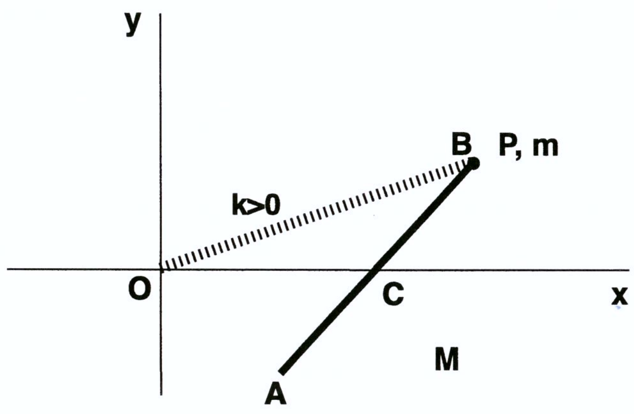
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2007/2008
Fisica Matematica

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 20 ottobre 2008

1. (10 punti) Un punto materiale P di massa m è saldato all'estremo A di un'asta omogenea di lunghezza l e massa m, il cui punto medio C scorre senza attrito sull'asse x di un piano cartesiano verticale $O(x, y)$. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con l'origine O.



   (i) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

   (ii) determinare tutte le forze che agiscono sul sistema;

   (iii) scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

2. (7 punti)

   (i) Fornire la definizione di campo conservativo;

   (ii) dimostrare che un campo conservativo è sempre irrotazionale;

   (iii) enunciare le condizioni sotto le quali un campo irrotazionale è conservativo;

   (iv) determinare se il campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,z\,\hat{\mathbf{i}} + x\,z\,\hat{\mathbf{j}} + x\,y\,\hat{\mathbf{k}}$$

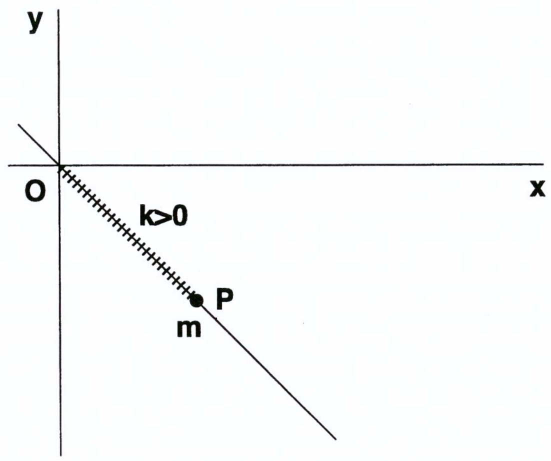
   è conservativo ed in caso affermativo calcolarne il potenziale.

3. (7 punti)

   (i) Dimostrare che il centro di massa di un insieme di punti materiali $P_1, P_2, \ldots, P_N$, di masse $m_1, m_2, \ldots, m_N$, distribuiti su una stessa retta r, o su uno stesso piano σ appartiene, rispettivamente, alla retta r ed al piano σ.

(*ii*) si consideri un insieme di punti materiali distribuiti su tre piani paralleli equidistanti σ, λ e π, con λ intermedio fra gli altri due, in modo tale che la massa totale dei punti sul piano σ sia uguale a quella dei punti sul piano π. Cosa si può dire del centro di massa del sistema complessivo (giustificare la risposta)?

4. (6 punti) Un punto materiale P di massa m si muove nel piano verticale $O(x, y)$ ed è vincolato a scorrere senza attrito sulla retta di equazione $y = -x$. Oltre alla forza di gravità, sul punto P agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega P con l'origine O.



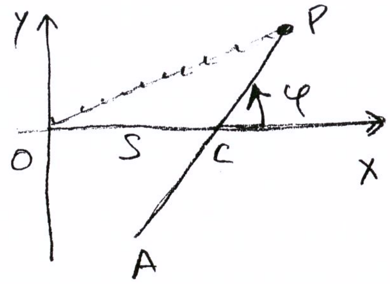
(*i*) Determinare il numero di gradi di libertà e scegliere le coordinate lagrangiane;

(*ii*) determinare tutte le forze che agiscono su P;

(*iii*) scrivere le equazioni di Newton;

(*iv*) risolvere le equazioni di Newton e studiare il moto del punto.

1)



$$2\ g.d.l\ :(s,\varphi)$$

$$P_0 - O = \frac{P+C}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(s+\frac{\ell}{4}\cos\varphi\right)\hat{\imath} + \frac{\ell}{4}\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{\jmath}\right]$$

$$\underline{R}^{(e)} = -2mg\hat{\jmath} - k(P-O) + \Phi_c =$$
$$= -2mg\hat{\jmath} - k\left[\left(s+\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat{\imath} + \frac{\ell}{2}\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{\jmath}\right] + \Phi_c\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{s} - \frac{\ell}{4}\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi\right)\hat{\imath} + \frac{\ell}{4}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{\jmath}\right] \qquad \underline{\omega} = \dot{\varphi}\hat{k}$$

$$\underline{a}_0 = \frac{1}{2}\left\{\ddot{s}\hat{\imath} - \frac{\ell}{4}\left[\left(\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\hat{\imath} - \left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\varphi\right)\hat{\jmath}\right]\right\}$$

$$\underline{K}(P_0) = I_{33}\dot{\varphi}\hat{k} = \left[\underbrace{\left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{16}\right)}_{\text{ASTA}} + \underbrace{\frac{m\ell^2}{16}}_{P}\right]\dot{\varphi}\hat{k} = \frac{5}{24}m\ell^2\dot{\varphi}\hat{k}$$

$$\underline{M}^{(e)}(P_0) = (P-P_0)\times\left[k(O-P)\right] + (C-P_0)\times(\Phi_c\hat{\jmath}) = -\frac{k\ell}{4}\left(\hat{\imath}\cos\varphi + \hat{\jmath}\,\text{sen}\,\varphi\right)\times\left[\left(s+\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)\hat{\imath} + \frac{\ell}{2}\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{\jmath}\right]$$
$$-\Phi_c\left(\frac{\ell}{4}\hat{\imath}\cos\varphi + \frac{\ell}{4}\hat{\jmath}\,\text{sen}\,\varphi\right)\times\hat{\jmath} =$$
$$= \left\{-\frac{k\ell}{4}\left[\cancel{\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi} - \text{sen}\,\varphi\left(s + \cancel{\frac{\ell}{2}\cos\varphi}\right)\right] - \Phi_c\frac{\ell}{4}\cos\varphi\right\}\hat{k} = \frac{\ell}{4}\left(ks\,\text{sen}\,\varphi - \Phi_c\cos\varphi\right)$$

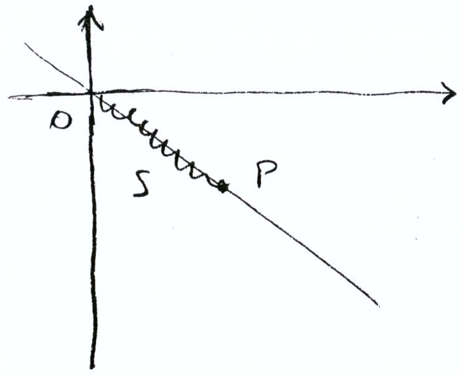
$$\begin{cases} 2m\left[\frac{1}{2}\ddot{s} - \frac{\ell}{8}\left(\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\right] = -k\left(s + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) \\ m\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\varphi\right) = -2mg - \frac{k\ell}{2}\,\text{sen}\,\varphi + \Phi_c \\ \frac{5}{24}m\ell^2\ddot{\varphi} = \frac{\ell}{4}\left(ks\,\text{sen}\,\varphi - \Phi_c\cos\varphi\right) \end{cases}$$

---

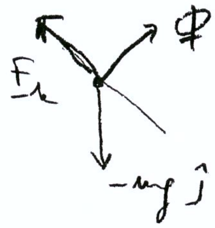
2) $\Omega = \mathbb{R}^3$ $\qquad \underline{\nabla}\times\underline{F} = 0$ è conservativo

$$U = \int_0^x F_x(\xi,0,0)\,d\xi + \int_0^y F_y(x,\xi,0)\,d\xi + \int_0^z F_z(x,y,\xi)\,d\xi = xyz$$

4)



g. d. l = 1   s



$$\underline{F}_k = -ks\,\frac{\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = mg\dfrac{\sqrt{2}}{2} - ks \\ \Phi = mg\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\ddot{s} + \omega^2 s = g\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$s(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{mg}{k}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Oscillatore armonico con centro in $s_0 = \dfrac{mg}{k}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$