

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

Sede di Fermo

Corso di Calcolo Numerico

3 - PROBLEMI DI INTERPOLAZIONE

Lucio Demeio
DIISM

Interpolazione: Polinomio di Lagrange

Differenze divise

Splines

Problemi di interpolazione

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Problemi di interpolazione

- Supponiamo di avere un insieme di dati che rappresentano misurazioni della temperatura in una certa località durante il mese di luglio con cadenza bisettimanale.

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Problemi di interpolazione

- Supponiamo di avere un insieme di dati che rappresentano misurazioni della temperatura in una certa località durante il mese di luglio con cadenza bisettimanale.
- Rappresentiamo tali dati nella seguente tabella:

Giorno	Temperatura
1	27.1
8	27.2
15	23.5
22	28.0
29	29.1

Problemi di interpolazione

- Supponiamo di avere un insieme di dati che rappresentano misurazioni della temperatura in una certa località durante il mese di luglio con cadenza bisettimanale.
- Rappresentiamo tali dati nella seguente tabella:

Giorno	Temperatura
1	27.1
8	27.2
15	23.5
22	28.0
29	29.1

- Supponiamo di voler conoscere la temperatura in un giorno del mese diverso da quelli tabulato, o di dover utilizzare la temperatura in un modello che la richiede continua, o di voler predire la temperatura più avanti nel tempo.

Problemi di interpolazione

- Supponiamo di avere un insieme di dati che rappresentano misurazioni della temperatura in una certa località durante il mese di luglio con cadenza bisettimanale.
- Rappresentiamo tali dati nella seguente tabella:

Giorno	Temperatura
1	27.1
8	27.2
15	23.5
22	28.0
29	29.1

- Supponiamo di voler conoscere la temperatura in un giorno del mese diverso da quelli tabulato, o di dover utilizzare la temperatura in un modello che la richiede continua, o di voler predire la temperatura più avanti nel tempo.
- Dobbiamo costruire una funzione continua che passi per i punti della tabella: **interpolazione!**

Problemi di interpolazione

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Problemi di interpolazione

- Una classe di funzioni continue molto usate nei problemi di interpolazione sono i polinomi.

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Problemi di interpolazione

- Una classe di funzioni continue molto usate nei problemi di interpolazione sono i polinomi.
- Sappiamo che per $n + 1$ punti assegnati, $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ passa uno ed un solo polinomio $P_n(x)$ di grado n .

Problemi di interpolazione

- Una classe di funzioni continue molto usate nei problemi di interpolazione sono i polinomi.
- Sappiamo che per $n + 1$ punti assegnati, $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ passa uno ed un solo polinomio $P_n(x)$ di grado n .

Approssimazione polinomiale delle funzioni

Una proprietà importante dei polinomi è che possono approssimare bene quanto si vuole una qualunque funzione continua su un intervallo chiuso. In particolare vale il seguente teorema:

Problemi di interpolazione

- Una classe di funzioni continue molto usate nei problemi di interpolazione sono i polinomi.
- Sappiamo che per $n + 1$ punti assegnati, $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ passa uno ed un solo polinomio $P_n(x)$ di grado n .

Approssimazione polinomiale delle funzioni

Una proprietà importante dei polinomi è che possono approssimare bene quanto si vuole una qualunque funzione continua su un intervallo chiuso. In particolare vale il seguente teorema:

Theorem (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora esiste un polinomio $P(x)$ tale che, per ogni $x \in [a, b]$, si ha $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Interpolazione di Lagrange

Calcolo
Numerico

Lucio Demeio
DIISM

Polinomio interpolatore di Lagrange

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Polinomio interpolatore di Lagrange

- Supporremo nel seguito che le y_i siano i valori di una funzione nei punti x_i , chiamati **nodi**: $y_i = f(x_i)$

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Polinomio interpolatore di Lagrange

- Supporremo nel seguito che le y_i siano i valori di una funzione nei punti x_i , chiamati **nodi**: $y_i = f(x_i)$
- Siano $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ $n + 1$ punti del piano cartesiano. Chi è il polinomio di grado n che passa per essi?

Polinomio interpolatore di Lagrange

- Supporremo nel seguito che le y_i siano i valori di una funzione nei punti x_i , chiamati **nodi**: $y_i = f(x_i)$
- Siano $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ $n + 1$ punti del piano cartesiano. Chi è il polinomio di grado n che passa per essi?
- Cominciamo dalle cose semplici, $n = 1$: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$. Allora

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Si vede facilmente che $P_1(x_0) = y_0$ e $P_1(x_1) = y_1$.

Polinomio interpolatore di Lagrange

- Supporremo nel seguito che le y_i siano i valori di una funzione nei punti x_i , chiamati **nodi**: $y_i = f(x_i)$
- Siano $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ $n + 1$ punti del piano cartesiano. Chi è il polinomio di grado n che passa per essi?
- Cominciamo dalle cose semplici, $n = 1$: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$. Allora

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Si vede facilmente che $P_1(x_0) = y_0$ e $P_1(x_1) = y_1$.

- $n = 2$: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$. Allora

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Polinomio interpolatore di Lagrange

In generale, per $n + 1$ punti:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} + \dots \\ & + y_k \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)} + \dots \\ & + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

Notazione

I coefficienti delle y_k si indicano solitamente con $L_{n,k}(x)$ e sono polinomi di grado n :

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

così che il polinomio interpolatore di Lagrange si può scrivere come

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{n,k}(x)$$

Notazione

I coefficienti delle y_k si indicano solitamente con $L_{n,k}(x)$ e sono polinomi di grado n :

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

così che il polinomio interpolatore di Lagrange si può scrivere come

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{n,k}(x)$$

Come son fatti gli $L_{n,k}$?

Interpolazione di Lagrange

Calcolo
Numerico

Lucio Demeio
DIISM

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

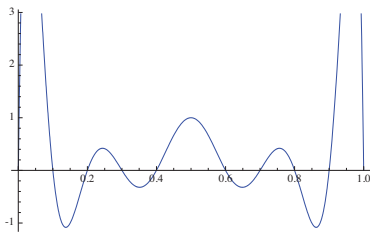
Esempi degli $L_{n,k}$ su $[0, 1]$

Interpolazione di Lagrange

Calcolo
Numerico

Lucio Demeio
DIISM

Esempi degli $L_{n,k}$ su $[0, 1]$



- $n = 10, k = 5$

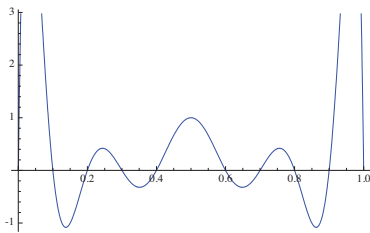
Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

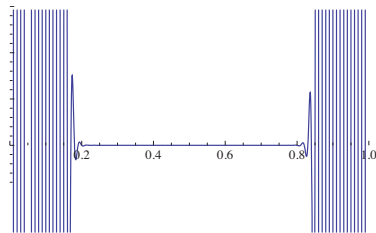
Splines

Interpolazione di Lagrange

Esempi degli $L_{n,k}$ su $[0, 1]$



- $n = 10, k = 5$



- $n = 100, k = 5$

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Interpolazione di Lagrange

Calcolo
Numerico

Lucio Demeio
DIISM

Esempio

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Interpolazione di Lagrange

Calcolo
Numerico

Lucio Demeio
DIISM

Esempio

- $f(x) = \sin 2\pi x$ nell'intervallo $[0, 1]$, nodi equispaziati;

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

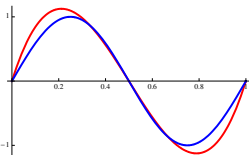
Interpolazione di Lagrange

Calcolo
Numerico

Lucio Demeio
DIISM

Esempio

- $f(x) = \sin 2\pi x$ nell'intervallo $[0, 1]$, nodi equispaziati;



- $n = 3$

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

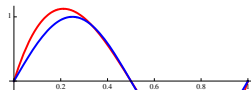
Differenze divise

Splines

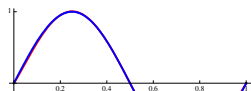
Interpolazione di Lagrange

Esempio

- $f(x) = \sin 2\pi x$ nell'intervallo $[0, 1]$, nodi equispaziati;



- $n = 3$



- $n = 5$

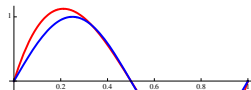
Interpoll.nb

Mathematica file

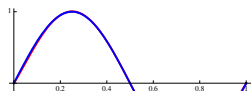
Interpolazione di Lagrange

Esempio

- $f(x) = \sin 2\pi x$ nell'intervallo $[0, 1]$, nodi equispaziati;



- $n = 3$

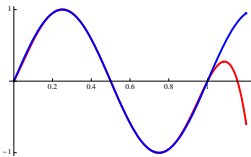


- $n = 5$

Interpoll.nb

Mathematica file

- $n = 5$



Theorem (Errore)

Sia $f \in C^{n+1}[a, b]$ e siano x_0, x_1, \dots, x_n i nodi dell'interpolazione in $[a, b]$, distinti ma altrimenti arbitrari. Allora, $\forall x \in [a, b]$ esiste un numero $\xi(x) \in [a, b]$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Theorem (Errore)

Sia $f \in C^{n+1}[a, b]$ e siano x_0, x_1, \dots, x_n i nodi dell'interpolazione in $[a, b]$, distinti ma altrimenti arbitrari. Allora, $\forall x \in [a, b]$ esiste un numero $\xi(x) \in [a, b]$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Vediamo che $f(x_k) = P_n(x_k)$ (ovvio!!) e che l'errore è proporzionale alla derivata di ordine $n+1$ ed inversamente proporzionale ad $(n+1)!$ Se la derivata $(n+1)$ -esima è limitata, allora l'errore va a zero molto rapidamente all'aumentare di n .

Altro esempio

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

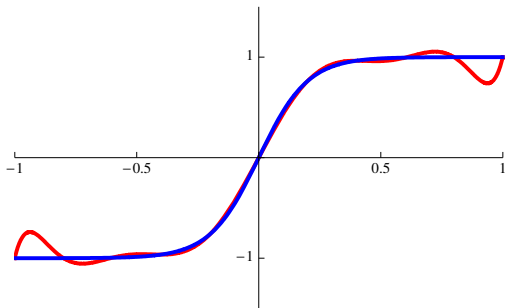
Splines

Altro esempio

- $f(x) = \tanh x$ nell'intervallo $[-1, 1]$, nodi equispaziati;

Altro esempio

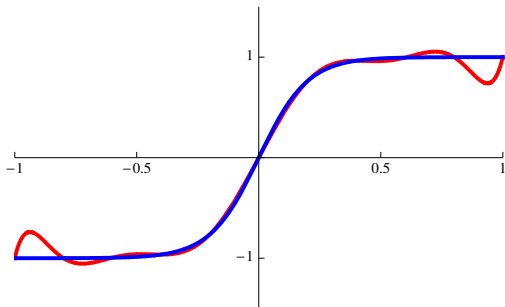
- $f(x) = \tanh x$ nell'intervallo $[-1, 1]$, nodi equispaziati;



- $n = 10$

Altro esempio

- $f(x) = \tanh x$ nell'intervallo $[-1, 1]$, nodi equispaziati;



- $n = 10$
- Mathematica file [Interpol1.nb](#)

Differenze divise

Un metodo molto usato per la generazione del polinomio interpolatore è quello delle differenze divise.

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Differenze divise

Un metodo molto usato per la generazione del polinomio interpolatore è quello delle differenze divise.

- Siano $x_k \in [a, b]$, $k = 0, n$ i nodi e sia $f(x)$ una funzione continua definita anch'essa in $[a, b]$. Sia inoltre $P_n(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di grado n .

Differenze divise

Un metodo molto usato per la generazione del polinomio interpolatore è quello delle differenze divise.

- Siano $x_k \in [a, b]$, $k = 0, n$ i nodi e sia $f(x)$ una funzione continua definita anch'essa in $[a, b]$. Sia inoltre $P_n(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di grado n .
- Il polinomio si può scrivere nella forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

dove gli a_k sono dei coefficienti da determinare.

Differenze divise

Un metodo molto usato per la generazione del polinomio interpolatore è quello delle differenze divise.

- Siano $x_k \in [a, b]$, $k = 0, n$ i nodi e sia $f(x)$ una funzione continua definita anch'essa in $[a, b]$. Sia inoltre $P_n(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di grado n .
- Il polinomio si può scrivere nella forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

dove gli a_k sono dei coefficienti da determinare.

- Sostituendo x_0 al posto di x , si vede subito che

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

Differenze divise

- Sostituiamo ora x_1 al posto di x :

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad \text{ovvero}$$
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Differenze divise

- Sostituiamo ora x_1 al posto di x :

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad \text{ovvero}$$
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Continuando:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_2 - x_1} \left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} - 1 \right)}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

Differenze divise

Queste espressioni si possono scrivere più sinteticamente introducendo le **differenze divise** per la funzione f . La definizione delle differenze divise è induttiva:

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Differenze divise

Queste espressioni si possono scrivere più sinteticamente introducendo le **differenze divise** per la funzione f . La definizione delle differenze divise è induttiva:

- Diff. divisa di ord. **ZERO**: $f[x_i] = f(x_i)$;

Differenze divise

Queste espressioni si possono scrivere più sinteticamente introducendo le **differenze divise** per la funzione f . La definizione delle differenze divise è induttiva:

- Diff. divisa di ord. **ZERO**: $f[x_i] = f(x_i)$;
- Diff. divisa di ord. **UNO**:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Differenze divise

Queste espressioni si possono scrivere più sinteticamente introducendo le **differenze divise** per la funzione f . La definizione delle differenze divise è induttiva:

- Diff. divisa di ord. **ZERO**: $f[x_i] = f(x_i)$;
- Diff. divisa di ord. **UNO**:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- Diff. divisa di ord. **DUE**:

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \\ &= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{x_{i+2} - x_i} \end{aligned}$$

Differenze divise

- La differenza divisa di ordine UNO può essere vista come un rapporto incrementale della funzione, tra x_i e x_{i+1} ;

Differenze divise

- La differenza divisa di ordine UNO può essere vista come un rapporto incrementale della funzione, tra x_i e x_{i+1} ;
- La differenza divisa di ordine DUE può essere vista come un rapporto incrementale della derivata della funzione, tra x_i e x_{i+2} (rapporto incrementale secondo);

Differenze divise

- La differenza divisa di ordine UNO può essere vista come un rapporto incrementale della funzione, tra x_i e x_{i+1} ;
- La differenza divisa di ordine DUE può essere vista come un rapporto incrementale della derivata della funzione, tra x_i e x_{i+2} (rapporto incrementale secondo);
- Vedremo in seguito, che i rapporti incrementali si possono usare per approssimare numericamente le derivate; quindi, le differenze divise di ordine UNO approssimano la derivata prima, quelle di ordine DUE la derivata seconda;
- Diff. divisa di ord. k :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Differenze divise

Differenze divise

Con queste definizioni, possiamo allora scrivere che

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

...

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$$

Differenze divise

Con queste definizioni, possiamo allora scrivere che

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

...

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$$

Il polinomio interpolatore si può dunque scrivere come

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

detta **formula di interpolazione di Newton alle differenze divise**

Table 3.7

x	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$		
x_1	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_2	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
x_3	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_4	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_5	$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$	$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$

Table 3.7

x	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$		
x_1	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_2	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
x_3	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_4	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_5	$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$	$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$

Mathematica file DiffDiv1.nb

Differenze divise - Legame con le derivate

Theorem

Sia $f \in C^n[a, b]$ e siano x_0, x_1, \dots, x_n i nodi in $[a, b]$, distinti ma altrimenti arbitrari. Allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Differenze divise - Legame con le derivate

Dal Teorema di Lagrange: se $f(x)$ è derivabile, $\exists \xi \in [x_0, x_1]$ tale che

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$$

Theorem

Sia $f \in C^n[a, b]$ e siano x_0, x_1, \dots, x_n i nodi in $[a, b]$, distinti ma altrimenti arbitrari. Allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Proof.

Sia $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Evidentemente $g(x_k) = 0, \forall k$. Per il Teorema di Rolle generalizzato, $\exists \xi \in (a, b)$ tale che

$g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) = 0$. Ma

$P_n^{(n)}(x) = n! f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, da cui la tesi. \square

Proof.

Sia $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Evidentemente $g(x_k) = 0, \forall k$. Per il Teorema di Rolle generalizzato, $\exists \xi \in (a, b)$ tale che

$g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) = 0$. Ma

$P_n^{(n)}(x) = n! f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, da cui la tesi. \square

Teorema di Rolle generalizzato

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, di classe $C^n[a, b]$, se esistono $n + 1$ punti, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tali che $f(x_k) = 0, k = 0, \dots, n$, allora esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Differenze divise - Nodi equispaziati

- Siano ora i nodi (x_0, x_1, \dots, x_n) uniformemente distribuiti in $[a, b]$, cioè $x_{i+1} - x_i = h = \text{cost.}$, con $x_0 = a$ e $x_n = b$, ed $h = (b - a)/n$ è detto **passo di discretizzazione**.

Differenze divise - Nodi equispaziati

- Siano ora i nodi (x_0, x_1, \dots, x_n) uniformemente distribuiti in $[a, b]$, cioè $x_{i+1} - x_i = h = \text{cost.}$, con $x_0 = a$ e $x_n = b$, ed $h = (b - a)/n$ è detto **passo di discretizzazione**.
- Allora possiamo scrivere che

$$x_i = x_0 + i h \quad x_i - x_j = (i - j) h$$

Differenze divise - Nodi equispaziati

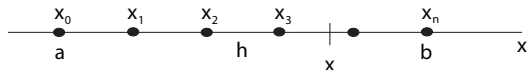
- Siano ora i nodi (x_0, x_1, \dots, x_n) uniformemente distribuiti in $[a, b]$, cioè $x_{i+1} - x_i = h = \text{cost.}$, con $x_0 = a$ e $x_n = b$, ed $h = (b - a)/n$ è detto **passo di discretizzazione**.
- Allora possiamo scrivere che

$$x_i = x_0 + i h \quad x_i - x_j = (i - j) h$$

- Se $x \in [a, b]$, possiamo scrivere $x = x_0 + s h$, dove s è un numero reale con $0 \leq s \leq n$;

$$s = 0 \rightarrow x = a, \quad s = i \rightarrow x = x_i, \quad s = n \rightarrow x = b$$

$$i < s < i + 1 \rightarrow x_i < x < x_{i+1}$$



Notazione binomiale

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Notazione binomiale

- Avremo dunque

$$x - x_0 = s h, \quad x - x_1 = (s - 1) h$$

$$(x - x_0)(x - x_1) = s(s - 1) h^2$$

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) = s(s - 1) \dots (s - k) h^{k+1}$$

Notazione binomiale

- Avremo dunque

$$x - x_0 = s h, \quad x - x_1 = (s - 1) h$$

$$(x - x_0)(x - x_1) = s(s - 1) h^2$$

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) = s(s - 1) \dots (s - k) h^{k+1}$$

- Il polinomio interpolatore di Lagrange diventa allora

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + s h f[x_0, x_1] \\ &\quad + s(s - 1) h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ &\quad + s(s - 1) \dots (s - n + 1) h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \sum_{k=0}^n s(s - 1) \dots (s - k + 1) h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{aligned}$$

Notazione binomiale - Differenze divise in avanti

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Notazione binomiale - Differenze divise in avanti

- Ricordando la definizione dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!};$$

Notazione binomiale - Differenze divise in avanti

- Ricordando la definizione dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!};$$

- estendendola anche al campo reale, possiamo scrivere

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

Notazione binomiale - Differenze divise in avanti

- Ricordando la definizione dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!};$$

- estendendola anche al campo reale, possiamo scrivere

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

- che è detta **formula alle differenze divise in avanti di Newton**

Differenze finite in avanti, formula di Newton

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Differenze finite in avanti, formula di Newton

- Le formule per le differenze divise si possono mettere in una forma diversa e più utile per sviluppi futuri. A tal scopo introduciamo la **notazione** Δ di Aitken:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Differenze finite in avanti, formula di Newton

- Le formule per le differenze divise si possono mettere in una forma diversa e più utile per sviluppi futuri. A tal scopo introduciamo la **notazione** Δ di Aitken:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

- Abbiamo allora che

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h} \frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} \\ &= \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0) \end{aligned}$$

Differenze finite in avanti, formula di Newton

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Differenze finite in avanti, formula di Newton

- ed in generale

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

Differenze finite in avanti, formula di Newton

- ed in generale

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

- così che il polinomio di Newton può ora essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

Differenze finite in avanti, formula di Newton

- ed in generale

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

- così che il polinomio di Newton può ora essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite in avanti**.

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- Il polinomio di Newton, invece che

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

può anche essere scritto come

$$P_n(x) = a_n + a_{n-1}(x - x_n) + a_{n-2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + a_1(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_2) \\ + a_0(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_2)(x - x_1)$$

che equivale a riordinare i nodi di interpolazione all'indietro, $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$.

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- Introducendo il **simbolo** ∇ (nabla) tale che $\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ e le differenze divise all'indietro

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n)$$

...

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n)$$

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- Introducendo il **simbolo** ∇ (nabla) tale che $\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ e le differenze divise all'indietro

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n)$$

...

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n)$$

- generalizzando i coefficienti binomiali sui reali negativi,

$$\begin{aligned} \binom{-s}{k} &= \frac{-s(-s-1)\dots(-s-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!} \end{aligned}$$

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- allora il polinomio di Newton può essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- allora il polinomio di Newton può essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite all'indietro**.

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- allora il polinomio di Newton può essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite all'indietro**.
- Le differenze finite all'indietro, qui introdotte nel contesto dell'interpolazione (ma noi non le useremo a tale scopo), torneranno utili più avanti.

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- allora il polinomio di Newton può essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite all'indietro**.
- Le differenze finite all'indietro, qui introdotte nel contesto dell'interpolazione (ma noi non le useremo a tale scopo), torneranno utili più avanti.
- Esistono anche le differenze finite centrate, le vedremo in seguito.

Approssimazione polinomiale a tratti

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Approssimazione polinomiale a tratti

- Una filosofia diversa per l'approccio al problema dell'interpolazione è quella di costruire una curva polinomiale a tratti, coincidente con i valori della funzione nei nodi, e soddisfacente a condizioni di continuità ai nodi.

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Approssimazione polinomiale a tratti

- Una filosofia diversa per l'approccio al problema dell'interpolazione è quella di costruire una curva polinomiale a tratti, coincidente con i valori della funzione nei nodi, e soddisfacente a condizioni di continuità ai nodi.
- La più semplice è l'interpolazione lineare, che collega i punti di interpolazione con una spezzata.

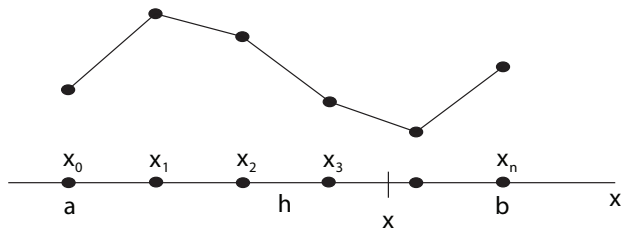
Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Approssimazione polinomiale a tratti

- Una filosofia diversa per l'approccio al problema dell'interpolazione è quella di costruire una curva polinomiale a tratti, coincidente con i valori della funzione nei nodi, e soddisfacente a condizioni di continuità ai nodi.
- La più semplice è l'interpolazione lineare, che collega i punti di interpolazione con una spezzata.



Approssimazione polinomiale a tratti

Approssimazione polinomiale a tratti

- Con la spezzata non si ha regolarità ai nodi.

Approssimazione polinomiale a tratti

- Con la spezzata non si ha regolarità ai nodi.
- Si fa quindi passare per ogni coppia di nodi un polinomio di grado più alto imponendo condizioni di regolarità.

Approssimazione polinomiale a tratti

- Con la spezzata non si ha regolarità ai nodi.
- Si fa quindi passare per ogni coppia di nodi un polinomio di grado più alto imponendo condizioni di regolarità.
- L'approssimazione polinomiale a tratti più usata e' quella cubica, detta approssimazione con gli **splines**.

Approssimazione polinomiale cubica

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Approssimazione polinomiale cubica

- Sia f definita nell'intervallo $[a, b]$ e siano (x_0, x_1, \dots, x_n) i nodi.

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Approssimazione polinomiale cubica

- Sia f definita nell'intervallo $[a, b]$ e siano (x_0, x_1, \dots, x_n) i nodi.
- Sia $S(x)$ un polinomio di terzo grado; indichiamo con $S_j(x)$ il polinomio di terzo grado definito nell'intervallino $[x_j, x_{j+1}]$, con $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Ciascun S_j contiene quattro coefficienti da determinare.

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Approssimazione polinomiale cubica

- Sia f definita nell'intervallo $[a, b]$ e siano (x_0, x_1, \dots, x_n) i nodi.
- Sia $S(x)$ un polinomio di terzo grado; indichiamo con $S_j(x)$ il polinomio di terzo grado definito nell'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$, con $j = 0, 1, \dots, n-1$. Ciascun S_j contiene quattro coefficienti da determinare.
- Le condizioni ai nodi interni sono:

$$S_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

$$S_{n-1}(x_n) = f(x_n),$$

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-2$$

$$S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-2$$

$$S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-2$$

- (queste sono $4n - 2$ equazioni) ...

Condizioni agli estremi

... mentre ai nodi estremi si impongono una delle due condizioni:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad \text{detta spline naturale}$$

$$S'(x_0) = f'(x_0) \quad S'(x_n) = f'(x_n) \quad \text{spline completa}$$

Approssimazione polinomiale cubica

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

Approssimazione polinomiale cubica

- Scriviamo il polinomio j -esimo e le sue derivate come

$$S_j(x) = a_j + b_j (x - x_j) + c_j (x - x_j)^2 + d_j (x - x_j)^3$$

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j (x - x_j) + 3d_j (x - x_j)^2$$

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j (x - x_j), \quad j = 0, \dots, n-1$$

e notiamo che $S_j(x_j) = a_j$, $S'_j(x_j) = b_j$ e $S''_j(x_j) = 2c_j$ per ogni $j = 0, 1, \dots, n-1$ (*).

Approssimazione polinomiale cubica

- Scriviamo il polinomio j -esimo e le sue derivate come

$$S_j(x) = a_j + b_j (x - x_j) + c_j (x - x_j)^2 + d_j (x - x_j)^3$$

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j (x - x_j) + 3d_j (x - x_j)^2$$

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j (x - x_j), \quad j = 0, \dots, n-1$$

e notiamo che $S_j(x_j) = a_j$, $S'_j(x_j) = b_j$ e $S''_j(x_j) = 2c_j$ per ogni $j = 0, 1, \dots, n-1$ (*).

- per convenienza, introduciamo $h_j = x_{j+1} - x_j$;

Approssimazione polinomiale cubica

- Scriviamo il polinomio j -esimo e le sue derivate come

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j), \quad j = 0, \dots, n-1$$

e notiamo che $S_j(x_j) = a_j$, $S'_j(x_j) = b_j$ e $S''_j(x_j) = 2c_j$ per ogni $j = 0, 1, \dots, n-1$ (*).

- per convenienza, introduciamo $h_j = x_{j+1} - x_j$;
- la condizione $S_j(x_j) = f(x_j)$ dà immediatamente $a_j = f(x_j)$, per $j = 0, 1, \dots, n-1$; siano inoltre $a_n = f(x_n)$, $b_n = S'(x_n)$ e $c_n = S''(x_n)/2$;

Approssimazione polinomiale cubica

- Scriviamo il polinomio j -esimo e le sue derivate come

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j), \quad j = 0, \dots, n-1$$

e notiamo che $S_j(x_j) = a_j$, $S'_j(x_j) = b_j$ e $S''_j(x_j) = 2c_j$ per ogni $j = 0, 1, \dots, n-1$ (*).

- per convenienza, introduciamo $h_j = x_{j+1} - x_j$;
- la condizione $S_j(x_j) = f(x_j)$ dà immediatamente $a_j = f(x_j)$, per $j = 0, 1, \dots, n-1$; siano inoltre $a_n = f(x_n)$, $b_n = S'(x_n)$ e $c_n = S''(x_n)/2$;
- la condizione $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ dà allora $a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Approssimazione polinomiale cubica

- Scriviamo il polinomio j -esimo e le sue derivate come

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j), \quad j = 0, \dots, n-1$$

e notiamo che $S_j(x_j) = a_j$, $S'_j(x_j) = b_j$ e $S''_j(x_j) = 2c_j$ per ogni $j = 0, 1, \dots, n-1$ (*).

- per convenienza, introduciamo $h_j = x_{j+1} - x_j$;
- la condizione $S_j(x_j) = f(x_j)$ dà immediatamente $a_j = f(x_j)$, per $j = 0, 1, \dots, n-1$; siano inoltre $a_n = f(x_n)$, $b_n = S'(x_n)$ e $c_n = S''(x_n)/2$;
- la condizione $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ dà allora $a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- ...

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

- ... la condizione $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ dà
 $b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$.

- ... la condizione $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ dà
 $b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- ... la condizione $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ dà
 $c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$.

- ... la condizione $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ dà
 $b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- ... la condizione $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ dà
 $c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Alla fine otteniamo il sistema

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$$

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j$$

per $j = 0, 1, \dots, n-1$. Assieme alle condizioni (*) viste prima, queste danno un sistema algebrico lineare nei coefficienti c_j .

Interpolazione:
Polinomio di
Lagrange

Differenze divise

Splines

- Ricaviamo d_j dalla terza equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1})$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j (c_j + c_{j+1}) \quad (*)$$

- Ricaviamo d_j dalla terza equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1})$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j (c_j + c_{j+1}) \quad (*)$$

- Dalla prima di queste ricaviamo b_j :

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - h_j \frac{2c_j + c_{j+1}}{3} \quad \text{da cui}$$

$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1} \frac{2c_{j-1} + c_j}{3}$$

- Ricaviamo d_j dalla terza equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1})$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j (c_j + c_{j+1}) \quad (*)$$

- Dalla prima di queste ricaviamo b_j :

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - h_j \frac{2c_j + c_{j+1}}{3} \quad \text{da cui}$$

$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1} \frac{2c_{j-1} + c_j}{3}$$

- Sostituendo nella (*) con $j \rightarrow j - 1$ otteniamo il sistema

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j c_{j+1} = 3 \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - 3 \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}}$$

per $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j c_{j+1} = 3 \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - 3 \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}}$$

per $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

- I membri di destra sono noti, in quanto $a_j = f(x_j)$ e $h_j = x_{j+1} - x_j$.

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j c_{j+1} = 3 \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - 3 \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}}$$

per $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

- I membri di destra sono noti, in quanto $a_j = f(x_j)$ e $h_j = x_{j+1} - x_j$.
- Si tratta di un sistema del tipo $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, con c_0 e c_n assegnati dalle condizioni agli estremi: $c_0 = c_n = 0$ per la spline naturale, mentre per la spline completa vengono assegnati $b_0 = f'(a)$ e $b_n = f'(b)$.

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j c_{j+1} = 3 \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - 3 \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}}$$

per $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

- I membri di destra sono noti, in quanto $a_j = f(x_j)$ e $h_j = x_{j+1} - x_j$.
- Si tratta di un sistema del tipo $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, con c_0 e c_n assegnati dalle condizioni agli estremi: $c_0 = c_n = 0$ per la spline naturale, mentre per la spline completa vengono assegnati $b_0 = f'(a)$ e $b_n = f'(b)$.
- La matrice \mathbf{A} è tridiagonale e soddisfa le proprietà richieste per l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema; quindi la soluzione è unica sia per la spline naturale che per la spline completa.

Spline naturale

Spline naturale

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \frac{a_2 - a_1}{h_1} - 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} \\ \dots \\ 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spline naturale

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \frac{a_2 - a_1}{h_1} - 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} \\ \dots \\ 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Spline completa

Spline completa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} - 3 f'(a) \\ 3 \frac{a_2 - a_1}{h_1} - 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} \\ \dots \\ 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3 f'(b) - 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Spline completa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} - 3 f'(a) \\ 3 \frac{a_2 - a_1}{h_1} - 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} \\ \dots \\ 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3 f'(b) - 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Theorem (Stima dell'errore)

Sia $f \in C^4[a, b]$ e sia

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Allora, se $S(x)$ è la spline completa (unica) per la funzione f sui nodi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ allora

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4$$

Theorem (Stima dell'errore)

Sia $f \in C^4[a, b]$ e sia

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Allora, se $S(x)$ è la spline completa (unica) per la funzione f sui nodi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ allora

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4$$

Applicazioni

La costruzione degli algoritmi di interpolazione tramite splines implica la risoluzione di un sistema lineare, che vedremo in futuro. Per ora accontentiamoci di qualche esempio elementare.