Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

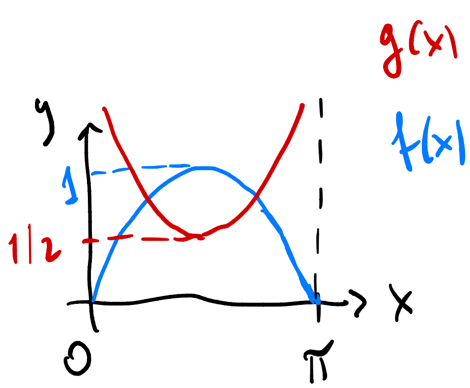
Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 5 maggio 2023

Sono date le funzioni

$$f(x) = \sin x; \qquad g(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2}$$

Dimostrare, utilizzando i valori delle funzioni e le loro derivate, che si intersecano in due punti nell'intervallo $x \in [0, \pi]$; determinare tali intersezioni usando il metodo di bisezione con tolleranza assoluta di 10^{-6}.



$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to \pi^-} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & \text{in } x = \frac{\pi}{2} \\ > 0 & \text{per } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Siccome $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

mentre $f(\pi/2) = 1$ e $g(\pi/2) = \frac{1}{2}$

$\exists\ x_0$, con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, tale che

$f(x_0) - g(x_0) < 0$ mentre $f(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} > 0$

(x_0 è un numero piccolo vicino a $x = 0$)

$\Rightarrow$ per il teorema degli zeri $\exists$ <u>almeno</u> uno <u>zero</u> nell'intervallo $[x_0, \pi/2]$

È unico? Sì, perchè

$$(f-g)' = \cos x + \frac{\cos x}{\sin^2 x} > 0 \quad \text{in } (0, \pi/2)$$

quindi la funzione $f(x) - g(x)$ è monotona crescente.

Ragionamento analogo nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

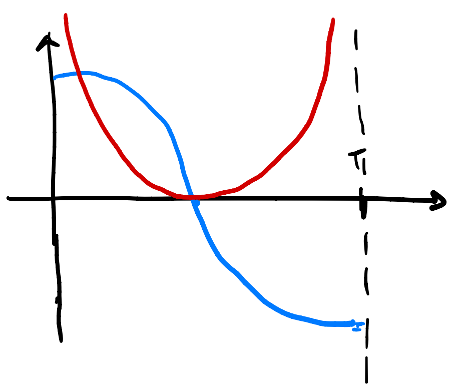
Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 5 maggio 2023

Sono date le funzioni

$$f(x) = \cos x; \qquad g(x) = \frac{1}{\sin x} - 1$$

Dimostrare, utilizzando i valori delle funzioni e le loro derivate, che si intersecano in due punti nell'intervallo $x \in [0, \pi]$; determinare tali intersezioni usando il metodo di bisezione con tolleranza assoluta di 10^{-6}.



$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to \pi^-} g(x) = +\infty$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$g'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & \text{per } x = \pi/2 \\ > 0 & \text{per } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Siccome $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e

$\lim_{x\to\pi^-} g(x) = +\infty$, $f(\pi) < 0$

con $(g-f)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \cos x > 0$

per $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

non ci sono intersezioni nell'intervallo

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Inoltre, ricorda

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

$\exists\ x_0$, con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, tale che

$f(x_0) - g(x_0) < 0$ mentre $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

Quindi in $(0, \pi/4)$ c'è <u>almeno</u> uno zero

È unico perché $f-g$ è monotona crescente