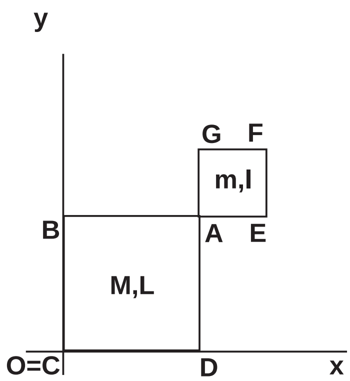
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2006/2007
Fisica Matematica

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 20 aprile 2007

1. Un corpo rigido piano è costituito da due lamine quadrate omogenee $ABCD$ ed $AEFG$, di massa rispettivamente M ed m e lati L ed l. Calcolare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ mostrato in figura, sfruttando il più possibile il teorema di Huygens; individuare, sulla base delle simmetrie materiali, la terna principale d'inerzia con origine in O e calcolare i momenti principali d'inerzia.

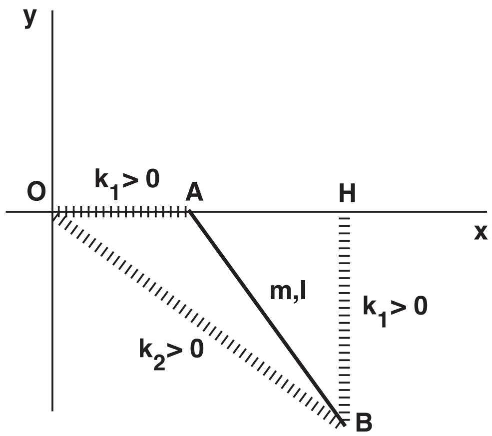


2. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\,\hat{\mathbf{i}} + F_y(x, y, z)\,\hat{\mathbf{j}} + F_z(x, y, z)\,\hat{\mathbf{k}}$ un campo di forze generico definito nel dominio $\Omega \in \mathbb{R}$. Quando tale campo si dice conservativo? Discutere quindi l'implicazione, nei due sensi, tra conservatività ed irrotazionalità, dimostrandone una parte. Stabilire infine la conservatività (o meno) dei due campi di forze

$$\mathbf{F_1}(x, y) = x\,y^2\,\hat{\mathbf{i}} + x^2\,y\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{F_2}(x, y) = x\,y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,y\,\hat{\mathbf{j}}.$$

3. *(i)* Ricavare le equazioni cardinali della dinamica per un sistema generico di punti materiali. Particolarizzarle quindi al caso di un corpo rigido con un asse fisso.

(ii) Un'asta materiale pesante AB di massa m e lunghezza l si muove nel piano verticale $O(x, y)$. L'estremo A scorre senza attrito sull'asse x, mentre l'asta ruota liberamente attorno ad A. Oltre alla forza peso, sull'asta agiscono tre molle; due di esse, di ugual costante elastica $k_1 > 0$, collegano gli estremi A e B dell'asta rispettivamente con l'origine O e con il punto H, proiezione di B sull'asse x, mentre la terza molla, di costante elastica $k_2 > 0$, collega B con O. Determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando le equazioni cardinali della statica.



Soluzioni.

1. Il sistema è piano, per cui $I_{33} = I_{11} + I_{22}$, $I_{13} = I_{23} = 0$. Ciascun elemento è la somma del contributo dovuto al quadrato di massa M e di quello di massa m. Abbiamo
$$I_{11}^M = \sigma \int_0^L \int_0^L y^2\, dx\, dy = \frac{1}{3}\, M\, L^2 = I_{22}^M$$
Per il quadrato piccolo, dobbiamo usare il teorema di Huygens:
$$I_{11}^m = \left(\frac{1}{3}\, m\, l^2 - \frac{ml^2}{4}\right) + m\left(L + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\, m\, l^2 + m\left(L + \frac{l}{2}\right)^2 = I_{22}^m$$
Per gli elementi fuori diagonale:
$$I_{12}^M = \sigma \int_0^L \int_0^L x\, y\, dx\, dy = \frac{1}{4}\, M\, L^2$$
e, usando il teorema di Huygens nella sua formula più generale:
$$I_{12}^m = m\left(L + \frac{l}{2}\right)^2$$
Complessivamente:
$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{3}\, M\, L^2 + \frac{1}{12}\, m\, l^2 + m\left(L + \frac{l}{2}\right)^2 = I_{22} \equiv \Lambda \\ I_{33} &= I_{11} + I_{22} = 2\,\Lambda \\ I_{12} &= \frac{1}{4}\, M\, L^2 + m\left(L + \frac{l}{2}\right)^2 \equiv \Gamma \end{aligned}$$
e quindi la matrice d'inerzia è
$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \Lambda & \Gamma & 0 \\ \Gamma & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\Lambda \end{pmatrix}$$
La terna principale d'inerzia ha l'asse x lungo la diagonale dei quadrati (dunque passa per O, A ed F), l'asse y ortogonale ad x e passante per O, l'asse z coincide con quello dato inizialmente (perpendicolare al piano della figura). I momenti principali d'inerzia I_1, I_2 ed I_3 sono gli autovalori della matrice d'inerzia, soluzioni dell'equazione
$$\begin{vmatrix} \Lambda - I & \Gamma & 0 \\ \Gamma & \Lambda - I & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\Lambda - I \end{vmatrix} = 0,$$
vale a dire $I_1 = \Lambda - \Gamma$, $I_2 = \Lambda + \Gamma$ ed $I_3 = 2\,\Lambda$.

2. Calcoliamo i rotori:
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F_1} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F_{1x}}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F_{1y}}}{\partial x}\right) \hat{\mathbf{k}} = (2\,x\,y - 2\,x\,y)\, \hat{\mathbf{k}} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{F_2} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F_{2x}}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F_{2y}}}{\partial x}\right) \hat{\mathbf{k}} = (x - y)\, \hat{\mathbf{k}} \neq 0 \end{aligned}$$
Essendo entrambi i domini $\Omega = \mathbb{R}^2$, il campo $\mathbf{F_1}$ è conservativo mentre il campo $\mathbf{F_2}$ non lo è.

3. Sistema a due gradi di libertà; coordinate lagrangiane:
s - ascissa di A
φ - angolo dell'asta con la verticale.

Prendendo l'estremo A come polo per il calcolo dei momenti, le equazioni cardinali della statica sono

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^e &= 0\\ \mathbf{M}^e(A) &= 0.\end{aligned}$$

Le forze che agiscono sul sistema sono:
- la forza peso che agisce sul centro di massa: $\mathbf{F_P} = -\,m\,g\,\hat{\mathbf{j}}$
- La forza elastica di costante k_1 che agisce su A: $\mathbf{F_A} = -\,k_1\,s\,\hat{\mathbf{i}}$
- Le forze elastiche di costanti k_1 e k_2 che agiscono su B: $\mathbf{F_B} = k_1\,l\,\cos\varphi\hat{\mathbf{j}} - k_2\,\left[(s+l\,\sin\varphi)\,\hat{\mathbf{i}} - l\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right]$
- La reazione vincolare in A: $\mathbf{\Phi_A} = \Phi_y\,\hat{\mathbf{j}}$.

Le equazioni cardinali della statica diventano esplicitamente:

$$\begin{aligned}&-\,m\,g\,\hat{\mathbf{j}} -\,k_1\,s\,\hat{\mathbf{i}} + k_1\,l\,\cos\varphi\hat{\mathbf{j}} - k_2\,\left[(s+l\,\sin\varphi)\,\hat{\mathbf{i}} + l\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right] + \Phi_y\,\hat{\mathbf{j}} = 0\\ &(P_0 - A)\times(-\,m\,g\,\hat{\mathbf{j}}) + (B-A)\times\left\{k_1\,l\,\cos\varphi\hat{\mathbf{j}} - k_2\,\left[(s+l\,\sin\varphi)\,\hat{\mathbf{i}} - l\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right]\right\} = 0\end{aligned}$$

Un po' di cinematica:

$$\begin{aligned}B - A &= l\,\left(\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} - \cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\ P_0 - A &= \frac{l}{2}\,\left(\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} - \cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}}\right)\end{aligned}$$

Sostituendo e scomponendo:

$$\begin{aligned}&-\,k_1\,s - k_2\,(s + l\,\sin\varphi) = 0\\ &-\,m\,g + k_1\,l\,\cos\varphi - k_2\,l\,\cos\varphi + \Phi_y = 0\\ &-\,m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi + l\,(k_1\,l\,\sin\varphi - k_2\,s\,)\cos\varphi = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&s = -\,\frac{k_2\,l}{k_1+k_2}\,\sin\varphi\\ &\Phi_y = m\,g - k_1\,l\,\cos\varphi + k_2\,l\,\cos\varphi\\ &l\,\left\{-\,\frac{mg}{2} + l\,\left[l\,(k_1+k_2) - k_2\,s\,\cos\varphi\right]\right\}\sin\varphi = 0\\ &\left[-\,\frac{mg}{2} + l\,\left(k_1 + \frac{k_2^2}{k_1+k_2}\right)\,\cos\varphi\right]\sin\varphi = 0\end{aligned}$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}&s = -\,\frac{k_2 l}{k_1+k_2}\,\sin\varphi\\ &m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi - k_1\,l^2\,\cos\varphi\sin\varphi - \frac{k_2^2 l^2}{k_1+k_2}\,\sin\varphi\,\cos\varphi = 0\\ &\left[m\,g - 2\,l\,\left(\frac{k_2^2}{k_1+k_2} + k_1\right)\,\cos\varphi\right]\,\sin\varphi = 0\end{aligned}$$

Le prime due configurazioni di equilibrio corrispondono allora a

$$\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi = 0\\ s = 0\end{array}\right.$$

e quindi $\Gamma_1 = (0,0)$, $\Gamma_2 = (0,\pi)$ ed esistono sempre. Le altre due corrispondono a

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{mg}{2l}\,\frac{k_1+k_2}{k_1(k_1+k_2)+k_2^2} \equiv \Lambda \\ s &= \pm\frac{k_2 l}{k_1+k_2}\sqrt{1-\Lambda^2} \equiv \pm s_0 \end{aligned}$$

ed esistono soltanto quando $\Lambda \leq 1$. Indicando con φ_0 l'angolo tale che $\cos\varphi_0 = \Lambda$ con $\sin\varphi_0 > 0$, abbiamo per le altre due configurazioni: $\Gamma_3 = (s_0, \varphi_0)$ e $\Gamma_4 = (-s_0, -\varphi_0)$.