

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

Sede di Fermo

Corso di Calcolo Numerico

1 - INTRODUZIONE

Lucio Demeio
DIISM

Introduzione

Analisi degli errori

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden, *Numerical Analysis, Brooks/Cole, 9th Ed. 2009*** (ma anche ...);
A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.
- Indirizzo e-mail: l.demeio@univpm.it
- Sito web: pagina web ufficiale del docente sul sito d'ateneo;
- Vedi anche il sito sul server dell'Area Matematica all'indirizzo
- <http://www.dipmat.univpm.it/~demeio/didattica>
- Orario di ricevimento: lunedì 14.30-16.30 e mercoledì 9.30-11.30.

Octave

- Open source
- Scaricabile da
<http://www.gnu.org/software/octave/download.html>
- Documentazione (in parte) da mio sito presso
<http://dipmat.unian.it/~demeio/public/Octave/>

Altri software

- Matlab (\$)
- Mathematica (\$)
- Sage (open source)

Obiettivi

- Che cos'è il calcolo numerico?
- Molti problemi fisici, ingegneristici ed economici vengono descritti da modelli matematici di vario tipo: equazioni algebriche, equazioni differenziali, autovalori ed autovettori, etc.
- Il più delle volte non possediamo una soluzione analitica del problema e bisogna trovarne un'approssimazione.
- Due strade: approssimazioni analitiche (serie di Taylor, metodi perturbativi) o metodi numerici
- I metodi numerici consistono (in generale) di algoritmi per costruire successioni (numeriche o di funzioni) che convergono al risultato desiderato

- **Preliminari matematici.** Richiamo ad alcuni concetti di Analisi (successioni, limiti, continuità, teoremi fondamentali).

- **Analisi degli errori.** Errori di troncamento ed errori di arrotondamento.

- **Algoritmi, stabilità e convergenza.**

- **Soluzioni di equazioni in una variabile.** Per esempio:

$$\sin x - \frac{x}{10} = 0$$

$$e^{-x} = x^3.$$

- **Interpolazione ed approssimazione polinomiale.**

Talvolta si conosce una funzione solo su un insieme di punti, e la si vuol estendere ad un intervallo continuo. Oppure l'espressione di una funzione è troppo complicata e si vuole utilizzare un'approssimazione più semplice.

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x) dx$$

dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.

- **Metodi diretti per i sistemi lineari** Per esempio:

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove A è una matrice $n \times n$ non troppo grande.

- **Metodi iterativi nell'algebra** Quando A è una matrice $n \times n$ di grandi dimensioni.
- **Problemi agli autovalori**
- **Sistemi non lineari**
- **Equazioni differenziali ordinarie**

Rappresentazione dei numeri

- In un computer i numeri vengono rappresentati con un numero finito di cifre decimali. Ad esempio $\pi = 3.14159265\dots$ oppure $\sqrt{3} = 1.73205080\dots$ (normalmente 16 o 32 cifre).
- Rappresentazione in virgola mobile: se $y = \pm 0.d_1d_2\dots d_k \times 10^n$, con $1 \leq d_1 \leq 9$ (cioè $d_1 \neq 0$) $0 \leq d_i \leq 9$, $i = 2, 3, \dots, k$ diremo che y è rappresentato in virgola mobile a k **cifre decimali**.
- Per esempio, $p = 0.314159265 \times 10^1$ è la rappresentazione di π a 9 cifre decimali e ...
- ... $y = 0.71283 \times 10^3$ è la rappresentazione di 712.83 a 5 cifre decimali.
- Siano y e z due numeri decimali molto vicini tra loro, p.
es. $y = 0.d_1\dots d_r \alpha_{r+1}\dots \alpha_k \times 10^n$ e
 $z = 0.d_1\dots d_r \beta_{r+1}\dots \beta_k \times 10^n$ in rappr. a k cifre decimali.
Allora $y - z = 0.\gamma_1\dots \gamma_{k-r} \times 10^{n-r}$. Cioè $y - z$ ha una rappresentazione a $k - r$ cifre significative.

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!
- Sia, per esempio, $\sqrt{3} = 1.73$ la rapp. con 3 cifre decimali. Allora $(\sqrt{3})^2 = 2.9929 \rightarrow 2.99$
- **Errore di arrotondamento:** errore commesso usando la rapp. in virgola mobile al posto del valore esatto;
- Errore assoluto $|2.99 - 3| = 0.01$
Errore relativo $|(2.99 - 3)/3| = 0.00333$
- In generale, se p è il valore vero e p^* quello in rapp. decimale,

$$\varepsilon = |p - p^*| \quad \text{errore assoluto}$$

$$\varepsilon_r = \frac{|p - p^*|}{|p|}, p \neq 0 \quad \text{errore relativo}$$

- [Mathematica e Octave files Intro1.nb, Intro1.m](#)

Esempio

Proviamo a risolvere $a x^2 + b x + c = 0$

Sappiamo che

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Siano $a = 1$, $b = 74.23$ e $c = 1$ e lavoriamo con 4 cifre decimali.

[Mathematica](#) e [Octave files Intro2.nb, Intro2.m](#)

Definizione

Un metodo numerico e' costituito da un insieme di algoritmi. Un algoritmo costruisce un'approssimazione numerica alla soluzione di un problema (equazione algebrica o differenziale, integrazione numerica, etc.) mediante una successione di n passi.

Stabilità

Un algoritmo si dice **stabile** se piccoli cambiamenti nelle condizioni iniziali provocano piccole variazioni nel risultato finale.

Crescita dell'errore

- Primo passo: E_0 ;
- **Crescita lineare**: se esiste C t. c. $E_n \approx C n E_0$;
- **Crescita esponenziale**: se esiste $C > 1$ t. c. $E_n \approx C^n E_0$;

Esercizio

La crescita lineare porta in generale ad algoritmi stabili ed è sia inevitabile che accettabile

La crescita esponenziale va evitata e porta ad algoritmi instabili.

Provare a risolvere l'equazione ricorsiva (**Example 3 pag. 33**)

$$p_n = \frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2}$$

con $p_0 = 1$ e $p_1 = 1/3$. Cosa si osserva? La soluzione esatta è $p_n = (1/3)^n$; quella numerica ...

Tasso di convergenza

Sia $\{\beta_n\}$ una successione infinitesima, cioè $\beta_n \rightarrow 0$ e sia $\{\alpha_n\}$ una successione convergente, con $\alpha_n \rightarrow \alpha$.

Se \exists una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente $|\alpha_n - \alpha| \leq K |\beta_n|$ diremo che $\{\alpha_n\}$ converge ad α con **tasso di convergenza** (o ordine di convergenza) $O(\beta_n)$. Scriveremo allora che $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$.

In generale, si sceglie

$$\beta_n = \frac{1}{n^p} \quad *$$

per qualche $p > 0$. La successione $\{\beta_n\}$ indica la “velocità” con cui $\{\alpha_n\}$ converge al suo limite. Con la scelta *, tanto più grande è p tanto più rapidamente $\{\alpha_n\}$ converge ad α .

Esercizio

Determinare il tasso di convergenza delle successioni
(**Example 4 pag. 36**)

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{n^2 + 2}{n^3 + 3} \quad \alpha_n^{(2)} = \frac{n^2 + 2}{n^4 + 3}.$$

Quale delle due converge più rapidamente?

Tasso di convergenza per funzioni

La definizione di tasso di convergenza si generalizza facilmente al caso di funzioni reali di variabile reale.

Sia $G(h)$ una funzione infinitesima e sia $F(h) \rightarrow L$ per $h \rightarrow 0$.

Se \exists una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente

$|F(h) - L| \leq K |G(h)|$ per $h \rightarrow 0$, diremo che $F(h)$ converge ad L con **tasso (ordine) di convergenza** $O(G(h))$.

Scriveremo allora che $F(h) = L + O(G(h))$, $h \rightarrow 0$.

Esercizio

Determinare l'ordine di convergenza delle funzioni (**Example 5 pag. 37**)

$$f(h) = \frac{\sin h}{h} \quad g(h) = \cos h + \frac{1}{2}h^2.$$

Quale delle due converge più rapidamente?