Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 8 settembre 2023

1. (8 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$2\,z^2 - 4\,z + 10 = 0.$$

2. (10 punti) Dati i quattro punti nello spazio

$$P_1 = (1, 2, 3), \quad P_2 = (-2, -1, 0), \quad P_3 = (3, 0, 4), \quad P_4 = (-1, -2, \alpha),$$

dire per quali valori di α essi sono complanari e scrivere l'equazione del piano che li contiene.

3. (12 punti) Si consideri l'insieme dei polinomi

$$\mathcal{V} = \{\alpha\, x^4 + \beta\, x^3 + \gamma\, x + \delta\}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dimostrare che è uno spazio vettoriale e dimostrare che l'insieme di vettori $\mathcal{B} = \{x^4, x^3 - x, x, 1\}$ ne costituisce una base. Determinare i coefficienti del polinomia $2\,x^4 - 3\,x^3 + x + 5$ nella base data.

1) $2z^2 - 4z + 10 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 20 = -16$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

(2) $P_1 = (1, 2, 3)$ $\quad P_2 = (-2, -1, 0)$

$P_3 = (3, 0, 4)$ $\quad P_4 = (-1, -2, \alpha)$

Soluzione:

i vettori $P_2 - P_1$, $P_3 - P_1$, $P_4 - P_1$

devono essere complanari:

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & \alpha-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (\alpha-3)\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(-9) + 4(3) + (\alpha-3)\cdot 12 = 0$$

$$12(\alpha-3) + 30 = 0 \qquad 12\alpha - 6 = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

Equazione del piano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione del piano è:

$$3x+y-4z+7=0$$

Si poteva anche scrivere l'equazione del piano per P_1, P_2, P_3 e poi imporre l'appartenenza di P_4 a tale piano.

3 $V = \{ \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x + \delta \}$

È uno spazio vettoriale:

$$p_1(x) = \alpha_1 x^4 + \beta_1 x^3 + \gamma_1 x + \delta_1$$

$$p_2(x) = \alpha_2 x^4 + \beta_2 x^3 + \gamma_2 x + \delta_2$$

$$p_1 + p_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) x^4 + (\beta_1 + \beta_2) x^3 + (\gamma_1 + \gamma_2) x + (\delta_1 + \delta_2) \in V$$

$$\lambda p_1(x) = (\lambda\alpha_1)x^4 + (\lambda\beta_1)x^3 + (\lambda\gamma_1)x + \lambda\delta_1$$
$$\in V$$

$0 \in V$ con $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

$\mathcal{B} = \{x^4, x^3 - x, x, 1\}$ è una base:

- $\alpha x^4 + \beta(x^3 - x) + \gamma x + \delta = 0$

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + (\gamma - \beta)x + \delta = 0$$

possibile solo con

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

quindi sono linearmente indipendenti.

Sia ora

$$p_1(x) = \alpha_1 x^4 + \beta_1 x^3 + \gamma_1 x + \delta_1$$

un elemento generico di V. Dobbiamo dimostrare che $\exists\ \alpha, \beta, \gamma, \delta$ (unici) t.c

$$p_1 = \alpha x^4 + \beta(x^3 - x) + \gamma x + \delta \quad :$$

$$\alpha_1 x^4 + \beta_1 x^3 + \gamma_1 x + \delta_1 = \alpha x^4 + \beta(x^3 - x) + \gamma x + \delta$$
$$= \alpha x^4 + \beta x^3 + (\gamma - \beta)x + \delta$$

$\alpha = \alpha_1$ $\qquad$ $\gamma - \beta = \gamma_1$

$\beta = \beta_1$ $\qquad$ $\delta = \delta_1$

Cioè $\alpha = \alpha_1$; $\beta = \beta_1$; $\gamma = \gamma_1 + \beta_1$; $\delta = \delta_1$

Quindi $\mathcal{B}$ è una base.

Se $f_1(x) = 2x^4 - 3x^3 + x + 5$

abbiamo $\alpha = 2$ $\beta = -3$ $\gamma = -2$ $\delta = 5$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 8 settembre 2023

1. (9 punti) Determinare le soluzioni del sistema omogeneo
$$\begin{aligned} x + 2\,y + 3\,z &= 0 \\ 2\,x - y + 4\,z &= 0 \\ 3\,x + y + \alpha\,z &= 0 \end{aligned}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. (10 punti) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P_0 = (1, 2, 3)$ e parallela alla retta passante per i punti $P_1 = (-2, -1, 0)$ e $P_2 = (3, 0, 3)$.

3. (11 punti) Determinare nucleo e immagine dell'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$\phi(x, y) = \{x - y + z, x + y, 2x + z\}.$$

1

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 & R_1 \\ 2x-y+4z=0 & R_2 \\ 3x+y+\alpha z=0 & R_3 \end{cases}$$

Notiamo che $R_1+R_2-R_3=(0,\ 0,\ 7-\alpha)$

quindi per $\alpha \neq 7$ $\exists!$ la soluzione nulla

Per $\alpha = 7$:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 3z = -x & (1) \\ y - 4z = 2x & (2) \end{cases}$$

$(1) - 2(2)$: $\quad 11z = -5x \qquad z = -\frac{5}{11}x$

$$y = 4z + 2x = -\frac{20}{11}x + 2x = \frac{2}{11}x$$

$\left(x, \frac{2}{11}x, -\frac{5}{11}x\right)$ sono le soluzioni

2

$P_0 = (1, 2, 3)$ $\qquad$ $P_1 = (-2, -1, 0)$

$P_2 = (3, 0, 3)$

Retta per P_1 e P_2: $\qquad$ $l = 5$

$m = 1$

$n = 3$

Retta cercata: $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

③ $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\phi(x,y,z) = (x-y+z,\ x+y,\ 2x+z)$$

Sia $w = \phi(v)$ con $v = (x,y,z)$

Notiamo che $w_1 + w_2 = w_3$

L'immagine è quindi

$$\mathrm{Im}(\phi) = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : w_3 = w_1 + w_2\}$$

o ovvero $Im(\phi) = \{(v_1, v_2, v_1+v_2)\}$

ed ha dimensione 2

Nucleo : $\begin{cases} x-y+z = 0 \\ x+y = 0 \\ 2x+z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} z = -2x \\ y = -x \end{cases}$ Cioè : $Ker(\phi) = (x, -x, -2x)$