frac{m\ell}{2}\left(\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) \\ \frac{1}{12}m\ell^2\ddot\varphi = \frac{\ell}{2}\left\{\left[\frac{m\ell}{2}\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi\right) + k\ell\operatorname{sen}\varphi\right]\operatorname{sen}\varphi - \left[mg - \frac{m\ell}{2}\left(\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right)\right]\cos\varphi\right\} \\ \qquad - \frac{k\ell^2}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

etc.

(4)



$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} = 0 \\ \underline{M}^{(e)}(K) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -Mg - mg - k(s - L\sin\varphi) = 0 \\ kL\cos\varphi - \Phi_K = 0 \\ -mgL\cos\varphi + (A-K)\times\left[k(O-A)\right]\cdot\hat k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ks + (M+m)g - kL\sin\varphi = 0 \\ \Phi_K = kL\cos\varphi \\ -mgL\cos\varphi + k\left[+L\cos\varphi\left(s - \cancel{L\sin\varphi}\right) - \cancel{(-L\sin\varphi)L\cos\varphi}\right] = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ks - kL\sin\varphi = -(M+m)g \\ L\cos\varphi\left(ks - mg\right) = 0 \end{cases}$$

(a) $\cos\varphi = 0 \quad \sin\varphi = \pm 1 \qquad s = \frac{M+m}{k}g \pm L \qquad T_1 \equiv \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{M+m}{k}g + L\right)$

$T_2 \equiv \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{M+m}{k}g - L\right)$

(b) $s = \frac{mg}{k}$ deve essere $\frac{(M+2m)g}{kL} < 1$

$\sin\varphi = \frac{(M+2m)g}{kL}$

$T_3 = \left(\varphi_0, \frac{mg}{k}\right) \qquad T_4 = \left(\pi - \varphi_0, \frac{mg}{k}\right)$