

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

Sede di Fermo

Corso di Calcolo Numerico

9 - EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Lucio Demeio
DIISM

Problemi ai Valori iniziali

Ci occuperemo della soluzione numerica di equazioni del prim'ordine del tipo

$$y'(t) = f(t, y),$$

$t \in [t_A, t_B]$ con la condizione iniziale $y(t_A) = \alpha$. Il problema è ben posto (vedi la schermata successiva) se la funzione f soddisfa una condizione di continuità Lipschitziana rispetto ad y nell'insieme $D = \{(t, y) : t_A \leq t \leq t_B, -\infty < y < \infty\}$, cioè se esiste una costante L tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

per ogni $(t, y_1), (t, y_2) \in D$.

Problema ben posto

Si dice che il problema ai valori iniziali

$$y'(t) = f(t, y)$$

$$y(t_A) = \alpha$$

è **ben posto** se

- La soluzione esiste ed è unica;
- se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $k(\varepsilon) > 0$ tale che, se $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ e $\delta(t)$ continua con $|\delta(t)| < \varepsilon$ per $t \in [t_A, t_B]$, la soluzione $z(t)$ del **problema perturbato**

$$z'(t) = f(t, z) + \delta(t)$$

$$z(t_A) = \alpha + \varepsilon_0$$

esiste, è unica e soddisfa $|z(t) - y(t)| < k(\varepsilon) \varepsilon$ per $t \in [t_A, t_B]$.

Problema ben posto

Commento: la seconda condizione affinché un problema sia ben posto significa che, se si perturbano di poco la funzione f e la condizione iniziale, l'esistenza ed unicità della soluzione deve essere ancora garantita e la soluzione del problema perturbato deve differire di poco da quella del problema non perturbato.

Metodo di Eulero

Iniziamo con la discretizzazione della variabile indipendente, dividendo l'intervallo $[t_A, t_B]$ in N intervallini equispaziati; se h è il passo di discretizzazione, abbiamo $t_i = t_A + i h$, per $i = 0, 1, 2, \dots, N$, con $t_0 = t_A$ e $t_N = t_B$. Rappresentando la derivata $y'(t)$ con la formula delle differenze finite in avanti, ed indicando con w_i l'approssimazione numerica al valore della soluzione in t_i , cioè $y(t_i) \approx w_i$, otteniamo

$$\frac{w_{i+1} - w_i}{h} = f(t_i, w_i) + O(h),$$

dove abbiamo calcolato il membro di destra dell'equazione differenziale in t_i . Sopprimendo il termine di errore ed esplicitando w_{i+1} :

$$w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i),$$

che, con la condizione iniziale $w_0 = y(t_A) = \alpha$, fornisce tutti i valori w_i , cioè l'approssimazione numerica alla soluzione dell'equazione differenziale.

Errore nel metodo di Eulero

Ricordiamo che le formule alle differenze finite in avanti utilizzate qui portano un errore lineare nel passo h :

$$y'(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \frac{h}{2!} y''(\xi).$$

Supponiamo di sapere che la derivata seconda è limitata, cioè che esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|y''(t)| \leq M$$

per $t \in [t_A, t_B]$.

Errore nel metodo di Eulero

Si può allora dimostrare che l'errore nel metodo di Eulero obbedisce alla seguente limitazione:

$$|y(t_i) - w_i| \leq h \frac{M}{2L} \left[e^{L(t_i - t_A)} - 1 \right]$$

dove L è la costante di continuità lipschitziana della f rispetto ad y . Non è detto che si riesca sempre a trovare la costante M e quindi a trovare un limite realistico per l'errore.

L'errore diminuisce linearmente con il passo h , quindi scegliendo passi più piccoli la precisione del metodo migliora. Attenzione però: nella formula per l'errore non si è tenuto conto degli errori di arrotondamento, dovuti alla rappresentazione dei numeri in virgola mobile. Scegliendo passi h molto piccoli, aumenta anche il numero di valutazioni della funzione, e l'accumulo degli errori di arrotondamento porta ad una perdita di precisione. In pratica, esiste un h minimo al di sotto del quale non si deve scendere.

Il metodo di Eulero è poco preciso ma estremamente semplice da implementare.

Metodi di Runge-Kutta

- Vogliamo risolvere il problema

$$y'(t) = f(t, y),$$

$t \in [t_A, t_B]$ con la condizione iniziale $y(t_A) = \alpha$, con uno schema di ordine superiore rispetto a quello di Eulero.

Ricaveremo una famiglia di algoritmi seguendo una strada diversa da quella vista in precedenza.

- Intanto, ricordiamo la variabile t discretizzata, con $t_i = i h$, per $i = 0, 1, 2, \dots, N$, e $t_0 = t_A$ e $t_N = t_B$ e che indichiamo con w_i l'approssimazione numerica ad $y(t_i)$.
- Supposto noto il valore w_i all'istante t_i , possiamo integrare l'equazione differenziale da t_i a t_{i+1} ottenendo in modo esatto

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

Metodi di Runge-Kutta

- A questo punto, a seconda dell'approssimazione che usiamo per calcolare l'integrale, otteniamo uno schema diverso;
- per ottenere uno schema con errore più piccolo rispetto allo schema di Eulero, dovremo pagare il prezzo di un maggior numero di valutazioni della funzione f ; tale numero, s , viene detto **numero di stadi del metodo** ed il corrispondente algoritmo viene detto **metodo di Runge-Kutta ad s stadi**;
- in realtà, è più utile classificare i metodi di Runge Kutta a seconda dell'ordine dell'errore, e quindi si parla di metodo di ordine n quando l'errore è di ordine $O(h^n)$;
- vedremo i casi con $s = 1$ (che restituisce il metodo di Eulero), $s = 2$ (Runge-Kutta a due stadi, RK2, di second'ordine) ed $s = 4$ (Runge-Kutta a quattro stadi, RK4, di quart'ordine).

Metodo di Runge-Kutta ad uno stadio

Con la posizione

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + h f(t_i, w_i) + O(h^2)$$

abbiamo il metodo ad uno stadio che restituisce il metodo di Eulero.

Metodo di Runge-Kutta a due stadi

È facile vedere che, calcolando l'integrale usando il valore della funzione nel punto medio dell'intervallo, l'errore diventa del terz'ordine:

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_{i+1/2}\right) + O(h^3)$$

Metodo di Runge-Kutta a due stadi

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + h f(t_i + (h/2), w_{i+1/2}) + O(h^3)$$

dove si è indicato con $w_{i+1/2}$ l'approssimazione numerica alla soluzione per $t_i + h/2$. Quest'ultima può essere calcolata con un passo del metodo di Eulero,

$$w_{i+1/2} = w_i + (h/2) f(t_i, w_i) + O(h^2).$$

Sopprimendo l'errore ed introducendo

$$k_1 \equiv f(t_i, w_i) \quad k_2 \equiv f(t_i + (h/2), w_i + (h/2) k_1),$$

otteniamo infine il metodo di Runge-Kutta a due stadi:

$$w_{i+1} = w_i + h k_2$$

Metodo di Runge-Kutta a quattro stadi

- Usando questa volta la regola di Simpson abbiamo

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + \frac{h}{3} [f(t_i, w_i) + 4f(t_i + h/2, w_{i+1/2}) + f(t_i + h, w_{i+1})] + O(h^5)$$

- Con opportune approssimazioni a $w_{i+1/2}$ e w_{i+1} , si perviene alla regola di Runge Kutta del quart'ordine

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Metodo di Runge-Kutta a quattro stadi

dove

$$k_1 = f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h/2, w_i + (h/2) k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + h/2, w_i + (h/2) k_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, w_i + h k_3)$$

Se la soluzione è di classe C^5 , l'errore del metodo è $O(h^4)$.

Mathematica file ODE.nb

Errore di troncamento

I metodi di Eulero e di Runge-Kutta visti sopra si possono scrivere in generale nella forma

$$\begin{aligned}w_{i+1} &= w_i + h \phi(t_i, w_i) \\w_0 &= \alpha.\end{aligned}$$

Negli schemi di questo tipo, detti anche **metodi alle differenze finite**, si introduce l'**errore di troncamento locale**, $\tau_{i+1}(h)$, che è l'errore che si ottiene se si sostituisce la soluzione esatta all'equazione differenziale discretizzata. Con la notazione $y_i = y(t_i)$, abbiamo esplicitamente

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h \phi(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i)$$

L'errore di troncamento dipende dall'equazione differenziale, dal metodo usato e dal passo di discretizzazione.

Stabilità, convergenza e consistenza

- Un metodo numerico si dice **consistente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i(h) = 0;$$

per ogni i ;

- un metodo numerico si dice **convergente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_i = y(t_i);$$

per ogni i ;

- un metodo numerico si dice **stabile** se la soluzione numerica rimane limitata.

Se uno schema numerico è consistente, allora esso è convergente se e solo se è stabile.

Errore di troncamento

- Per il metodo di Eulero abbiamo $\phi(t_i, y_i) = f(t_i, y_i)$ e si vede facilmente (anche dall'espressione del metodo di Runge-Kutta ad uno stadio) che $\tau_{i+1}(h) = O(h)$;
- per il metodo di Runge-Kutta a due stadi vediamo subito che $\tau_{i+1}(h) = O(h^2)$;
- per il metodo di Runge-Kutta a quattro stadi invece $\tau_{i+1}(h) = O(h^4)$.

Questo giustifica le nostre affermazioni sull'ordine dei vari metodi visti sopra.

Equazioni del second'ordine

- Qui ci occuperemo della soluzione di equazioni differenziali del tipo

$$y''(x) = p(x) y'(x) + q(x) y(x) + r(x),$$

con le condizioni al contorno $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, di cui vogliamo determinare la soluzione per via numerica nell'intervallo $a \leq x \leq b$.

- Per fare questo, iniziamo discretizzando la variabile indipendente come fatto in precedenza per i problemi ai valori iniziali: $\{x_i\}_{i=0}^N$, con $x_i = a + h i$.
- Introduciamo quindi un'approssimazione alle differenze finite per gli operatori differenziali, prestando attenzione ad usare approssimazioni dello stesso ordine per la derivata prima e per la derivata seconda.

- Per costruire uno schema del second'ordine adotteremo le formule alle differenze finite date da

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

- Introducendo le approssimazioni numeriche w_i alla soluzione $y(x_i)$ come fatto in precedenza, indicando con $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ ed $r_i = r(x_i)$ e sostituendo le approssimazioni numeriche nell'equazione, otteniamo:

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q_i w_i + r_i$$

- Quest'ultima relazione può essere usata solo per i punti interni, quindi $i = 1, 2, \dots, N - 1$, mentre per $x_0 = a$ e per $x_N = b$ useremo le condizioni al contorno.
- Organizzando le incognite w_0, w_1, \dots, w_N in un vettore incognito $\mathbf{w} = (w_0, w_2, \dots, w_N)$ e moltiplicando le equazioni per $2h^2$, otteniamo il sistema algebrico lineare

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

con \mathbf{A} e \mathbf{b} dati da

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 2 + h p_1 & -2(2 + h^2 q_1) & 2 - h p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 + h p_2 & -2(2 + h^2 q_2) & 2 - h p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 + h p_{N-2} & -2(2 + h^2 q_{N-2}) & 2 - h p_{N-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2 + h p_{N-1} & -2(2 + h^2 q_{N-1}) & 2 - h p_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2h^2 r_1 \\ 2h^2 r_2 \\ \dots \\ 2h^2 r_{N-2} \\ 2h^2 r_{N-1} \\ \beta \end{pmatrix}$$

La matrice \mathbf{A} è tridiagonale, quindi si possono usare le tecniche numeriche per la risoluzione dei sistemi tridiagonali.