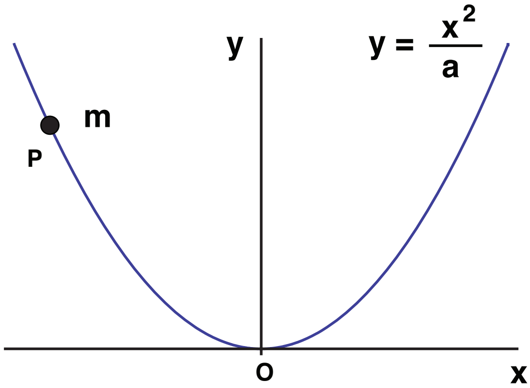
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - V. O.
Anno Accademico 2012/2013
Fisica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 14 settembre 2013

1. Un punto P di massa m si muove lungo una guida parabolica di equazione $y = x^2/a$ sul piano verticale $O(x, y)$, con velocità costante u lungo x, $\dot{x} = u$. Esprimere il modulo della velocità in funzione di x e calcolare tale velocità quando P passa per l'origine.



Soluzione.

Equazione della traiettoria: $\quad y = \dfrac{x^2}{a}$

Vettore velocità: $\quad \mathbf{v} = \dot{x}\,\widehat{\mathbf{i}} + \dot{y}\,\widehat{\mathbf{j}}$

Ma $\quad \dot{x} = u \quad$ e $\quad \dot{y} = \dfrac{2\,x}{a}\,\dot{x} = \dfrac{2\,x}{a}\,u$

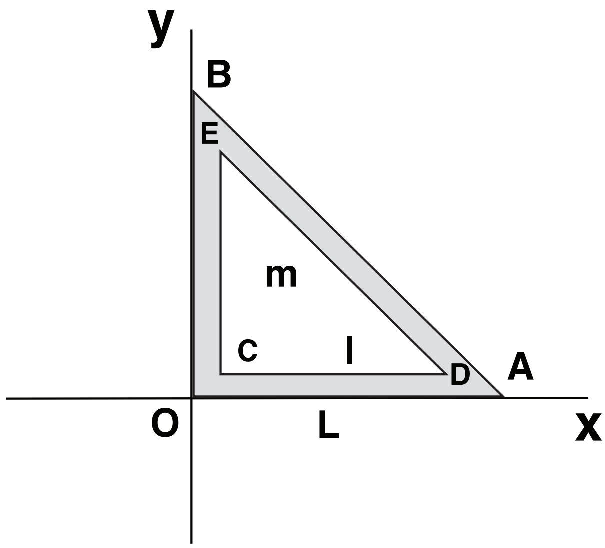
Modulo al quadrato della velocità: $\quad v^2 = |\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2\left(1 + \dfrac{4\,x^2}{a^2}\right)$

Nell'origine $x = 0$ e quindi: $\quad v(O) = u$

2. Una cornice triangolare di massa m è costituita da un triangolo rettangolo isoscele OAB di cateto L privato di un triangolo rettangolo isoscele CDE di cateto $l < L$, con i lati paralleli al triangolo esterno e con i cateti CE e CD situati a distanza $(L - l)/2$ dai cateti OB e OA. Determinare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$ indicato in figura (con l'asse z perpendicolare al piano della figura) e determinare le direzioni principali d'inerzia con origine in O.

Soluzione. La matrice d'inerzia si ottiene per differenza tra la matrice del triangolo pieno ed quella del buco triangolare:

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_L - \mathbb{I}_l$$



con masse m_L ed m_l date da

$$
\begin{aligned}
& m_L - m_l = m \\
& \frac{m_L}{m_l} = \frac{L^2}{l^2} \\
& m_L = \frac{m\,L^2}{L^2 - l^2} \\
& m_l = \frac{m\,l^2}{L^2 - l^2}
\end{aligned}
$$

Triangolo di cateto L:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \sigma \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy\, y^2 = \sigma \int_0^L dx\, \frac{(L-x)^3}{3} \\
&= \sigma \int_0^L dx\, \frac{x^3}{3} = \sigma\, \frac{L^4}{12} = \frac{1}{6}\, m_L\, L^2 \\
I_{22} &= I_{11} = \frac{1}{6}\, m_L\, L^2 \qquad \text{(per simmetria)} \\
I_{12} &= \sigma \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy\, (-x\, y) = -\sigma \int_0^L x\, dx \int_0^{L-x} y\, dy \\
&= -\sigma \int_0^L dx\, x\, \frac{(L-x)^2}{2} = -\sigma \int_0^L dx\, (L-x)\, \frac{x^2}{2} \\
&= -\frac{\sigma}{2} \int_0^L dx\, (L\, x^2 - x^3) = -\frac{\sigma}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) L^4 = -\frac{1}{12}\, m_L\, L^2
\end{aligned}
$$

Triangolo di cateto l rispetto ad un sistema con gli assi lungo i lati (per analogia con il caso precedente):

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{6}\, m_l\, l^2 \\
I_{22} &= I_{11} = \frac{1}{6}\, m_l\, l^2 \\
I_{12} &= -\frac{1}{12}\, m_l\, l^2
\end{aligned}
$$

Dobbiamo ora spostare gli elementi della matrice con il teorema di Huygens. Calcoliamo pertanto il centro di massa P_0 del triangolo CDE nel sistema con gli assi lungo i lati.

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\sigma}{m_l}\int_0^l dx \int_0^{l-x} dy\, x = \frac{2}{l^2}\int_0^l dx\, x\,(l-x) = \frac{2}{l^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) l^3 = \frac{1}{3}\, l \\
y_0 &= \frac{1}{3}\, l \qquad \text{(per simmetria)}
\end{aligned}$$

Quindi, nel sistema di riferimento della figura:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{6}\, m_l\, l^2 - m_l\, \frac{l^2}{9} + m_l\left(\frac{l}{3}+\frac{L-l}{2}\right)^2 = \frac{1}{18}\, m_l\, l^2 + m_l\left(\frac{L}{2}-\frac{l}{6}\right)^2 \\
I_{22} &= I_{11} \\
I_{12} &= -\frac{1}{12}\, m_l\, l^2 + m_l\, \frac{l^2}{9} - m_l\left(\frac{L}{2}-\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}\, m_l\, l^2 - m_l\left(\frac{L}{2}-\frac{l}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

Sottraendo otteniamo i valori per la figura:

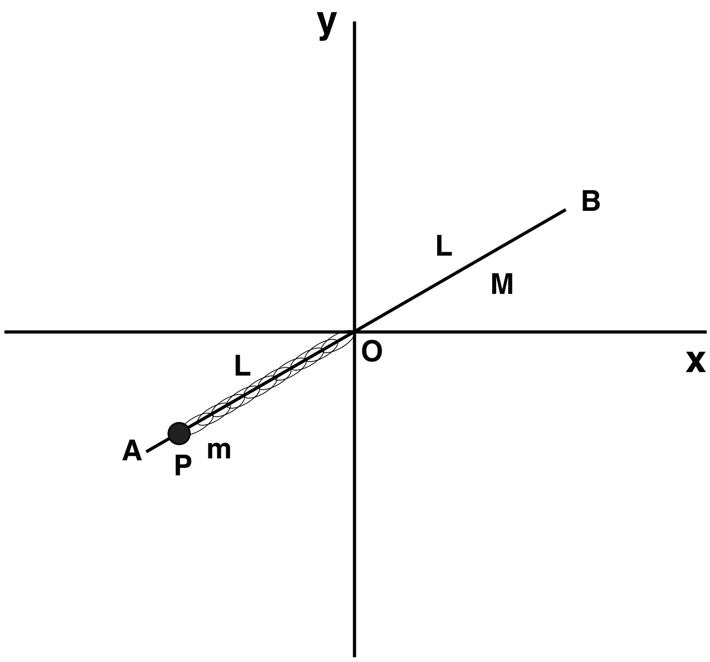
$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{6}\, m_L\, L^2 - \frac{1}{18}\, m_l\, l^2 - m_l\left(\frac{L}{2}-\frac{l}{6}\right)^2 \\
I_{22} &= I_{11} \\
I_{12} &= -\frac{1}{12}\, m_L\, L^2 - \frac{1}{36} m_l\, l^2 + m_l\left(\frac{L}{2}-\frac{l}{6}\right)^2 \\
I_{33} &= I_{11} + I_{22} = 2\, I_{11}
\end{aligned}$$

3. Un sistema materiale, che si muove nel un piano verticale $O(x,y)$, è costituito da un punto P di massa m, libero di scorrere senza attrito su un'asta non omogenea AB di lunghezza $2\,L$ e massa $3\,M$, il cui punto medio O è fisso nell'origine. La massa dell'asta è distribuita in modo che la parte OB abbia massa doppia rispetto ad AO. L'asta è inoltre libera di ruotare attorno ad O. Dopo aver individuato il numero di gradi di libertà ed introdotto le coordinate lagrangiane, calcolare le configurazioni di equilibrio usando le equazioni cardinali della statica.

Soluzione. I gradi di libertà sono due; siano s e φ le coordinate lagrangiane, con s la distanza di P da O (positiva quando P sta dalla parte opposta del cerchio) e φ l'angolo che la guida forma con l'asse x.

È evidente che la massa di AO è pari ad M, mentre la massa di OB è pari a $2\,M$. Sul punto P agiscono la forza peso $-m\,g\,\widehat{\mathbf{k}}$, la forza della molla $\mathbf{F}_k$ e la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_P$ diretta ortogonalmente alla guida. Sull'asta agiscono la forza peso $-M\,g\,\widehat{\mathbf{k}}$, la reazione vincolare in O, Φ_O e la reazione del punto sulla guida $-\boldsymbol{\Phi}_P$. Equazioni da risolvere:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_P &= 0 \\
\mathbf{R}_{asta} &= 0 \\
\mathbf{M}_{asta}(O) &= 0
\end{aligned}$$



Ovvero:

$$
\begin{aligned}
&-m\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + k\,s\,(\widehat{\mathbf{i}}\cos\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\sin\varphi) + \boldsymbol{\Phi}_P = 0\\
&-M\,g\,\widehat{\mathbf{j}} - \boldsymbol{\Phi}_P + \boldsymbol{\Phi}_O = 0\\
&-2\,M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\varphi + M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\varphi + s\,\Phi_P = 0 \qquad \text{ovvero}\\
&-M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\varphi + s\,\Phi_P = 0
\end{aligned}
$$

Abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}_P = \Phi_P\,(-\widehat{\mathbf{i}}\sin\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\cos\varphi)\\
&\boldsymbol{\Phi}_O = \Phi_x\,\widehat{\mathbf{i}} + \Phi_y\,\widehat{\mathbf{j}}
\end{aligned}
$$

Equazioni da risolvere:

$$
\begin{aligned}
&k\,s\,\cos\varphi - \Phi_P\,\sin\varphi = 0\\
&-m\,g + k\,s\,\sin\varphi + \Phi_P\,\cos\varphi = 0\\
&\boldsymbol{\Phi}_O = M\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + \boldsymbol{\Phi}_P\\
&s\,\Phi_P = M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\varphi
\end{aligned}
$$

Dalle prime due e dalla quarta abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&ks - mg\,\sin\varphi = 0\\
&\Phi_P = m\,g\,\cos\varphi\\
&m\,g\,s\,\cos\varphi = M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\varphi
\end{aligned}
$$

Ovvero

$$
\left(m\,s - M\,\frac{L}{2}\right)\cos\varphi = 0
$$

Quindi, o è 1) $\cos\varphi = 0$ o è 2) $ML/2 - ms = 0$.

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \cos\varphi = 0, \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \\
&\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow ks - mg = 0, \qquad s = \frac{mg}{k} \\
&\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow ks + mg = 0, \qquad s = -\frac{mg}{k}
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma_1 = \left(\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Gamma_2 = \left(-\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&2) \quad ML/2 - ms = 0 \to s = \frac{ML}{2m} \\
&\sin\varphi = k\,\frac{ML}{2m^2 g} \Rightarrow \varphi = \varphi_0, \pi - \varphi_0 \\
&\text{con} \qquad \varphi_0 = \sin^{-1}\frac{MkL}{2m^2 g}.
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma_3 = \left(\frac{ML}{2m}, \varphi_0\right) \qquad \Gamma_4 = \left(\frac{ML}{2m}, \pi - \varphi_0\right)
$$

Γ_3 e Γ_4 esistono a condizione che $MkL/(2m^2 g) < 1$.