Università Politecnica delle Marche

Facoltà di Ingegneria

Scuola di Dottorato

Curriculum in Architettura, Costruzioni e Strutture

Corso di FISICA-MATEMATICA

Docente: Prof. Lucio Demeio

`demeio@mta01.univpm.it, http://www.dipmat.univpm.it/ ˜ demeio/`

Dipartimento di Scienze Matematiche

L'OSCILL. ARMONICO

Oscill. armonico semplice: $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$

Oscillazioni armoniche:

$$u(t) = A\,\cos\omega_0 t + B\,\sin\omega_0 t$$

$$u(t) = a\,\cos(\omega_0 t + \beta)$$

Oscill. armonico smorzato: $\boxed{\ddot{u} + 2\,\varepsilon\dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$

Oscillazioni armoniche smorzate:

$$u(t) = a\,e^{-\varepsilon t}\,\cos(\nu\,t + \beta)$$

$\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$ supponiamo $\omega_0^2 > \varepsilon^2$

TERMINI SECOLARI

Oscillazioni armoniche smorzate: $u(t) = a\, e^{-\varepsilon t}\, \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}\, t + \beta)$

Sviluppando:

$$u(t) = a\, \Big\{ \cos(t+\beta) - \boxed{\varepsilon\, t}\, \cos(t+\beta) + \frac{1}{2}\, \boxed{\varepsilon^2\, t}\, [\sin(t+\beta) + t\, \cos(t+\beta)] \Big\}$$

I termini $\sim \varepsilon\, t$, $\sim \varepsilon^2\, t^2$, ..., crescono illimitatamente nel tempo (mentre la soluzione esatta è limitata) e vengono detti termini secolari. Il loro insorgere nelle soluzioni perturbative le rende invalide su tempi dell'ordine di $t \sim \varepsilon^{-1}$. Molta parte dei metodi perturbativi consiste nello studio di metodologie *particolari* per evitarli.

Termini secolari

Oscill. armonico forzato: $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = F \cos \mu\, t}$

Oscillazioni armoniche forzate:

$$u_p(t) = \frac{F}{\omega_0^2 - \mu^2} \cos \mu\, t, \qquad \mu \neq \omega_0$$

$$u(t) = a \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{F}{\omega_0^2 - \mu^2} \cos \mu\, t$$

Per $\mu = \omega_0$ abbiamo invece $u_p(t) = F\, t \sin \mu\, t$, cioè la soluzione cresce illimitatamente nel tempo ed ha un andamento secolare. L'origine del termine secolare è diversa dal caso precedente: quando $\mu = \omega_0$ il termine noto è soluzione dell'omogenea associata. Quando ciò avviene, la soluzione particolare contiene sempre termini secolari.

L'OSCILL. ARM. SMORZATO

Oscill. armonico smorzato: $\boxed{\ddot{u} + 2\,\varepsilon \dot{u} + u = 0}$

Sviluppo peturbativo diretto: $\boxed{u(t) = u_0(t) + \varepsilon\, u_1(t) + \varepsilon^2\, u_2(t) + o(\varepsilon^2)}$

Sostituendo ed uguagliando a zero le potenze successive di ε otteniamo la gerarchia

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0$$
$$\ddot{u}_1 + u_1 = -2\,\dot{u}_0$$
$$\ddot{u}_2 + u_2 = -2\,\dot{u}_1$$

Le equazioni sono non omogenee, tranne la prima; l'omogenea associata è la stessa a tutti gli ordini

L'oscill. armonico smorzato

Soluzione all'ordine zero: $u_0(t) = a_0 \cos(t + \beta_0)$

Al prim'ordine: $\ddot{u}_1 + u_1 = 2\, a_0 \sin(t + \beta_0)$

Soluzione: $u_1(t) = a_1 \cos(t + \beta_1) - a_0\, t \cos(t + \beta_0)$

Soluzione perturbativa:

$$u(t) = a_0 \cos(t + \beta_0) + a_1\, \varepsilon \cos(t + \beta_1) - a_0\, \varepsilon\, t \cos(t + \beta_0) + o(\varepsilon)$$

Sono presenti termini secolari

SCALE MULTIPLE

Oscill. armonico smorzato: $\ddot{u} + 2\,\varepsilon\dot{u} + u = 0$

Nella soluzione perturbativa compaiono sia t che $\varepsilon\,t$. Questo suggerisce di trattare t ed $\varepsilon\,t$ come variabili indipendenti.

Introduciamo allora la nuova variabile temporale $\boxed{\tau = \varepsilon t}$

ed il nuovo sviluppo peturbativo $\boxed{u(t) = u_0(t,\tau) + \varepsilon\, u_1(t,\tau) + o(\varepsilon)}$

Abbiamo per le derivate:

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial \tau}$$

Scale multiple

E dunque:

$$\dot{u}(t) = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon\,\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \varepsilon\,\frac{\partial u_1}{\partial t} + o(\varepsilon)$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \varepsilon\,\left(2\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\,\partial \tau} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right) + o(\varepsilon)$$

Sostituendo:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + u_0 + \varepsilon\,\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 + 2\,\frac{\partial u_0}{\partial t} + 2\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\,\partial \tau}\right) + o(\varepsilon) = 0$$

Gerarchia di equazioni

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + u_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 = -2\,\frac{\partial u_0}{\partial t} - 2\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\,\partial \tau}$$

Scale multiple

Soluzione all'ordine zero:

$$u_0(t,\tau) = A_0(\tau)\, e^{it} + A_0^*(\tau)\, e^{-it}$$

Al prim'ordine

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 = -2\,i\,\left[(A_0 + A_0')\; e^{it} - \left(A_0^* + A_0^{*\prime}\right)\; e^{-it}\right]$$

I termini proporzionali ad e^{it} ed e^{-it} danno luogo a comportamenti secolari e li dobbiamo eliminare

$$\boxed{A_0 + A_0' = 0}$$

Scale multiple

Soluzione

$$A_0(\tau) = A_0(0)\, e^{-\tau}$$

In rappresentazione polare: $\quad A_0(\tau) = R_0\, e^{i\theta_0}\, e^{-\tau}$

Ripristinando le variabili di partenza

$$u(t) = 2\, R_0\, e^{-\varepsilon\, t}\, \cos(t + \theta_0) + o(\varepsilon)$$

La soluzione al prim'ordine è solo servita a sistemare quella all'ordine zero la soluzione perturbativa contiene l'effetto dello smorzamento ma non dello spostamento in frequenza

EQUAZIONE DI DUFFING

$$\boxed{\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0}$$

Analisi qualitativa: $y_1 = u$, $y_2 = \dot{u}$

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = -y_1 - \varepsilon\, y_1^3$$

Moltiplicando la prima per y_1 e la seconda per y_2 e sommando abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left(y_1^2 + y_2^2 + \varepsilon\,\frac{y_1^4}{4}\right) = 0$$

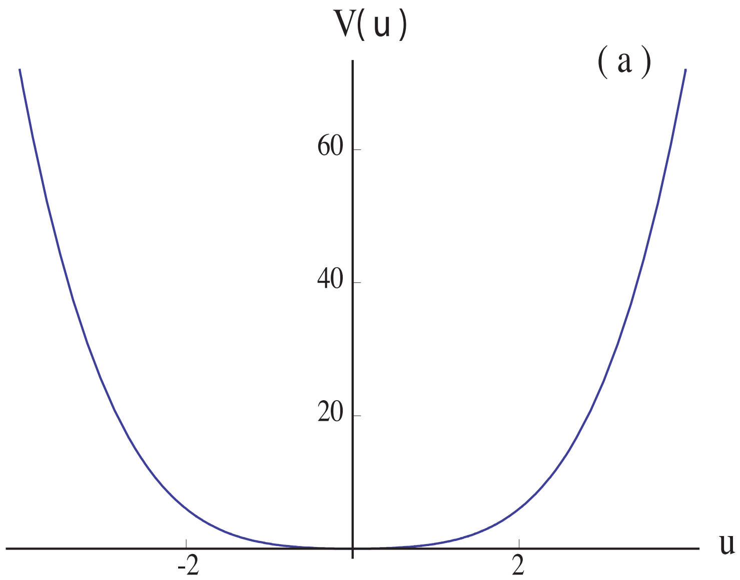
ovvero

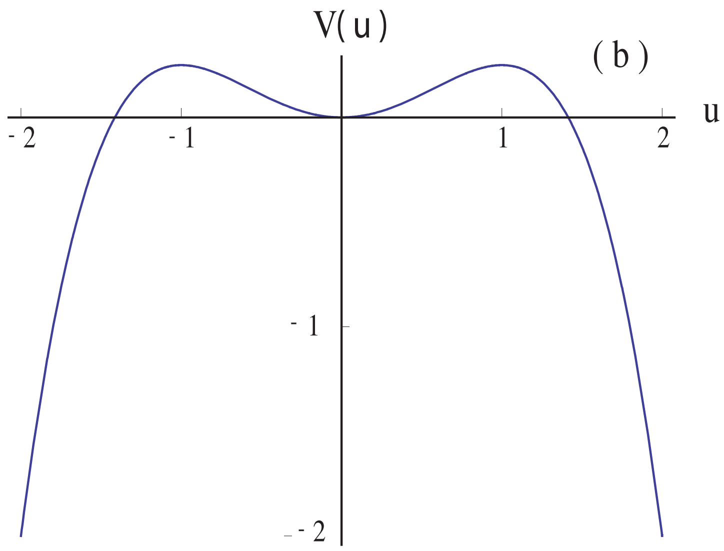
$$E = y_1^2 + y_2^2 + \varepsilon\,\frac{y_1^4}{4} = cost.$$

Equazione di Duffing

Analogia con il moto di un punto materiale sottoposto ad un potenziale

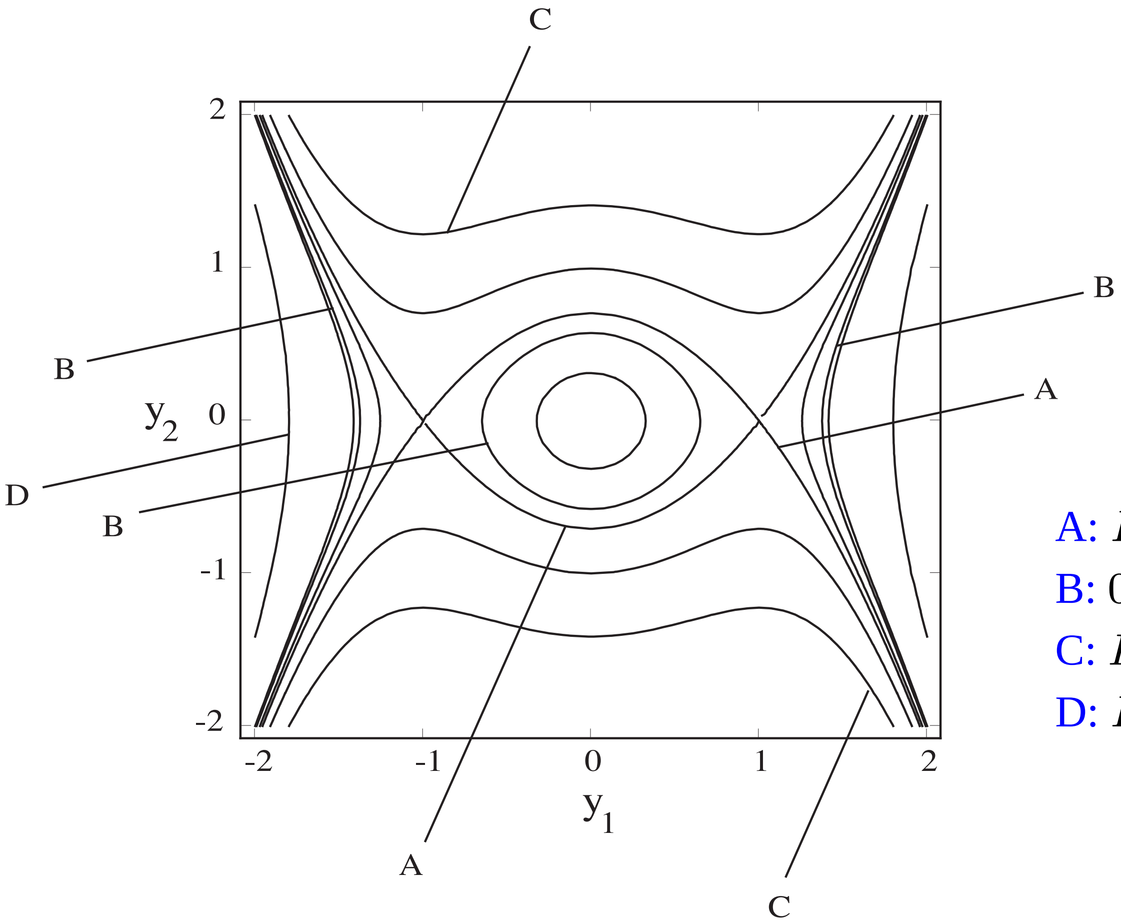
$$V(u) = \frac{u^2}{2} + \varepsilon \frac{u^4}{4} \qquad \left(E_0 = -\frac{1}{4\,\varepsilon} \right)$$





Equazione di Duffing

Orbite di fase



A: $E = E_0$ separatrici

B: $0 < E < E_0$ due rami, uno chiuso uno aperto

C: $E > E_0$ orbite aperte

D: $E < 0$ due rami aperti

Sviluppo diretto

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon\, u_1(t) + \varepsilon^2\, u_2(t) + o(\varepsilon^2)$$

Sostituendo

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 = 0$$

Soluzione all'ordine zero $\quad u_0(t) = a_0\, \cos(t + \beta_0)$

All'ordine uno $\quad \ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{a_0^3}{4}\, [\cos 3\,(t+\beta_0) + 3\, \cos(t+\beta_0)]$

$$u_1(t) = a_1\, \cos(t+\beta_1) + \frac{a_0^3}{8}\left[\frac{1}{4}\, \cos 3\,(t+\beta_0) - 3\,t\, \cos(t+\beta_0)\right]$$

$$u(t) = a_0\, \cos(t+\beta_0) + \varepsilon\, \Big\{a_1\, \cos(t+\beta_1) + \frac{a_0^3}{8}\left[\frac{1}{4}\, \cos 3\,(t+\beta_0) - 3\,t\, \cos(t+\beta_0)\right]\Big\} + o(\varepsilon^2)$$

Scale multiple: equazioni

$$u(t) = u_0(t,\tau) + \varepsilon\, u_1(t,\tau) + o(\varepsilon)$$

Sostituendo

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + u_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 = -2\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} - u_0^3$$

$$u_0(t,\tau) = A_0(\tau)\, e^{it} + A_0^*(\tau)\, e^{-it}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 = \left(-2\, i\, A_0' + 3\, A_0^2\, A_0^*\right) e^{it} - A_0^3\, e^{3\,i\,t} + c.c.$$

Eliminazione termini secolari: $\boxed{-2\, i\, A_0' + 3\, A_0^2\, A_0^* = 0}$

Scale multiple: soluzione

$$A_0(\tau) = R(\tau)\, e^{i\,\Theta(\tau)},$$

$$u_0(t,\tau) = R(\tau)\, e^{i\,(t+\Theta(\tau))} + c.c$$

e quindi, posto $\tau = \varepsilon\, t$,

$$\boxed{u(t) = 2\, R_0\, \cos\left[\left(1 + \tfrac{3}{2}\,\varepsilon\, R_0^2\right) t + \Theta_0\right]}$$