Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

Sede di Fermo

Corso di Calcolo Numerico

3 - PROBLEMI DI INTERPOLAZIONE

Lucio Demeio
DIISM

Introduzione

Problemi di interpolazione

- Supponiamo di avere un insieme di dati che rappresentano misurazioni della temperatura in una certa località durante il mese di luglio con cadenza bisettimanale.
- Rappresentiamo tali dati nella seguente tabella:

Giorno	Temperatura
1	27.1
8	27.2
15	23.5
22	28.0
29	29.1

- Supponiamo di voler conoscere la temperatura in un giorno del mese diverso da quelli tabulato, o di dover utilizzare la temperatura in un modello che la richiede continua, o di voler predire la temperatura più avanti nel tempo.
- Dobbiamo costruire una funzione continua che passi per i punti della tabella: **interpolazione!**

Interpolazione polinomiale

Problemi di interpolazione

- Una classe di funzioni continue molto usate nei problemi di interpolazione sono i polinomi.
- Sappiamo che per $n+1$ punti assegnati, $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ passa uno ed un solo polinomio $P_n(x)$ di grado n.

Approssimazione polinomiale delle funzioni

Una proprietà importante dei polinomi è che possono approssimare bene quanto si vuole una qualunque funzione continua su un intervallo chiuso. In particolare vale il seguente teorema:

Theorem (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora esiste un polinomio $P(x)$ tale che, per ogni $x \in [a, b]$, si ha $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Interpolazione di Lagrange

Polinomio interpolatore di Lagrange

- Supporremo nel seguito che le y_i siano i valori di una funzione nei punti x_i, chiamati **nodi**: $y_i = f(x_i)$
- Siano $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ $n + 1$ punti del piano cartesiano. Chi è il polinomio di grado n che passa per essi?
- Cominciamo dalle cose semplici, $n = 1$: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$. Allora

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

  Si vede facilmente che $P_1(x_0) = y_0$ e $P_1(x_1) = y_1$.
- $n = 2$: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$. Allora

$$\begin{aligned} P_2(x) \quad = \quad & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ & + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Interpolazione di Lagrange

Polinomio interpolatore di Lagrange

In generale, per $n+1$ punti:

$$P_n(x) = y_0 \, \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} +$$

$$+y_1 \, \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} + ...$$

$$+y_k \, \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)} + ...$$

$$+y_n \, \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}$$

Interpolazione di Lagrange

Notazione

I coefficienti delle y_k si indicano solitamente con $L_{n,k}(x)$ e sono polinomi di grado n:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

così che il polinomio interpolatore di Lagrange si può scrivere come

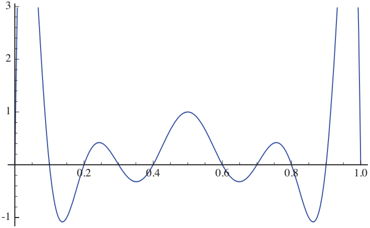
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, L_{n,k}(x)$$

Come son fatti gli $L_{n,k}$?

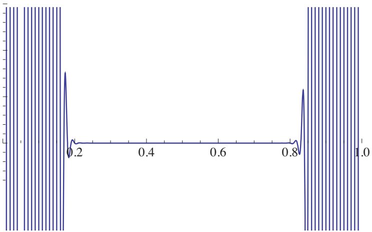
Interpolazione di Lagrange

Esempi degli $L_{n,k}$ su $[0, 1]$

- $n = 10$, $k = 5$

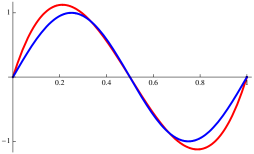


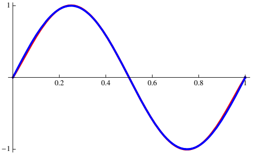
- $n = 100$, $k = 5$

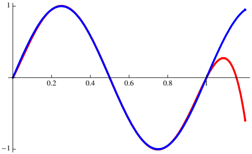


Interpolazione di Lagrange

Esempio

- $f(x) = \sin 2\pi x$ nell'intervallo $[0, 1]$, nodi equispaziati;
- 

$n = 3$
- 

$n = 5$ Mathematica file Interpol1.nb
- 

$n = 5$

Interpolazione di Lagrange

Theorem (Errore)

Sia $f \in C^{n+1}[a,b]$ *e siano* $x_0, x_1, ..., x_n$ *i nodi dell'interpolazione in* $[a,b]$*, distinti ma altrimenti arbitrari. Allora,* $\forall\ x \in [a,b]$ *esiste un numero* $\xi(x) \in [a,b]$ *tale che*

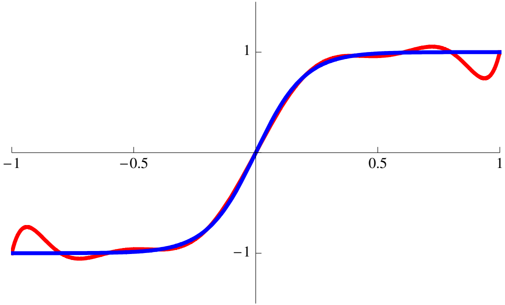
$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$$

Vediamo che $f(x_k) = P_n(x_k)$ (ovvio!!) e che l'errore è proporzionale alla derivata di ordine $n+1$ ed inversamente proporzionale ad $(n+1)!$ Se la derivata $(n+1)$-esima è limitata, allora l'errore va a zero molto rapidamente all'aumentare di n.

Interpolazione di Lagrange

Altro esempio

- $f(x) = \tanh x$ nell'intervallo $[-1, 1]$, nodi equispaziati;



- $n = 10$
- Mathematica file Interpol1.nb

Differenze divise

Differenze divise

Un metodo molto usato per la generazione del polinomio interpolatore è quello delle differenze divise.

- Siano $x_k \in [a, b]$, $k = 0, n$ i nodi e sia $f(x)$ una funzione continua definita anch'essa in $[a, b]$. Sia inoltre $P_n(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di grado n.
- Il polinomio si può scrivere nella forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ a_n\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

  dove gli a_k sono dei coefficienti da determinare.
- Sostituendo x_0 al posto di x, i vede subito che

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

Differenze divise

Differenze divise

- Sostituiamo ora x_1 al posto di x:

$$f(x_1) = a_0 + a_1 (x_1 - x_0) \quad \text{ovvero}$$
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Continuando:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_2-x_1}\left(\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0} - 1\right)}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

Differenze divise

Lucio Demeio
DIISM

Differenze divise

Queste espressioni si possono scrivere più sinteticamente introducendo le **differenze divise** per la funzione f. La definizione delle differenze divise è induttiva:

- Diff. divisa di ord. **ZERO**: $f[x_i] = f(x_i)$;
- Diff. divisa di ord. **UNO**:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- Diff. divisa di ord. **DUE**:

$$f[x_i, x_{i+1}, f_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$
$$= \frac{f(x_{i+2}) - 2\, f(x_{i+1}) + f(x_i)}{x_{i+2} - x_i}$$

Differenze divise

Differenze divise

- La differenza divisa di ordine UNO può essere vista come un rapporto incrementale della funzione, tra x_i e x_{i+1};
- La differenza divisa di ordine DUE può essere vista come un rapporto incrementale della derivata della funzione, tra x_i e x_{i+2} (rapporto incrementale secondo);
- Vedremo in seguito, che i rapporti incrementali si possono usare per approssimare numericamente le derivate; quindi, le differenze divise di ordine UNO approssimano la derivata prima, quelle di ordine DUE la derivata seconda;
- Diff. divisa di ord. **k**:

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Differenze divise

Differenze divise

Con queste definizioni, possiamo allora scrivere che

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0) = f[x_0] \\
a_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \\
a_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2] \\
&\ldots \\
a_k &= f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]
\end{aligned}
$$

Il polinomio interpolatore si può dunque scrivere come

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k]\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

detta **formula di interpolazione di Newton alle differenze divise**

Differenze divise

Table 3.7

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Mathematica file DiffDiv1.nb

Differenze divise

Differenze divise - Legame con le derivate

Dal Teorema di Lagrange: se $f(x)$ è derivabile, $\exists \xi \in [x_0, x_1]$ tale che

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$$

Theorem

Sia $f \in C^n[a, b]$ *e siano* $x_0, x_1, ..., x_n$ *i nodi in* $[a, b]$*, distinti ma altrimenti arbitrari. Allora* $\exists \xi \in (a, b)$ *tale che*

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Differenze divise

Proof.

Sia $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Evidentemente $g(x_k) = 0, \forall k$. Per il Teorema di Rolle generalizzato, $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) = 0$. Ma $P_n^{(n)}(x) = n!\, f[x_0, x_1, ..., x_n]$, da cui la tesi. □

Teorema di Rolle generalizzato

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, di classe $C^n[a, b]$, se esistono $n + 1$ punti, $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ tali che $f(x_k) = 0$, $k = 0, ..., n$, allora esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che $f^n(\xi) = 0$.

Differenze divise

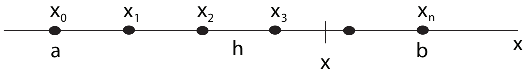
Differenze divise - Nodi equispaziati

- Siano ora i nodi $(x_0, x_1, ..., x_n)$ uniformemente distribuiti in $[a, b]$, cioè $x_{i+1} - x_i = h = cost.$, con , $x_0 = a$ e $x_n = b$, ed $h = (b - a)/n$ è detto **passo di discretizzazione**.
- Allora possiamo scrivere che

$$x_i = x_0 + i\,h \qquad x_i - x_j = (i - j)\,h$$

- Se $x \in [a, b]$, possiamo scrivere $x = x_0 + s\,h$, dove s è un numero reale con $0 \leq s \leq n$;

$$s = 0 \quad \rightarrow x = a, \qquad s = i \rightarrow x = x_i, \qquad s = n \rightarrow x = b$$
$$i < s < i + 1 \rightarrow x_i < x < x_{i+1}$$



Differenze divise

Notazione binomiale

- Avremo dunque

$$
\begin{aligned}
& x - x_0 = s\,h, \qquad x - x_1 = (s-1)\,h \\
& (x-x_0)(x-x_1) = s(s-1)\,h^2 \\
& (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_k) = s(s-1)...(s-k)\,h^{k+1}
\end{aligned}
$$

- Il polinomio interpolatore di Lagrange diventa allora

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = P_n(x_0+sh) = {} & f[x_0] + s\,h\,f[x_0,x_1] \\
& + s(s-1)\,h^2\,f[x_0,x_1,x_2] + ... \\
& + s(s-1)...(s-n+1)\,h^n\,f[x_0,x_1,...,x_n] \\
& = \sum_{k=0}^{n} s(s-1)...(s-k+1)\,h^k\,f[x_0,x_1,...,x_k]
\end{aligned}
$$

Differenze divise

Notazione binomiale - Differenze divise in avanti

- Ricordando la definizione dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!};$$

- estendendola anche al campo reale, possiamo scrivere

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k!\, h^k\, f[x_0, x_1, ..., x_k]$$

- che è detta **formula alle differenze divise in avanti di Newton**

Differenze divise

Differenze finite in avanti, formula di Newton

- Le formule per le differenze divise si possono mettere in una forma diversa e più utile per sviluppi futuri. A tal scopo introduciamo la **notazione Δ** di Aitken: $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$.
- Abbiamo allora che

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h}\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}$$

$$= \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

Differenze divise

Differenze finite in avanti, formula di Newton

- ed in generale

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{1}{k!\, h^k} \Delta^k f(x_0)$$

- così che il polinomio di Newton può ora essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite in avanti**.

Differenze divise

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- Il polinomio di Newton, invece che

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ a_n\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

può anche essere scritto come

$$P_n(x) = a_n + a_{n-1}(x - x_n) + a_{n-2}(x - x_n)(x - x_{n-1})$$
$$+ \ldots + a_1(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_2)$$
$$+ a_0(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_2)(x - x_1)$$

che equivale a riordinare i nodi di interpolazione all'indietro, $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0)$.

Differenze divise

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- Introducendo il **simbolo** ∇ (nabla) tale che $\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ e le differenze divise all'indietro

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\,\nabla f(x_n)$$
$$...$$
$$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}] = \frac{1}{k!\,h^k}\,\nabla^k f(x_n)$$

- generalizzando i coefficienti binomiali sui reali negativi,

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)...(-s-k+1)}{k!}$$
$$= (-1)^k\,\frac{s(s+1)...(s+k-1)}{k!}$$

Differenze divise

Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- allora il polinomio di Newton può essere scritto come

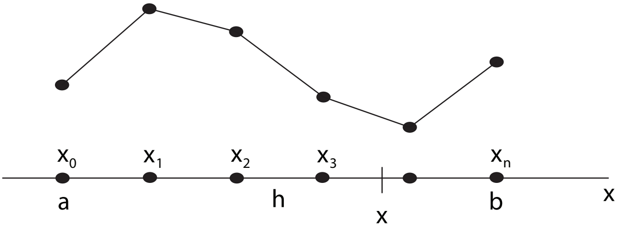
$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite all'indietro**.
- Le differenze finite all'indietro, qui introdotte nel contesto dell'interpolazione (ma noi non le useremo a tale scopo), torneranno utili più avanti.
- Esistono anche le differenze finite centrate, le vedremo in seguito.

Splines

Approssimazione polinomiale a tratti

- Una filosofia diversa per l'approccio al problema dell'interpolazione è quella di costruire una curva polinomiale a tratti, coincidente con i valori della funzione nei nodi, e soddisfacente a condizioni di continuità ai nodi.
- La più semplice è l'interpolazione lineare, che collega i punti di interpolazione con una spezzata.



Splines

Approssimazione polinomiale a tratti

- Con la spezzata non si ha regolarità ai nodi.
- Si fa quindi passare per ogni coppia di nodi un polinomio di grado più alto imponendo condizioni di regolarità.
- L'approssimazione polinomiale a tratti più usata e' quella cubica, detta approssimazione con gli **splines**.

Splines

Approssimazione polinomiale cubica

- Sia f definita nell'intervallo $[a, b]$ e siano $(x_0, x_1, ..., x_n)$ i nodi.
- Sia $S(x)$ un polinomio di terzo grado; indichiamo con $S_j(x)$ il polinomio di terzo grado definito nell'intervallino $[x_j, x_{j+1}]$, con $j = 0, 1, ..., n-1$. Ciascun S_j contiene quattro coefficienti da determinare.
- Le condizioni ai nodi interni sono:

$$
\begin{aligned}
&S_j(x_j) = f(x_j), && j = 0, 1, ..., n-1 \\
&S_{n-1}(x_n) = f(x_n), && \\
&S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}), && j = 0, 1, ..., n-2 \\
&S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}), && j = 0, 1, ..., n-2 \\
&S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}), && j = 0, 1, ..., n-2
\end{aligned}
$$

- (queste sono $4n - 2$ equazioni) ...

Splines

Condizioni agli estremi

... mentre ai nodi estremi si impongono una delle due condizioni:

$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ **detta spline naturale**

$S'(x_0) = f'(x_0) \qquad S'(x_n) = f'(x_n)$ **spline completa**

Splines

Approssimazione polinomiale cubica

- Scriviamo il polinomio j-esimo e le sue derivate come

$$\begin{aligned}
S_j(x) &= a_j + b_j\,(x-x_j) + c_j\,(x-x_j)^2 + d_j\,(x-x_j)^3 \\
S_j'(x) &= b_j + 2\,c_j\,(x-x_j) + 3\,d_j\,(x-x_j)^2 \\
S_j''(x) &= 2\,c_j + 6\,d_j\,(x-x_j), \qquad j = 0,...,n-1
\end{aligned}$$

  e notiamo che $S_j(x_j) = a_j$, $S_j'(x_j) = b_j$ e $S_j''(x_j) = 2\,c_j$ per ogni $j = 0,1,...,n-1$ (*).
- per convenienza, introduciamo $h_j = x_{j+1} - x_j$;
- la condizione $S_j(x_j) = f(x_j)$ dà immediatamente $a_j = f(x_j)$, per $j = 0,1,...,n-1$; siano inoltre $a_n = f(x_n)$, $b_n = S'(x_n)$ e $c_n = S''(x_n)/2$;
- la condizione $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ dà allora $a_{j+1} = a_j + b_jh_j + c_jh_j^2 + d_jh_j^3$ per $j = 0,1,...,n-1$.
- ...

Splines

- ... la condizione $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ dà $b_{j+1} = b_j + 2\,c_j h_j + 3\,d_j h_j^2$ per $j = 0, 1, ..., n-1$.
- ... la condizione $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ dà $c_{j+1} = c_j + 3\,d_j h_j$ per $j = 0, 1, ..., n-1$.

Alla fine otteniamo il sistema

$$
\begin{aligned}
a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \\
b_{j+1} &= b_j + 2\,c_j h_j + 3\,d_j h_j^2 \\
c_{j+1} &= c_j + 3\,d_j h_j
\end{aligned}
$$

per $j = 0, 1, ..., n-1$. Assieme alle condizioni (*) viste prima, queste danno un sistema algebrico lineare nei coefficienti c_j.

Splines

- Ricaviamo d_j dalla terza equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}\,(2\,c_j + c_{j+1})$$
$$b_{j+1} = b_j + h_j\,(c_j + c_{j+1}) \qquad (*)$$

- Dalla prima di queste ricaviamo b_j:

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - h_j\,\frac{2\,c_j + c_{j+1}}{3} \qquad \text{da cui}$$
$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1}\,\frac{2\,c_{j-1} + c_j}{3}$$

- Sostituendo nella (*) con $j \to j-1$ otteniamo il sistema

Splines

$$h_{j-1}\,c_{j-1} + 2\,(h_{j-1} + h_j)\,c_j + h_j\,c_{j+1} = 3\,\frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - 3\,\frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}}$$

per $j = 1, 2, ..., n-1$.

- I membri di destra sono noti, in quanto $a_j = f(x_j)$ e $h_j = x_{j+1} - x_j$.
- Si tratta di un sistema del tipo $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con c_0 e c_n assegnati dalle condizioni agli estremi: $c_0 = c_n = 0$ per la spline naturale, mentre per la spline completa vengono assegnati $b_0 = f'(a)$ e $b_n = f'(b)$.
- La matrice $\mathbf{A}$ è tridiagonale e soddisfa le proprietà richieste per l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema; quindi la soluzione è unica sia per la spline naturale che per la spline completa.

Splines

Spline naturale

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\,\frac{a_2-a_1}{h_1} - 3\,\frac{a_1-a_0}{h_0} \\ ... \\ 3\,\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\,\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & ... & ... & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Splines

Spline completa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3\,\frac{a_1-a_0}{h_0} - 3\,f'(a) \\ 3\,\frac{a_2-a_1}{h_1} - 3\,\frac{a_1-a_0}{h_0} \\ \dots \\ 3\,\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\,\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3\,f'(b) - 3\,\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\,h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2\,h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Splines

Theorem (Stima dell'errore)

Sia $f \in C^4[a,b]$ *e sia*

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Allora, se $S(x)$ *è la spline completa (unica) per la funzione* f *sui nodi* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ *allora*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5\,M}{384} \max_{0\leq j\leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4$$

Applicazioni

La costruzione degli algoritmi di interpolazione tramite splines implica la risoluzione di un sistema lineare, che vedremo in futuro. Per ora accontentiamoci di qualche esempio elementare.