Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

Sede di Fermo

Corso di Calcolo Numerico

6 - METODI DIRETTI PER I SISTEMI LINEARI

Lucio Demeio
DIISM

Lucio Demeio
DIISM

Introduzione algebrica

Lucio Demeio
DIISM

Formulazione matriciale

Sappiamo che un sistema lineare, di m equazioni in n incognite,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

può essere rappresentato in forma matriciale, come

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{A}$ è la matrice dei coefficienti, data da

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right)$$

Introduzione algebrica

Lucio Demeio
DIISM

Formulazione matriciale

mentre **x** e **b** sono i vettori colonna contenenti le incognite ed i termini noti, dati da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Spesso indicheremo con $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, ..., b_m)$ i vettori riga, trasposti di **x** e **b**. La matrice $m \times (n+1)$ data da

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

è detta **matrice orlata** o **matrice completa**.

Introduzione algebrica

Theorem (Teorema di Rouche'-Capelli)

Il sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ha soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ *ed il rango della matrice completa* $\mathbf{B}$ *sono uguali. Se k è il rango comune alle due matrici, allora le soluzioni del sistema formano uno spazio affine di dimensione $n-k$ (cioè il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni). Quando $n=k$, il sistema ammette una ed una sola soluzione (cioè si conviene di porre $\infty^0 = 1$).*

Introduzione algebrica

Lucio Demeio
DIISM

Sistemi con $n = m$

Quando il numero di incognite eguaglia il numero delle equazioni allora il teorema si riduce al seguente:

- Se $det(\mathbf{A}) \neq 0$ il sistema ammette una ed una sola soluzione;
- se $det(\mathbf{A}) = 0$ il sistema ammette infinite soluzioni se la matrice completa ha rango $< n$ (ed uguale al rango di $\mathbf{A}$), se invece ha rango massimo (n) il sistema è incompatibile (non ha nessuna soluzione).

Metodo di Gauss

Sistemi equivalenti

Consideriamo il sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$, ed $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vettori ad n componenti. Indicando con R_j gli elementi della riga j-esima del sistema, sappiamo dall'algebra che le seguenti operazioni conducono ad un sistema equivalente a quello di partenza (cioè con la stessa soluzione):

- moltiplicazione di un'equazione (cioè degli elementi di una riga della matrice completa) per uno scalare, $\lambda R_j \to R_j$;
- scambio di due equazioni (righe della matrice completa), $R_i \leftrightarrow R_j$;
- sostituzione di un'equazione (di una riga) con una sua combinazione lineare con altre equazioni (righe), ad esempio $\alpha R_i + \beta R_j \to R_j$ (con $\beta \neq 0$).

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- L'eliminazione di Gauss consiste nell'eseguire una successione di operazioni tra quelle descritte sopra fino a porre la matrice dei coefficienti in forma triangolare.
- Come esempio consideriamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 & = & -2 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

- Le operazioni $R_1 + R_2 \to R_2$ e $3\,R_1 - 2\,R_3 \to R_3$ trasformano il sistema in

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ x_2 + 5\,x_3 & = & 5 \end{array} \right.$$

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- $$\left\{\begin{array}{rcl} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ x_2 + 5\,x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

- Ora $R_2 - 2\,R_3 \to R_3$ trasforma il sistema in

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ -8\,x_3 & = & -11 \end{array}\right.$$

- Una volta ridotto in questa forma, il sistema può essere risolto facilmente per **sostituzione all'indietro**:

$$\begin{aligned} x_3 &= 11/8 \\ x_2 &= (-1 - 2\,x_3)/2 = -15/8 \\ x_1 &= (1 + x_2 - 3\,x_3)/2 = -5/2 \end{aligned}$$

Metodo di Gauss

Lucio Demeio
DIISM

Eliminazione di Gauss

La procedura vista ora può anche essere eseguita semplicemente sulla matrice orlata; nell'esempio precedente avremmo la successione:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 \end{pmatrix}$$

Mathematica file Sistemi1.nb

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

La procedura ora può essere formulata in generale.

- Data la matrice orlata

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

  al primo passo sostituiamo la riga R_j, $j = 2, 3, ..., n$, con la combinazione lineare $R_j - a_{j1} \, R_1 / a_{11}$, ottenendo così zero come primo elemento di ogni riga dopo la prima; indicando sempre con R_j la riga j-esima della matrice così ottenuta, al secondo passo sostituiamo la riga R_j, $j = 3, 4, ..., n$, con la combinazione lineare $R_j - a_{j2} \, R_2 / a_{22}$, ottenendo così zero anche come secondo elemento di ogni riga dopo la seconda; e così via fino a rimanere con un solo elemento nell'ultima riga.

Metodo di Gauss

Scambio di righe

- Gli elementi diagonali a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} che si vengono via via generando nella procedura sopra descritta vengono detti **pivot**. È evidente che il metodo di Gauss, così come esposto nelle righe precedenti, fallisce quando uno dei pivot si annulla, cioè se al k-esimo passo della procedura, si ha $a_{kk} = 0$.
- In tal caso, si cerca tra le righe successive la prima che presenta un elemento non nullo nella medesima colonna e la si scambia con R_k. Questo metodo viene detto **metodo dello scambio di righe**. Illustriamo il problema con un esempio.
- Se non si riesce a trovare un pivot, vuol dire che il sistema non ha un'unica soluzione (possono essercene infinite oppure nessuna).
- **Vedi Mathematica file Sistemi2.nb**

Metodo di Gauss con pivoting

Lucio Demeio
DIISM

Metodo del pivoting parziale

- Con alcuni sistemi, risulta necessario effettuare lo scambio di righe anche se uno degli elementi sulla diagonale non è rigorosamente nullo, ma soltanto molto piccolo.
- Sia, ad esempio, a_{kk} questo elemento. In tal caso, si cerca tra le righe successive quella che presenta l'elemento più grande (in valore assoluto) nella medesima colonna e la si scambia con R_k. Questo metodo viene detto **metodo del pivoting parziale**. Illustriamo il problema con un esempio.
- **Vedi Mathematica file Sistemi3.nb**

Metodo di Gauss con pivoting

Lucio Demeio
DIISM

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Con alcuni sistemi, il metodo del pivoting parziale non è sufficiente. Si ricorre allora al **metodo del pivoting parziale riscalato**
- Il metodo è del tutto simile a quello del pivoting parziale, solo che la ricerca della riga con cui effettuare lo scambio avviene determinando il pivot che ha il rapporto massimo con gli elementi della propria riga.
- Illustriamo il metodo solo relativamente al primo passo, poi si procede allo stesso modo. Ricordiamo che, al primo passo, lo scopo dell'eliminazione di Gauss è di ottenere degli zeri nella prima colonna dalla seconda riga in poi.
- ...

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Sia s_i il massimo elemento (in valore assoluto) della riga $i-$esima, cioè $s_i = \max_{j=1,n} |a_{ij}|$, per $i = 1, ..., n$; per ogni riga, calcoliamo il rapporto $|a_{i1}|/s_i$ e sia p la riga per cui questo rapporto è massimo;
- allora effettuiamo lo scambio $R_1 \leftrightarrow R_p$.
- È più difficile a spiegarsi che a farne un esempio! **Vedi Mathematica file Sistemi3.nb**