Università Politecnica delle Marche

Facoltà di Ingegneria

Scuola di Dottorato

Curriculum in Architettura, Costruzioni e Strutture

Corso di FISICA-MATEMATICA

Docente: Prof. Lucio Demeio

`demeio@mta01.univpm.it`, `http://www.dipmat.univpm.it/ ˜ demeio/`

Dipartimento di Scienze Matematiche

ORARI

Martedi' 28 aprile	8.45-11.30
Martedi' 5 maggio	8.45-11.30
Martedi' 12 maggio	8.45-11.30
Venerdi' 15 maggio	8.45-11.30
Martedi' 19 maggio	8.45-11.30
Venerdi' 22 maggio	8.45-11.30
Martedi' 26 maggio	8.45-11.30
Venerdi' 29 maggio	8.45-11.30

Skype: fismat_dott

NOTE INTRODUTTIVE

- Oggetto del corso sono i **metodi perturbativi**, a partire dalle equazioni algebriche fino alle equazioni differenziali.

Modellazione matematica → equazioni

Le equazioni (algebriche, differenziali, funzionali, integrali) governano il comportamento dei parametri caratteristici del sistema che vogliamo descrivere in funzione di variabili indipendenti quali tempo, spazio, velocità, energia od altro

- Soluzioni analitiche, “a mano”
- Soluzioni numeriche
- Soluzioni approssimate o perturbative

I metodi perturbativi sono una collezione di tecniche e metodologie rigorose per determinare soluzioni approssimate di equazioni in presenza di un parametro piccolo. Spesso la soluzione perturbativa riproduce le caratteristiche salienti del fenomeno che si sta descrivendo e fornisce una base di partenza per un approccio numerico.

Fondamenti matematici: analisi asintotica, sviluppi asintotici, equivalenze asintotiche, successioni asintotiche

UN ESEMPIO IMPORTANTE

Oscillatore armonico: $m\,\ddot{x} + k\,x = 0$

Soluzione: $x(t) = A\,\cos\omega t + B\,\sin\omega t$
$\omega = \sqrt{k/m}$

L’equazione per un sistema massa-molla sottintende alcune ipotesi, tra cui le più importanti sono che la forza elastica esercitata dalla molla sia proporzionale allo spostamento (molla perfettamente elastica) e che il moto avvenga nel vuoto.

Equazione di Duffing: $m\,\ddot{x} + k\,x + \alpha\,x^3 = 0$

Se la correzione non-lineare è piccola, ci aspettiamo dunque di trovare una soluzione data da un'oscillazione armonica più una correzione.

Osc. armonico smorzato: $m\,\ddot{x} + 2\,\lambda\dot{x} + k\,x = 0$

L'equazione possiede una soluzione in forma chiusa, e quindi non necessita di una soluzione perturbativa. Tuttavia, in questo caso come in altri, calcoleremo ugualmente la soluzione perturbativa, allo scopo di illustrare i concetti e le metodologie.

ADIMENSIONALIZZAZIONE

Per applicare i metodi perturbativi dobbiamo innanzitutto individuare un parametro piccolo, ε, rispetto al quale impostare la nostra analisi asintotica. Tale parametro deve rappresentare il rapporto tra due grandezze fisiche omogenee per poterle confrontare. È quindi necessario, come primo passo, riscrivere l'equazione in esame in forma adimensionale.

Esempio: Osc. arm. smorzato

$$m\,\ddot{x} + 2\,\lambda\dot{x} + kx = 0$$
$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

Introduciamo la frequenza $\omega = \sqrt{k/m}$ ed il tempo di smorzamento $\tau = m/\lambda$

$$\ddot{x} + 2\,\frac{\dot{x}}{\tau} + \omega^2 x = 0.$$

Se lo smorzamento è piccolo, il sistema compie molte oscillazioni prima che l'ampiezza sia scesa in misura significativa. Diremo allora che **l'oscillazione armonica è dominante rispetto allo smorzamento** .

In questo caso conviene introdurre come variabile temporale adimensionale la grandezza $t' = \omega t$

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + \frac{2}{\omega\tau}\frac{dx}{dt'} + x = 0.$$

Nell'ipotesi di smorzamento debole, $\omega\tau >> 1$; poniamo dunque $\varepsilon = 1/(\omega\tau)$. Infine, introduciamo anche $x' = x/x_0$.

L'equazione dell'oscillatore armonico smorzato si può dunque scrivere nella forma

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} + 2\,\varepsilon\,\frac{dx'}{dt'} + x' = 0$$

$$x'(0) = 1 \qquad v'(0) = v_0/(x_0\omega) \equiv \mu$$

L'equazione scritta sopra, con le condizioni iniziali date, si dice che è scritta in **forma universale**; la soluzione dipende solo dai due parametri (adimensionali) ε e μ.

Esempio: Equazione di Duffing

$$m\,\ddot{x} + k\,x + \alpha\,x^3 = 0$$

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

Introduciamo la frequenza $\omega = \sqrt{k/m}$, le variabili adimensionali $t' = \omega t$ e $x' = x/x_0$ ed $\varepsilon = \alpha x_0^2/k$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} + x' + \varepsilon\,x'^3 = 0$$

$$x'(0) = 1 \qquad v'(0) = v_0/(x_0\omega) \equiv \mu$$

Equazione di Duffing in **forma universale**

Esempio: Resistenza dell'aria

$$m\ddot{z} - \lambda\dot{z} = -mg$$
$$z(0) = h \qquad \dot{z}(0) = v_0$$

Introduciamo il tempo di smorzamento $\tau = m/\lambda$ ed il tempo della caduta $T_g = \sqrt{h/g}$, le variabili adimensionali $t' = t/T_g$ e $z' = z/h$, $\mu = v_0 T_g/h$ e $\varepsilon = T_g/\tau$

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} - \varepsilon\frac{dz'}{dt'} + 1 = 0$$
$$z(0) = 1 \qquad \dot{z}(0) = \mu$$

Equazione della caduta dei gravi in **forma universale**

RELAZIONI ASINTOTICHE

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che esistano

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Si dice che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$f(x) \sim g(x), \qquad x \to x_0.$$

Funzioni infinitesime

Siano $f(\varepsilon)$ e $g(\varepsilon)$ due funzioni infinitesime per $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f(\varepsilon) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} g(\varepsilon) = 0.$$

Avremo nuovamente

$$f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon), \qquad \varepsilon \longrightarrow 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1.$$

Per esempio:

$$\sin\varepsilon \sim \varepsilon \quad \cos\varepsilon - 1 \sim -\frac{\varepsilon^2}{2} \quad e^{\varepsilon} - 1 \sim \varepsilon \quad \ln(1+\varepsilon) \sim \varepsilon,$$

per $\varepsilon \longrightarrow 0$

Funzioni infinite

Siano $f(\varepsilon)$ e $g(\varepsilon)$ due funzioni infinite per $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon) = \infty.$$

Avremo nuovamente

$$f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1.$$

Per esempio:

$$\frac{1}{\sin \varepsilon} \sim \frac{1}{\varepsilon} \qquad \frac{1}{e^{\varepsilon} - 1} \sim \frac{1}{\varepsilon} \qquad \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \sim \frac{1}{\varepsilon},$$

per $\varepsilon \to 0$

Il simbolo di "o piccolo"

Siano $f(\varepsilon)$ e $g(\varepsilon)$ due funzioni infinitesime per $\varepsilon \longrightarrow 0$.
Diremo che f è un "o piccolo" di g se

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0$$

e scriveremo in tal caso $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)), \quad \varepsilon \longrightarrow 0$,
o anche $f(\varepsilon) << g(\varepsilon), \quad \varepsilon \longrightarrow 0$.

Ad esempio,

$$\varepsilon^2 = o(\varepsilon) \qquad \sin \varepsilon = o(\sqrt{\varepsilon}) \qquad \sin^2(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Serve a confrontare la "velocità con cui due funzioni tendono a zero

SERIE DI TAYLOR

Le equivalenze asintotiche si possono determinare tramite gli sviluppi di Taylor delle funzioni in esame.

$$
\begin{aligned}
e^{\varepsilon} &= 1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^3}{3!}+\frac{\varepsilon^4}{4!}+o(\varepsilon^4)\\
\sin\varepsilon &= \varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{3!}+\frac{\varepsilon^5}{5!}+o(\varepsilon^5)\\
\cos\varepsilon &= 1-\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^4}{4!}+o(\varepsilon^4)\\
\ln(1+\varepsilon) &= \varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}-\frac{\varepsilon^4}{4}+o(\varepsilon^4)\\
\sqrt{1+\varepsilon} &= 1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+\frac{\varepsilon^3}{16}-\frac{5\,\varepsilon^4}{128}+o(\varepsilon^4)\\
\frac{1}{1+\varepsilon} &= 1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\varepsilon^4+o(\varepsilon^4)\\
\frac{1}{1-\varepsilon} &= 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+o(\varepsilon^4).
\end{aligned}
$$

Per esempio: $\sin\varepsilon \sim \varepsilon$, $\qquad \sin\varepsilon-\varepsilon \sim -\varepsilon^3/(3!), \qquad \varepsilon \to 0$

SERIE ASINTOTICHE

Serie di Taylor: all'interno del cerchio di convergenza la serie converge ed il suo valore è uguale al valore della funzione nel punto. Troncando la serie di Taylor, all'interno della regione di convergenza, la bontà dell'approssimazione è tanto migliore quanto

- più elevato è il numero di termini che consideriamo e
- più vicini sono i valori della variabile al punto dello sviluppo.

Serie asintotica: si può pensare come una generalizzazione delle serie di Taylor. Non si richiede la convergenza della serie e quindi si considera soltanto il secondo criterio; può allora succedere che aumentando il numero di termini la bontà dell'approssimazione venga deteriorata.

SERIE ASINTOTICHE

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno di x_0. Diremo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ è la serie asintotica della funzione $f(x)$ per $x \to x_0$, e scriveremo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad x \to x_0$$

se, $\forall\, N > 0$, abbiamo che

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n \right| = o(|x-x_0|^N)$$

cioè se l'errore che si commette troncando la serie al termine di ordine N tende a zero più rapidamente dell'ultimo termine trattenuto. Da notare che non si richiede la convergenza della serie.

SERIE ASINTOTICHE

$$a_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$a_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0}$$

$$a_2 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

$$\ldots$$

$$a_k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n (x - x_0)^n}{(x - x_0)^k}$$

Quando esiste la serie di Taylor per la funzione, allora essa è pure la sua serie asintotica, sempre nel limite $x \to x_0$.

SUCCESSIONI ASINT.

Ad esempio, $f(\varepsilon) = \sin\sqrt{\varepsilon}$ ammette uno sviluppo asintotico nelle potenze di $\sqrt{\varepsilon}$ o, se si preferisce, nelle potenze frazionarie di ε. Questo ci porta a definire il concetto di successione asintotica. Una successione di funzioni, $\{\delta_n(\varepsilon)\}$, $n = 0, 1, ..,$ si dice asintotica se

$$\delta_n(\varepsilon) = o(\delta_{n-1}(\varepsilon))$$

per ogni n.

SUCCESSIONI ASINT.

Diremo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \delta_n(\varepsilon)$ rappresenta uno sviluppo asintotico per $f(\varepsilon)$,

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \delta_n(\varepsilon), \qquad \varepsilon \longrightarrow 0$$

se e solo se

$$a_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)}$$

$$a_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon) - a_0 \, \delta_0(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}$$

$$a_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon) - a_0 \, \delta_0(\varepsilon) - a_1 \, \delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)}$$

$$\ldots$$

$$a_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n \, \delta_n(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)}$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE

$x^2 - 5\,x + 6 = 0$ soluzioni: $x_1 = 2$ ed $x_2 = 3$

$x^2 - (5 + \varepsilon)\,x + 6 = 0$ soluzioni: $x_{1,2}(\varepsilon) = (5 + \varepsilon \pm \sqrt{\Delta(\varepsilon)})/2$

$x^2 - 5\,x + 6 = 0$: equazione non perturbata $-\varepsilon\,x$: perturbazione

Perturbazione regolare, perchè il termine di perturbazione non altera il grado dell'equazione non perturbata

SVILUPPO PERT. DIRETTO

Ricordando che $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + o(\varepsilon^2)$

$$x_1(\varepsilon) = 2 - 2\,\varepsilon + 6\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$
$$x_2(\varepsilon) = 3 + 3\,\varepsilon - 6\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

Sono le soluzioni dell'equazione perturbata corrette al second'ordine in ε.

Come ricavare queste espressioni senza conoscere la soluzione?

Sviluppo perturbativo diretto: $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^2)$

SOL. PERTURBATIVA

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$x_0^2 - 5\,x_0 + 6 + (2\,x_0 x_1 - 5\,x_1 - x_0)\,\varepsilon$$
$$+(x_1^2 + 2\,x_0\,x_2 - 5\,x_2 - x_1)\varepsilon^2 + \ldots = 0$$

Uguagliando separatamente a zero i coefficienti delle potenze successive di ε otteniamo la gerarchia di equazioni

$$x_0^2 - 5\,x_0 + 6 = 0$$
$$2\,x_0 x_1 - 5\,x_1 - x_0 = 0$$
$$x_1^2 + 2\,x_0\,x_2 - 5\,x_2 - x_1 = 0$$

Soluzione perturbativa

La prima di queste equazioni fornisce due valori per x_0, $x_0^{(1)} = 2$ ed $x_0^{(2)} = 3$. In corrispondenza a ciascuno di questi due valori, la seconda equazione ci dà la soluzione per x_1, vale a dire $x_1^{(1)} = -2$ e $x_1^{(2)} = 3$. Procedendo, otteniamo $x_2^{(1)} = 6$ e $x_2^{(2)} = -6$. Dunque:

$$
\begin{aligned}
x^{(1)}(\varepsilon) &= 2 - 2\,\varepsilon + 6\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\
x^{(2)}(\varepsilon) &= 3 + 3\,\varepsilon - 6\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

Otteniamo così le espressioni già determinate per altra via. Questa metodologia di soluzione è detta metodo perturbativo per risolvere tale equazione e le soluzioni così ottenute sono dette soluzioni perturbative dell'equazione.

ESEMPIO DI 3. GRADO

$$x^3 - 3\,x^2 + 2\,x + \varepsilon = 0$$

Procediamo come prima con lo sviluppo perturbativo diretto ed otteniamo la gerarchia

$$2\,x_0 - 3\,x_0^2 + x_0^3 = 0$$

$$1 + (2 - 6\,x_0 + 3\,x_0^2)\,x_1 = 0$$

$$3\,(x_0 - 1)\,x_1^2 + (2 - 6\,x_0 + 3\,x_0^2)\,x_2 = 0$$

ESEMPIO DI 3. GRADO

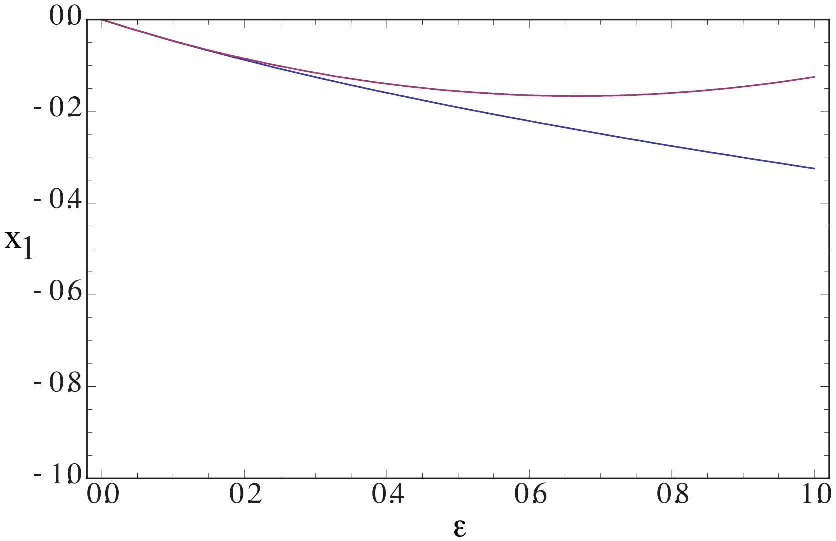
Soluzioni della gerarchia:

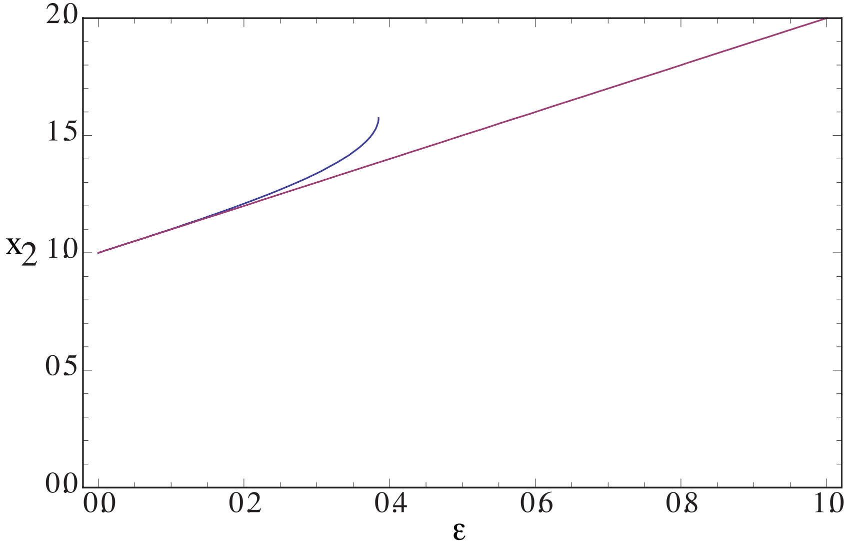
$$
\begin{aligned}
&x_0^{(1)} = 0 \qquad && x_1^{(1)} = -\frac{1}{2} \qquad && x_2^{(1)} = \frac{3}{8} \\
&x_0^{(2)} = 1 \qquad && x_1^{(2)} = 1 \qquad && x_2^{(2)} = 0 \\
&x_0^{(3)} = 2 \qquad && x_1^{(3)} = -\frac{1}{2} \qquad && x_2^{(3)} = -\frac{3}{8},
\end{aligned}
$$

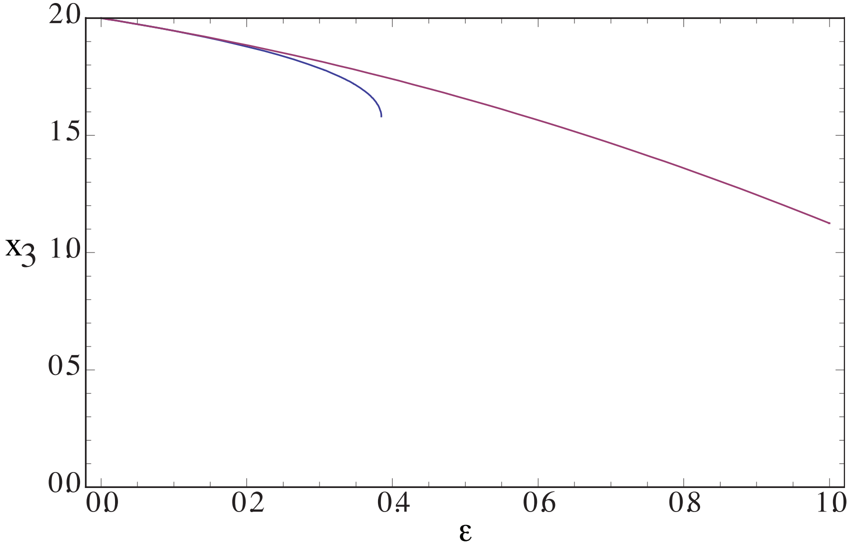
Soluzione perturbativa

$$
\begin{aligned}
x_1(\varepsilon) &= -\frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{3}{8}\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \\
x_2(\varepsilon) &= 1 + \varepsilon + o(\varepsilon^3) \\
x_3(\varepsilon) &= 2 - \frac{1}{2}\,\varepsilon - \frac{3}{8}\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

QUALCHE GRAFICO







ESPONENTE FRAZIONARIO

$$x^2 - (4 + \varepsilon)\, x + 4 = 0$$

Introduciamo lo sviluppo diretto $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^2)$

Ottenendo così la gerarchia

$$x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0$$
$$2x_1 x_0 - x_0 - 4x_1 = 0$$

Ma: $x_0 = 2$ dalla prima equazione, da cui segue $x_0 = 0$ dalla seconda: una contraddizione !!

Significato: Lo sviluppo perturbativo non vale !!

Achtung: L'equazione non perturbata è un quadrato perfetto

Bilancio dei termini dominanti

Nuovo sviluppo: $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\,\nu} x_2 + o(\varepsilon^{2\,\nu})$
con $0 < \nu < 1$.

Sostituendo otteniamo

$$\boxed{x_0^2 - 4\,x_0 + 4} - \varepsilon\, x_0 + \varepsilon^{\nu}(-4\,x_1 + 2\,x_0\,x_1) + \varepsilon^{1+\nu} x_1$$
$$+ \varepsilon^{2\nu}(x_1^2 - 4\,x_2 + 2\,x_0\,x_2) - \varepsilon^{1+2\,\nu} x_2$$
$$+ \varepsilon^{3\nu}(2\,x_1\,x_2 - 4\,x_3 + 2\,x_0\,x_3) - \varepsilon^{1+3\,\nu} x_3 + \ldots = 0$$

Come determinare la gerarchia?

Intanto, $\quad x_0^2 - 4\,x_0 + 4 = 0 \quad$ con soluzione $\boxed{x_0 = 2}$.

Bilancio dei termini dominanti

Sostituendo otteniamo

$$-2\,\varepsilon + \varepsilon^{1+\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_1^2 - \varepsilon^{1+2\,\nu} x_2 + 2\,\varepsilon^{3\nu} x_1\, x_2 - \varepsilon^{1+3\,\nu} x_3 + \ldots = 0.$$

Abbiamo inoltre, nel limite $\varepsilon \to 0$,

$$\varepsilon^{1+\nu} << \varepsilon, \qquad \varepsilon^{1+2\,\nu} << \varepsilon, \qquad \varepsilon^{1+3\,\nu} << \varepsilon, \qquad \varepsilon^{3\,\nu} << \varepsilon^{2\,\nu}.$$

Dunque, i termini $(-2\,\varepsilon)$ ed $(\varepsilon^{2\nu} x_1^2)$ dominano su tutti gli altri ed otteniamo la relazione asintotica

$$\boxed{-2\,\varepsilon + \varepsilon^{2\nu} x_1^2 \sim 0}$$

Bilancio dei termini dominanti

Affinchè questi due termini si bilancino, deve essere $\nu = 1/2$,
cioè lo sviluppo corretto è $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon^{1/2} x_1 + \varepsilon\, x_2 + o(\varepsilon^{3/2})$
ed in tal caso $x_1^2 = 2$ ottenendo

$$\begin{gathered} 4 - 4x_0 + x_0^2 + \varepsilon^{1/2}\,(-4\,x_1 + 2\,x_0\,x_1) + \varepsilon\,(-x_0 + x_1^2 - 4\,x_2 + 2\,x_0\,x_2) \\ +\varepsilon^{3/2}\,(-x_1 + 2\,x_1\,x_2 - 4\,x_3 + 2\,x_0\,x_3) + o(\varepsilon^2) = 0 \end{gathered}$$

da cui la gerarchia

$$\begin{aligned} &x_0^2 - 4\,x_0 + 4 = 0 \\ &-4\,x_1 + 2\,x_0\,x_1 = 0 \\ &2\,x_0\,x_2 - 4\,x_2 + x_1^2 - x_0 = 0 \end{aligned}$$

Bilancio dei termini dominanti

$$x_0^2 - 4\,x_0 + 4 = 0$$
$$-4\,x_1 + 2\,x_0\,x_1 = 0$$
$$2\,x_0\,x_2 - 4\,x_2 + x_1^2 - x_0 = 0$$

La prima equazione offre $x_0 = 2$, la seconda è identicamente soddisfatta. La terza dà $x_1^{(1)} = \sqrt{2}$ e $x_1^{(2)} = -\sqrt{2}$. Pertanto

$$x_1(\varepsilon) = 2 + \sqrt{2}\,\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2})$$
$$x_2(\varepsilon) = 2 - \sqrt{2}\,\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2})$$

ESEMPIO DI 3. GRADO

$$x^3 - (4+\varepsilon)\,x^2 + (5-2\,\varepsilon)\,x - 2 + \varepsilon^2 = 0$$

Equazione non perturbata:

$$x_0^3 - 4\,x_0^2 + 5\,x_0 - 2 = 0$$

Soluzione semplice $x = 2$, soluzione doppia $x = 1$

Sviluppo perturbativo diretto $\rightarrow$ soluzione perturbata vicina alla radice semplice

$$x_1(\varepsilon) = 2 + 8\,\varepsilon - 81\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

Con la radice doppia perveniamo ad una contraddizione

Bilancio dei termini dominanti

Abbiamo $\nu = 1/2$ e $x_1 = \pm i\sqrt{3}$.
Equazione successiva nella gerarchia

$$-4x_1 + x_1^3 - 2\,x_1\,x_2 = 0$$

che dà $x_2 = -7/2$ in corrispondenza ad entrambe le soluzioni trovate per x_1 In conclusione

$$x_2(\varepsilon) = 1 + i\sqrt{3\,\varepsilon} - \frac{7}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$x_3(\varepsilon) = 1 - i\sqrt{3\,\varepsilon} - \frac{7}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

PERT. SINGOLARI

$$\varepsilon x^2 + x + 1 = 0$$

Equazione non perturbata: $x + 1 = 0$ di primo grado, sol. $x = -1$
Equazione perturbata di secondo grado: perturbazione singolare

Uno sviluppo perturbativo semplice (anche con esponente frazionario) non funziona, o al massimo potrà darci una sola delle soluzioni

Via d'uscita: riscalare l'incognita:

$$y = \varepsilon^{\alpha} x$$

Inoltre, moltiplichiamo l'equazione per ε^{μ}

Pert. singolari

$$\varepsilon^{1-2\alpha+\mu}\, y^2 + \varepsilon^{\mu-\alpha}\, y + \varepsilon^{\mu} = 0$$

$$1 - 2\,\alpha + \mu = 0$$

$$\mu - \alpha \geq 0$$

$$\mu \geq 0$$

La soluzione è data da $\mu = 2\,\alpha - 1$, con $\alpha \geq 1$. Possiamo quindi scegliere $\alpha = \mu = 1$. L'equazione diventa

$$y^2 + y + \varepsilon = 0$$

Pert. singolari

$$y^2 + y + \varepsilon = 0$$

Soluzione perturbativa:

$$y_1(\varepsilon) = -\varepsilon - \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$
$$y_2(\varepsilon) = -1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

E quindi:

$$x_1(\varepsilon) = -1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$$
$$x_2(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \varepsilon + o(\varepsilon)$$

Da notare che $x_2(\varepsilon) \to \infty$ per $\varepsilon \to 0$.

ESEMPIO DI 3. GRADO

$$\varepsilon\, x^3 + x^2 - 5\, x + 6 = 0$$

Eq. non pert. $x^2 - 5\, x + 6 = 0$ sol. $x = 2$ e $x = 3$

Anche qui $y = \varepsilon^\alpha\, x$ e moltiplichiamo per ε^μ
Otteniamo $\alpha = 1$, $\mu = 2$

$$y^3 + y^2 - 5\, \varepsilon\, y + 6\, \varepsilon^2 = 0$$

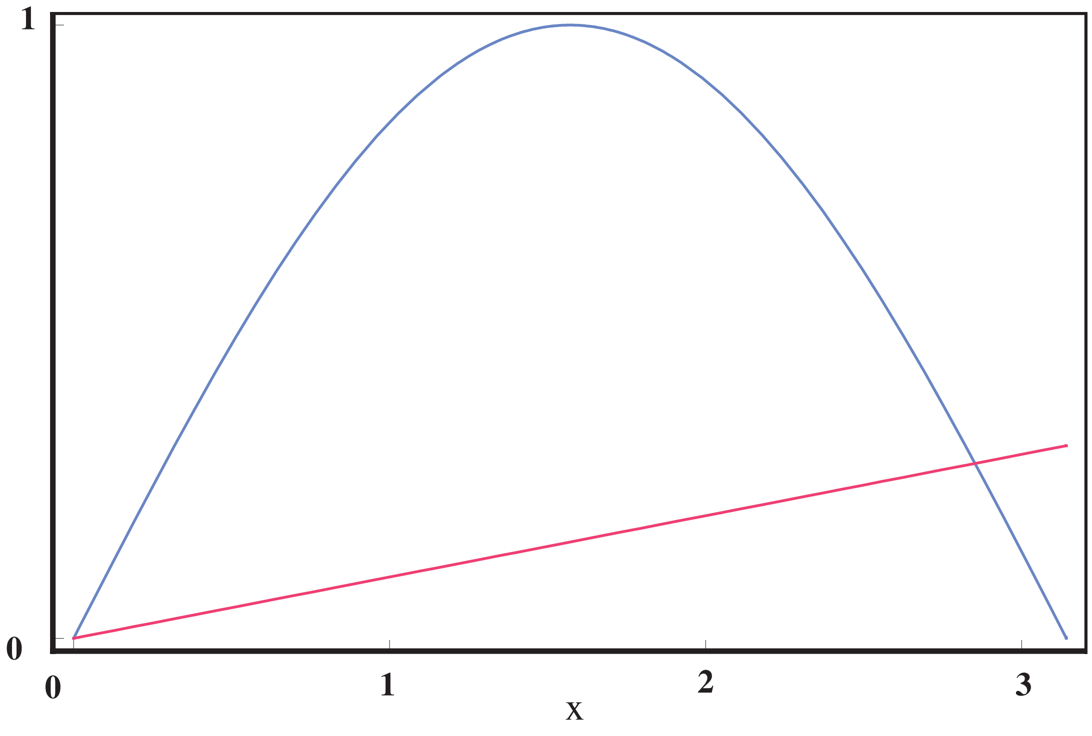
$$x_1(\varepsilon) = 2 + 8\, \varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$x_2(\varepsilon) = 3 - 27\, \varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$x_3(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - 5 + 19\, \varepsilon + o(\varepsilon)$$

EQ. TRASCENDENTI

$$\sin x - \varepsilon\, x = 0, \qquad 0 \le x \le \pi$$



Equazioni trascendenti

Sviluppo perturbativo diretto: $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^2)$

Sostituendo:

$$\sin\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^2)\right) - \varepsilon\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^2)\right) = 0.$$

Serie di Taylor

$$\sin x_0 + (x_1\ \cos x_0 - x_0)\,\varepsilon + \left(x_2\ \cos x_0 - \frac{1}{2}\,x_1^2\ \sin x_0 - x_1\right)\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = 0$$

Gerarchia

$$\sin x_0 = 0$$

$$x_1\ \cos x_0 - x_0 = 0$$

$$x_2\ \cos x_0 - (1/2)\,x_1^2\ \sin x_0 - x_1 = 0$$

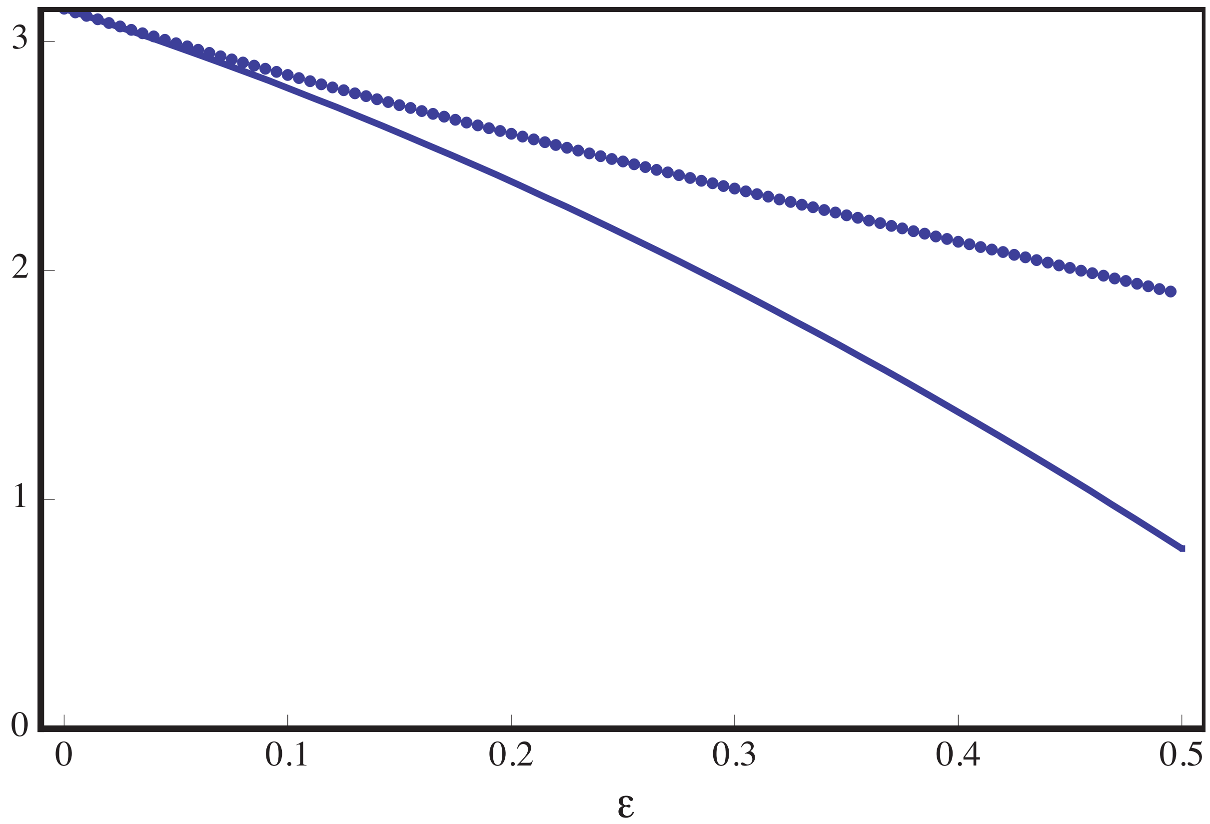
Equazioni trascendenti

Soluzioni della gerarchia:

$$x_0^{(1)} = 0 \qquad x_1^{(1)} = 0 \qquad x_2^{(1)} = 0$$
$$x_0^{(2)} = \pi \qquad x_1^{(2)} = -\pi \qquad x_2^{(2)} = -\pi$$

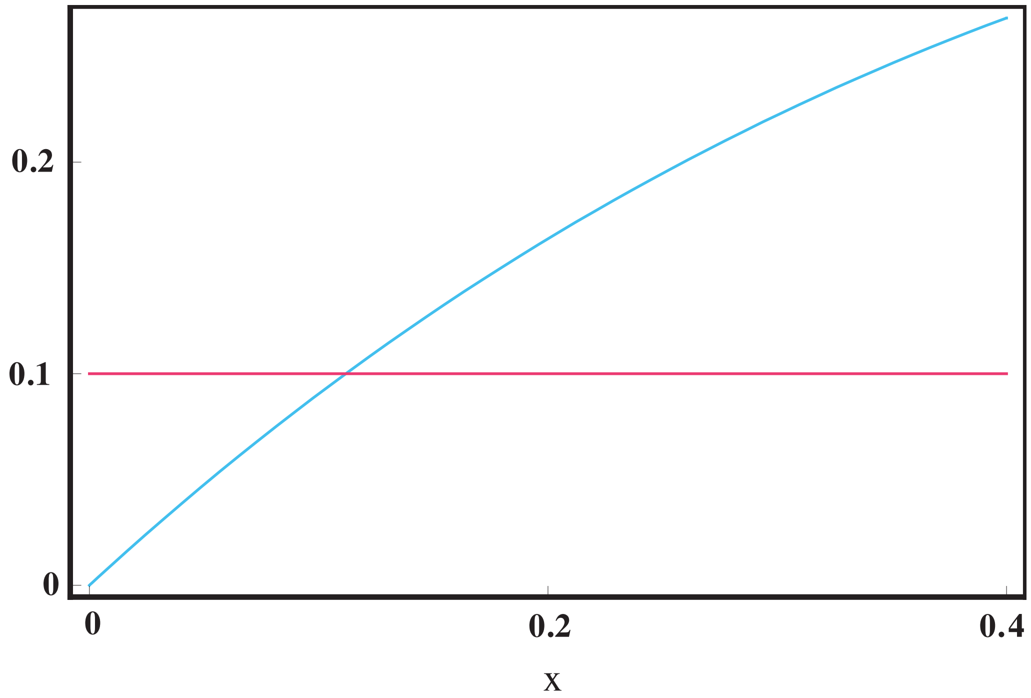
Soluzione perturbativa vicino ad $x = \pi$:

$$x(\varepsilon) = \pi - \pi\,\varepsilon - \pi\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = \pi\,(1 - \varepsilon - \varepsilon^2) + o(\varepsilon^2)$$


3
2
1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
ε

Ulteriore esempio

$$x\, e^{-x} = \varepsilon$$



Equazione non perturbata: $x\, e^{-x} = 0$ soluzione $x = 0$.

Ulteriore esempio

Con lo sviluppo perturbativo diretto

$$\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + o(\varepsilon^2)\right) e^{x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+o(\varepsilon^2)} = \varepsilon;$$

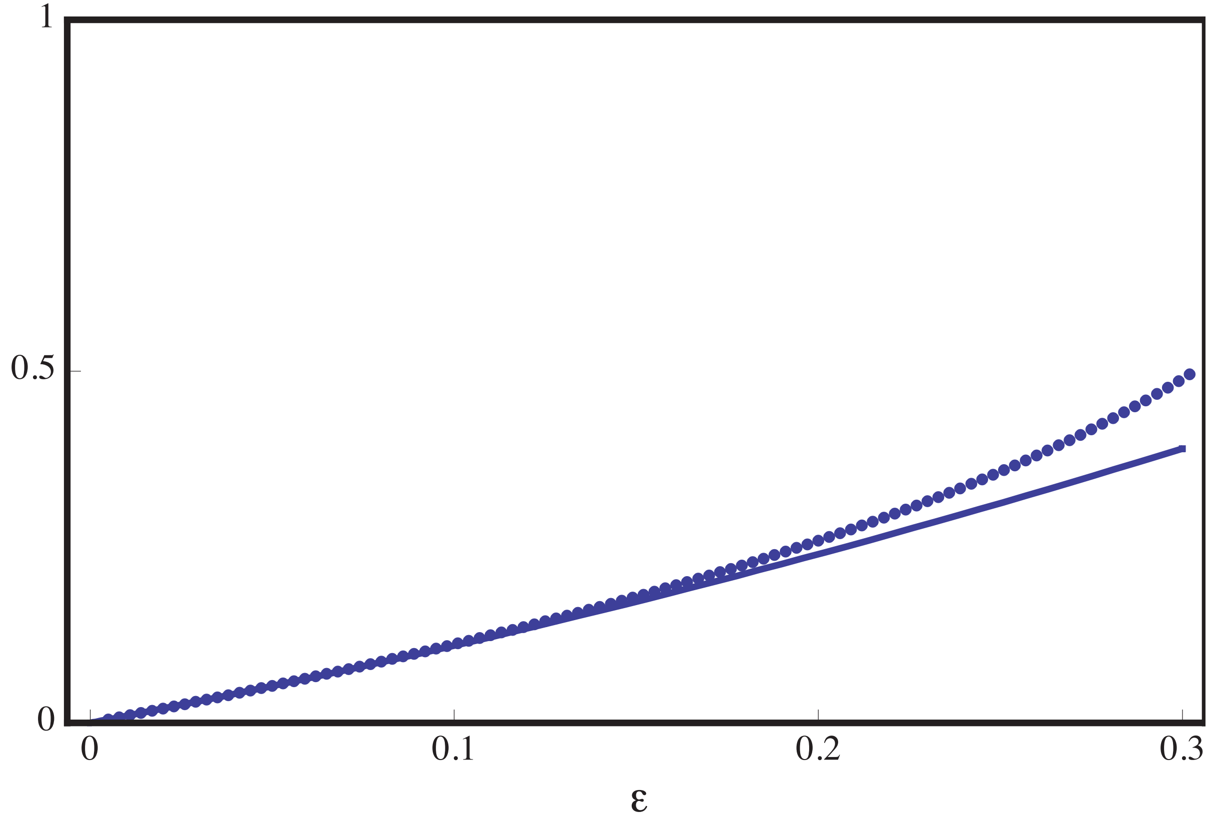
Serie di Taylor:

$$e^{-x_0}\left(x_0 - \left(e^{x_0} - x_1 + x_0\,x_1\right)\varepsilon + \frac{1}{2}\left(-2\,x_1^2 + x_0\,x_1^2 + 2\,x_2 - 2\,x_0\,x_2\right)\varepsilon^2 + \ldots\right) = 0$$

Gerarchia

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0 \\
&e^{x_0} - x_1 + x_0\,x_1 = 0 \\
&-2\,x_1^2 + x_0\,x_1^2 + 2\,x_2 - 2\,x_0\,x_2 = 0
\end{aligned}$$

Soluzione perturbativa: $x_0 = 0, \quad x_1 = x_2 = 1 \qquad x(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$


1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
ε