Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

Sede di Fermo

Corso di Calcolo Numerico

1 - INTRODUZIONE

Lucio Demeio
DIISM

Informazioni generali

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden,** *Numerical Analysis*, **Brooks/Cole, 9th Ed. 2009** (ma anche ...); A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.

Informazioni generali

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden,** ***Numerical Analysis*****, Brooks/Cole, 9th Ed. 2009** (ma anche ...); A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.
- Indirizzo e-mail: l.demeio@univpm.it

Informazioni generali

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden,** ***Numerical Analysis*****, Brooks/Cole, 9th Ed. 2009** (ma anche ...); A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.
- Indirizzo e-mail: l.demeio@univpm.it
- Sito web: pagina web ufficiale del docente sul sito d'ateneo;

Informazioni generali

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, 9th Ed. 2009** (ma anche ...); A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.
- Indirizzo e-mail: l.demeio@univpm.it
- Sito web: pagina web ufficiale del docente sul sito d'ateneo;
- Vedi anche il sito sul server dell'Area Matematica all'indirizzo

Informazioni generali

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden,** ***Numerical Analysis*****, Brooks/Cole, 9th Ed. 2009** (ma anche ...); A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.
- Indirizzo e-mail: l.demeio@univpm.it
- Sito web: pagina web ufficiale del docente sul sito d'ateneo;
- Vedi anche il sito sul server dell'Area Matematica all'indirizzo
- http://www.dipmat.univpm.it/∼demeio/didattica

Informazioni generali

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden,** ***Numerical Analysis*****, Brooks/Cole, 9th Ed. 2009** (ma anche ...); A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.
- Indirizzo e-mail: l.demeio@univpm.it
- Sito web: pagina web ufficiale del docente sul sito d'ateneo;
- Vedi anche il sito sul server dell'Area Matematica all'indirizzo
- http://www.dipmat.univpm.it/∼demeio/didattica
- Orario di ricevimento: lunedì 14.30-16.30 e mercoledì 9.30-11.30.

Software

Octave

Software

Octave

- Open source

Software

Octave

- Open source
- Scaricabile da http://www.gnu.org/software/octave/download.html

Software

Octave

- Open source
- Scaricabile da http://www.gnu.org/software/octave/download.html
- Documentazione (in parte) da mio sito presso http://dipmat.unian.it/ demeio/public/Octave/

Software

Octave

- Open source
- Scaricabile da
  http://www.gnu.org/software/octave/download.html
- Documentazione (in parte) da mio sito presso
  http://dipmat.unian.it/ demeio/public/Octave/

Altri software

Software

Octave

- Open source
- Scaricabile da http://www.gnu.org/software/octave/download.html
- Documentazione (in parte) da mio sito presso http://dipmat.unian.it/ demeio/public/Octave/

Altri software

- Matlab ($)

Software

Octave

- Open source
- Scaricabile da
  http://www.gnu.org/software/octave/download.html
- Documentazione (in parte) da mio sito presso
  http://dipmat.unian.it/ demeio/public/Octave/

Altri software

- Matlab ($)
- Mathematica ($)

Software

Octave

- Open source
- Scaricabile da
  http://www.gnu.org/software/octave/download.html
- Documentazione (in parte) da mio sito presso
  http://dipmat.unian.it/ demeio/public/Octave/

Altri software

- Matlab ($)
- Mathematica ($)
- Sage (open source)

Introduzione

Obiettivi

- Che cosè il calcolo numerico?

Introduzione

Lucio Demeio
DIISM

Obiettivi

- Che cosè il calcolo numerico?
- Molti problemi fisici, ingegneristici ed economici vengono descritti da modelli matematici di vario tipo: equazioni algebriche, equazioni differenziali, autovalori ed autovettori, etc.

Introduzione

Obiettivi

- Che cosè il calcolo numerico?
- Molti problemi fisici, ingegneristici ed economici vengono descritti da modelli matematici di vario tipo: equazioni algebriche, equazioni differenziali, autovalori ed autovettori, etc.
- Il più delle volte non possediamo una soluzione analitica del problema e bisogna trovarne un'approssimazione.

Introduzione

Obiettivi

- Che cosè il calcolo numerico?
- Molti problemi fisici, ingegneristici ed economici vengono descritti da modelli matematici di vario tipo: equazioni algebriche, equazioni differenziali, autovalori ed autovettori, etc.
- Il più delle volte non possediamo una soluzione analitica del problema e bisogna trovarne un'approssimazione.
- Due strade: approssimazioni analitiche (serie di Taylor, metodi perturbativi) o metodi numerici

Introduzione

Obiettivi

- Che cosè il calcolo numerico?
- Molti problemi fisici, ingegneristici ed economici vengono descritti da modelli matematici di vario tipo: equazioni algebriche, equazioni differenziali, autovalori ed autovettori, etc.
- Il più delle volte non possediamo una soluzione analitica del problema e bisogna trovarne un'approssimazione.
- Due strade: approssimazioni analitiche (serie di Taylor, metodi perturbativi) o metodi numerici
- I metodi numerici consistono (in generale) di algoritmi per costruire successioni (numeriche o di funzioni) che convergono al risultato desiderato

Contenuti del corso

- **Preliminari matematici.** Richiamo ad alcuni concetti di Analisi (successioni, limiti, continuità, teoremi fondamentali).

Contenuti del corso

- **Preliminari matematici.** Richiamo ad alcuni concetti di Analisi (successioni, limiti, continuità, teoremi fondamentali).
- **Analisi degli errori.** Errori di troncamento ed errori di arrotondamento.

Contenuti del corso

- **Preliminari matematici.** Richiamo ad alcuni concetti di Analisi (successioni, limiti, continuità, teoremi fondamentali).
- **Analisi degli errori.** Errori di troncamento ed errori di arrotondamento.
- **Algoritmi, stabilità e convergenza.**

Contenuti del corso

- **Preliminari matematici.** Richiamo ad alcuni concetti di Analisi (successioni, limiti, continuità, teoremi fondamentali).
- **Analisi degli errori.** Errori di troncamento ed errori di arrotondamento.
- **Algoritmi, stabilità e convergenza.**
- **Soluzioni di equazioni in una variabile.** Per esempio:

$$\sin x - \frac{x}{10} = 0$$
$$e^{-x} = x^3.$$

Contenuti del corso

- **Preliminari matematici.** Richiamo ad alcuni concetti di Analisi (successioni, limiti, continuità, teoremi fondamentali).
- **Analisi degli errori.** Errori di troncamento ed errori di arrotondamento.
- **Algoritmi, stabilità e convergenza.**
- **Soluzioni di equazioni in una variabile.** Per esempio:

$$\sin x - \frac{x}{10} = 0$$
$$e^{-x} = x^3.$$

- **Interpolazione ed approssimazione polinomiale.** Talvolta si conosce una funzione solo su un insieme di punti, e la si vuol estendere ad un intervallo continuo. Oppure l'espressione di una funzione è troppo complicata e si vuole utilizzare un'approssimazione più semplice.

Contenti del corso

- **Differenziazione numerica**

Contenuti del corso

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.

Contenuti del corso

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.

- **Metodi diretti per i sistemi lineari** Per esempio:

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove A è una matrice $n \times n$ non troppo grande.

Contenuti del corso

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

  dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.
- **Metodi diretti per i sistemi lineari** Per esempio:

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  dove A è una matrice $n \times n$ non troppo grande.
- **Metodi iterativi nell'algebra** Quando A è una matrice $n \times n$ di grandi dimensioni.

Contenuti del corso

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

  dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.
- **Metodi diretti per i sistemi lineari** Per esempio:

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  dove A è una matrice $n \times n$ non troppo grande.
- **Metodi iterativi nell'algebra** Quando A è una matrice $n \times n$ di grandi dimensioni.
- **Problemi agli autovalori**

Contenuti del corso

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

  dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.
- **Metodi diretti per i sistemi lineari** Per esempio:

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  dove A è una matrice $n \times n$ non troppo grande.
- **Metodi iterativi nell'algebra** Quando A è una matrice $n \times n$ di grandi dimensioni.
- **Problemi agli autovalori**
- **Sistemi non lineari**

Contenuti del corso

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

  dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.
- **Metodi diretti per i sistemi lineari** Per esempio:

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  dove A è una matrice $n \times n$ non troppo grande.
- **Metodi iterativi nell'algebra** Quando A è una matrice $n \times n$ di grandi dimensioni.
- **Problemi agli autovalori**
- **Sistemi non lineari**
- **Equazioni differenziali ordinarie**

Analisi degli errori

Rappresentazione dei numeri

Rappresentazione dei numeri

- In un computer i numeri vengono rappresentati con un numero finito di cifre decimali. Ad esempio $\pi = 3.14159265...$ oppure $\sqrt{3} = 1.73205080...$ (normalmente 16 o 32 cifre).

Analisi degli errori

Rappresentazione dei numeri

- In un computer i numeri vengono rappresentati con un numero finito di cifre decimali. Ad esempio $\pi = 3.14159265...$ oppure $\sqrt{3} = 1.73205080...$ (normalmente 16 o 32 cifre).
- Rappresentazione in virgola mobile: se $y = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n$, con $1 \leq d_1 \leq 9$ (cioè $d_1 \neq 0$) $0 \leq d_i \leq 9$, $i = 2, 3, .., k$ diremo che y e' rappresentato in virgola mobile a k **cifre decimali**.

Rappresentazione dei numeri

- In un computer i numeri vengono rappresentati con un numero finito di cifre decimali. Ad esempio $\pi = 3.14159265...$ oppure $\sqrt{3} = 1.73205080...$ (normalmente 16 o 32 cifre).
- Rappresentazione in virgola mobile: se $y = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n$, con $1 \leq d_1 \leq 9$ (cioè $d_1 \neq 0$) $0 \leq d_i \leq 9$, $i = 2, 3, .., k$ diremo che y e' rappresentato in virgola mobile a k **cifre decimali**.
- Per esempio, $p = 0.314159265 \times 10^1$ è la rappresentazione di π a 9 cifre decimali e ...

Analisi degli errori

Rappresentazione dei numeri

- In un computer i numeri vengono rappresentati con un numero finito di cifre decimali. Ad esempio $\pi = 3.14159265...$ oppure $\sqrt{3} = 1.73205080...$ (normalmente 16 o 32 cifre).
- Rappresentazione in virgola mobile: se $y = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n$, con $1 \leq d_1 \leq 9$ (cioè $d_1 \neq 0$) $0 \leq d_i \leq 9$, $i = 2, 3, .., k$ diremo che y e' rappresentato in virgola mobile a k **cifre decimali**.
- Per esempio, $p = 0.314159265 \times 10^1$ è la rappresentazione di π a 9 cifre decimali e ...
- ... $y = 0.71283 \times 10^3$ è la rappresentazione di 712.83 a 5 cifre decimali.

Rappresentazione dei numeri

- In un computer i numeri vengono rappresentati con un numero finito di cifre decimali. Ad esempio $\pi = 3.14159265...$ oppure $\sqrt{3} = 1.73205080...$ (normalmente 16 o 32 cifre).
- Rappresentazione in virgola mobile: se $y = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n$, con $1 \leq d_1 \leq 9$ (cioè $d_1 \neq 0$) $0 \leq d_i \leq 9$, $i = 2, 3, .., k$ diremo che y e' rappresentato in virgola mobile a k **cifre decimali**.
- Per esempio, $p = 0.314159265 \times 10^1$ è la rappresentazione di π a 9 cifre decimali e ...
- ... $y = 0.71283 \times 10^3$ è la rappresentazione di 712.83 a 5 cifre decimali.
- Siano y e z due numeri decimali molto vicini tra loro, p. es. $y = 0.d_1...d_r\,\alpha_{r+1}...\alpha_k \times 10^n$ e $z = 0.d_1...d_r\,\beta_{r+1}...\beta_k \times 10^n$ in rappr. a k cifre decimali. Allora $y - z = 0.\gamma_1...\gamma_{k-r} \times 10^{n-r}$. Cioè $y - z$ ha una rappresentazione a $k - r$ cifre significative.

Analisi degli errori

Esempio

Analisi degli errori

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!

Analisi degli errori

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!
- Sia, per esempio, $\sqrt{3} = 1.73$ la rappr. con 3 cifre decimali. Allora $(\sqrt{3})^2 = 2.9929 \to 2.99$

Analisi degli errori

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!
- Sia, per esempio, $\sqrt{3} = 1.73$ la rappr. con 3 cifre decimali. Allora $(\sqrt{3})^2 = 2.9929 \to 2.99$
- **Errore di arrotondamento:** errore commesso usando la rappr. in virgola mobile al posto del valore esatto;

Analisi degli errori

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!
- Sia, per esempio, $\sqrt{3} = 1.73$ la rappr. con 3 cifre decimali. Allora $(\sqrt{3})^2 = 2.9929 \to 2.99$
- **Errore di arrotondamento:** errore commesso usando la rappr. in virgola mobile al posto del valore esatto;
- Errore assoluto $|2.99 - 3| = 0.01$
  Errore relativo $|(2.99 - 3)/3| = 0.00333$

Analisi degli errori

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!
- Sia, per esempio, $\sqrt{3} = 1.73$ la rappr. con 3 cifre decimali. Allora $(\sqrt{3})^2 = 2.9929 \to 2.99$
- **Errore di arrotondamento:** errore commesso usando la rappr. in virgola mobile al posto del valore esatto;
- Errore assoluto $|2.99 - 3| = 0.01$
  Errore relativo $|(2.99 - 3)/3| = 0.00333$
- In generale, se p e' il valore vero e p^* quello in rappr. decimale,

$$\varepsilon = |p - p^*| \qquad \text{errore assoluto}$$

$$\varepsilon_r = \frac{|p - p^*|}{|p|}, p \neq 0 \quad \text{errore relativo}$$

Analisi degli errori

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!
- Sia, per esempio, $\sqrt{3} = 1.73$ la rappr. con 3 cifre decimali. Allora $(\sqrt{3})^2 = 2.9929 \to 2.99$
- **Errore di arrotondamento:** errore commesso usando la rappr. in virgola mobile al posto del valore esatto;
- Errore assoluto $|2.99 - 3| = 0.01$
  Errore relativo $|(2.99 - 3)/3| = 0.00333$
- In generale, se p e' il valore vero e p^* quello in rappr. decimale,

$$\varepsilon = |p - p^*| \qquad \text{errore assoluto}$$
$$\varepsilon_r = \frac{|p - p^*|}{|p|}, p \neq 0 \qquad \text{errore relativo}$$

- Mathematica e Octave files Intro1.nb, Intro1.m

Analisi degli errori

Esempio

Proviamo a risolvere $\qquad a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Analisi degli errori

Esempio

Proviamo a risolvere $\quad a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Sappiamo che

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}$$

Analisi degli errori

Esempio

Proviamo a risolvere $a\,x^2 + b\,x + c = 0$
Sappiamo che

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}$$

Siano $a = 1$, $b = 74.23$ e $c = 1$ e lavoriamo con 4 cifre decimali.

Analisi degli errori

Esempio

Proviamo a risolvere $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Sappiamo che

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}$$

Siano $a = 1$, $b = 74.23$ e $c = 1$ e lavoriamo con 4 cifre decimali.

Mathematica e Octave files Intro2.nb, Intro2.m

Algoritmi

Lucio Demeio
DIISM

Definizione

Un metodo numerico e' costituito da un insieme di algoritmi. Un algoritmo costruisce un'approssimazione numerica alla soluzione di un problema (equazione algebrica o differenziale, integrazione numerica, etc.) mediante una successione di n passi.

Algoritmi

Lucio Demeio
DIISM

Definizione

Un metodo numerico e' costituito da un insieme di algoritmi. Un algoritmo costruisce un'approssimazione numerica alla soluzione di un problema (equazione algebrica o differenziale, integrazione numerica, etc.) mediante una successione di n passi.

Stabilità

Un algoritmo si dice **stabile** se piccoli cambiamenti nelle condizioni iniziali provocano piccole variazioni nel risultato finale.

Algoritmi

Definizione

Un metodo numerico e' costituito da un insieme di algoritmi. Un algoritmo costruisce un'approssimazione numerica alla soluzione di un problema (equazione algebrica o differenziale, integrazione numerica, etc.) mediante una successione di n passi.

Stabilità

Un algoritmo si dice **stabile** se piccoli cambiamenti nelle condizioni iniziali provocano piccole variazioni nel risultato finale.

Crescita dell'errore

- Primo passo: E_0;
- **Crescita lineare**: se esiste C t. c. $E_n \approx C\, n\, E_0$;
- **Crescita esponenziale**: se esiste $C > 1$ t. c. $E_n \approx C^n\, E_0$;

Algoritmi

Esercizio

La crescita lineare porta in generale ad algoritmi stabili ed è sia inevitabile che accettabile

Algoritmi

Lucio Demeio
DIISM

Esercizio

La crescita lineare porta in generale ad algoritmi stabili ed è sia inevitabile che accettabile
La crescita esponenziale va evitata e porta ad algoritmi instabili.

Algoritmi

Lucio Demeio
DIISM

Esercizio

La crescita lineare porta in generale ad algoritmi stabili ed è sia inevitabile che accettabile
La crescita esponenziale va evitata e porta ad algoritmi instabili.
Provare a risolvere l'equazione ricorsiva **(Example 3 pag. 33)**

$$p_n = \frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2}$$

con $p_0 = 1$ e $p_1 = 1/3$. Cosa si osserva? La soluzione esatta è $p_n = (1/3)^n$; quella numerica ...

Tasso di convergenza

Sia $\{\beta_n\}$ una successione infinitesima, cioè $\beta_n \to 0$ e sia $\{\alpha_n\}$ una successione convergente, con $\alpha_n \to \alpha$.

Tasso di convergenza

Sia $\{\beta_n\}$ una successione infinitesima, cioè $\beta_n \to 0$ e sia $\{\alpha_n\}$ una successione convergente, con $\alpha_n \to \alpha$.

Se $\exists$ una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente $|\alpha_n - \alpha| \leq K\,|\beta_n|$ diremo che $\{\alpha_n\}$ converge ad α con **tasso di convergenza** (o ordine di convergenza) $O(\beta_n)$. Scriveremo allora che $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$.

Lucio Demeio
DIISM

Tasso di convergenza

Sia $\{\beta_n\}$ una successione infinitesima, cioè $\beta_n \to 0$ e sia $\{\alpha_n\}$ una successione convergente, con $\alpha_n \to \alpha$.

Se $\exists$ una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente $|\alpha_n - \alpha| \leq K\,|\beta_n|$ diremo che $\{\alpha_n\}$ converge ad α con **tasso di convergenza** (o ordine di convergenza) $O(\beta_n)$. Scriveremo allora che $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$.

In generale, si sceglie

$$\beta_n = \frac{1}{n^p} \qquad *$$

per qualche $p > 0$.

Tasso di convergenza

Sia $\{\beta_n\}$ una successione infinitesima, cioè $\beta_n \to 0$ e sia $\{\alpha_n\}$ una successione convergente, con $\alpha_n \to \alpha$.

Se $\exists$ una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente $|\alpha_n - \alpha| \leq K\,|\beta_n|$ diremo che $\{\alpha_n\}$ converge ad α con **tasso di convergenza** (o ordine di convergenza) $O(\beta_n)$. Scriveremo allora che $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$.

In generale, si sceglie

$$\beta_n = \frac{1}{n^p} \qquad *$$

per qualche $p > 0$. La successione $\{\beta_n\}$ indica la "velocità" con cui $\{\alpha_n\}$ converge al suo limite. Con la scelta $*$, tanto più grande è p tanto più rapidamente $\{\alpha_n\}$ converge ad α.

Algoritmi

Esercizio

Determinare il tasso di convergenza delle successioni **(Example 4 pag. 36)**

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{n^2+2}{n^3+3} \qquad \alpha_n^{(2)} = \frac{n^2+2}{n^4+3}.$$

Quale delle due converge più rapidamente?

Esercizio

Determinare il tasso di convergenza delle successioni **(Example 4 pag. 36)**

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{n^2+2}{n^3+3} \qquad \alpha_n^{(2)} = \frac{n^2+2}{n^4+3}.$$

Quale delle due converge più rapidamente?

Tasso di convergenza per funzioni

La definizione di tasso di convergenza si generalizza facilmente al caso di funzioni reali di variabile reale.

Sia $G(h)$ una funzione infinitesima e sia $F(h) \to L$ per $h \to 0$. Se $\exists$ una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente $|F(h) - L| \leq K\,|G(h)|$ per $h \to 0$, diremo che $F(h)$ converge ad L con **tasso (ordine) di convergenza** $O(G(h))$.
Scriveremo allora che $F(h) = L + O(G(h))$, $h \to 0$.

Algoritmi

Esercizio

Determinare l'ordine di convergenza delle funzioni **(Example 5 pag. 37)**

$$f(h) = \frac{\sin h}{h} \qquad g(h) = \cos h + \frac{1}{2}\,h^2.$$

Quale delle due converge più rapidamente?