Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 21 aprile 2023

1. (4 punti) È dato il numero complesso
$$a + b\,i + c\,i^2 + d\,i^3 + e\,i^4$$
con a, b, c, d, e coefficienti reali. Quale relazione deve sussistere tra i coefficienti affinchè il numero dato sia reale?

2. (5 punti) Calcolare l'inversa della matrice della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Determinare i valori di α e β per cui i vettori
$$\vec{u} = \beta\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 3\,\alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{v} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = \beta\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}$$
sono complanari con u e v fra loro ortogonali.

4. (6 punti) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $P_1 = (1, -1, 4)$ e $P_2 = (2, 1, -3)$ e perpendicolare al piano di equazione
$$x + 4\,y - 4\,z + 1 = 0$$

5. (4 punti) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Dire se il sottoinsieme $V_1 \subset V$ dato da
$$V_1 = \left\{ \frac{1}{a}\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d \in V : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$
è un sottospazio di V.

6. (6 punti) Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \mathbb{R}^2$ e sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare
$$\phi(x, y, z, w) = (x - z,\, y + w)$$
Determinarne il nucleo ed una sua base.

(1) $a + bi + ci^2 + di^3 + ei^4 = (a - c + e) + (b - d)\,i$

reale se $\boxed{b = d}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{Det}(A) = -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \\ 11 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -\frac{11}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(3) $\begin{vmatrix} \beta & 2 & 3\alpha \\ 3 & 1 & \alpha \\ \beta & 5 & \alpha \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ e $\quad 3\beta + 2 + 3\alpha^2 = 0$

$$\begin{cases} \alpha\left\{3(15-\beta)-(5\beta-2\beta)+(\beta-6)\right\}=0 \\ 3\beta+2+3\alpha^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(39-5\beta)=0 \\ 3\beta+2+3\alpha^2=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 3\beta+2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} \beta=39/5 \\ \frac{117}{5}+2+3\alpha^2=0 \end{cases} \quad \text{NO sol}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=0, \quad \beta=-\frac{2}{3}}$$

4) Retta per P_1 e P_2:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-7} \longrightarrow \begin{cases} 2(x-1)-(y+1)=0 \\ -7(x-1)-(z-4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -7x - z + 11 = 0 \end{cases}$$

Fascio di piani

$$\lambda(2x - y - 3) + \mu(-7x - z + 11) = 0$$

$$(2\lambda - 7\mu)x - \lambda y - \mu z - 3\lambda + 11\mu = 0$$

Perpendicolarità con il piano dato:

$$2\lambda - 7\mu + 4(-\lambda) - 4(-\mu) = 0 \longrightarrow -2\lambda - 3\mu = 0$$

Prendiamo $\lambda = 1 \longrightarrow \mu = -\frac{2}{3}$

Il piano cercato è: $2x - y - 3 - \frac{2}{3}(-7x - z + 11) = 0$

$$6x - 3y - 9 + 14x + 2z - 22 = 0$$

$$\boxed{20x - 3y + 2z - 31 = 0}$$

(5) V_1 non è un sottospazio perché non contiene l'elemento nullo.

(6) $\varphi(x,y,z,w) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$

Due variabili libere, ad esempio x e y:

$$Ker(\varphi) = \{(x,y,z,w) : z = x, \; w = -y\}$$

Base: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 21 aprile 2023

1. (4 punti) È dato il numero complesso

$$a + b\,i + c\,i^2 + d\,i^3 + e\,i^4$$

con a, b, c, d, e coefficienti reali. Quale relazione deve sussistere tra i coefficienti affinchè il numero dato sia immaginario?

2. (5 punti) Calcolare l'inversa della matrice della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Determinare i valori di α e β per cui i vettori

$$\vec{u} = \hat{\mathbf{i}} + 2\,\beta\,\hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{v} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\,\beta\,\hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}$$

sono complanari con u e v fra loro ortogonali.

4. (6 punti) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $P_1 = (-1, 1, 2)$ e $P_2 = (-2, -1, 3)$ e perpendicolare al piano di equazione

$$4\,x + y - 2\,z - 1 = 0$$

5. (4 punti) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Dire se il sottoinsieme $V_1 \subset V$ dato da

$$V_1 = \left\{ a\,x^3 + \frac{1}{b}\,x^2 + c\,x + d \in V : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

è un sottospazio di V.

6. (6 punti) Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \mathbb{R}^2$ e sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare

$$\phi(x, y, z, w) = (x - 2\,z + 3\,y,\; x - 2\,z + 3\,y + w)$$

Determinarne il nucleo ed una sua base.

(1) $a+bi+ci^2+di^3+ei^4=(a-c+e)+(b-d)i$

immaginario se $a-c+e=0$ o $\boxed{c=a+e}$

(2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Det}(A)=-4$

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 12 & 4 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 0\\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2\beta & \alpha \\ 3 & 2 & \alpha \\ -1 & 3\beta & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad 3+4\beta+\alpha^2=0$$

$$\begin{cases} \alpha\{9\beta+2-(3\beta+2\beta)+2-6\beta\}=0 \\ 3+4\beta+\alpha^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha(4-2\beta)=0 \\ 3+4\beta+\alpha^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ 3+4\beta=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 4-2\beta=0 \\ 3+4\beta+\alpha^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ 11+\alpha^2=0 \end{cases}$$

NESSUNA SOLUZIONE

$$\boxed{\alpha=0, \ \beta=-\frac{3}{4}}$$

④ Retta per P_1 e P_2 :

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$$

$$\begin{cases} -2(x+1) = -1(y-1) \\ (x+1) = -(z-2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

Fascio ($\lambda=1$ direttamente):

$$2x-y+3+\mu(x+z-1)=0 \longrightarrow (2+\mu)x-y+\mu z+3-\mu=0$$

Perpendicolarità : $4(2+\mu)-1-2\mu=0$

$$2\mu+7=0$$

$$\mu = -\frac{7}{2}$$

Il piano cercato è $\left(2-\frac{7}{2}\right)x - y - \frac{7}{2}z + 3 + \frac{7}{2} = 0$

$$-\frac{3}{2}x - y - \frac{7}{2}z + \frac{13}{2} = 0 \qquad \boxed{3x + 2y + 7z - 13 = 0}$$

5 V_1 non è un sottospazio perché non contiene l'elemento nullo.

⑥ $\Phi(x, y, z, w) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x - 2z + 3y = 0 \\ x - 2z + 3y + w = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2z + 3y = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Due variabili libere, ad es. x e y:

$$z = \frac{x + 3y}{2}$$

$$w = 0$$

Base: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 21 aprile 2023

1. (4 punti) È dato il numero complesso
$$a + b\,i + c\,i^2 + d\,i^3 + e\,i^4$$
con a, b, c, d, e coefficienti reali. Quale relazione deve sussistere tra i coefficienti affinchè il suo argomento sia di $3\,\pi/4$?

2. (5 punti) Calcolare l'inversa della matrice della matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Determinare i valori di α e β per cui i vettori
$$\vec{u} = -\beta\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 3\,\alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{v} = \beta\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}$$
sono complanari con v e w fra loro ortogonali.

4. (6 punti) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $P_1 = (4, 1, -2)$ e $P_2 = (-3, 3, 1)$ e perpendicolare al piano di equazione
$$x + y + 4\,z + 2 = 0$$

5. (4 punti) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Dire se il sottoinsieme $V_1 \subset V$ dato da
$$V_1 = \left\{ a\,x^3 + b\,x^2 + \frac{1}{c}\,x + d \in V : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$
è un sottospazio di V.

6. (6 punti) Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \mathbb{R}^2$ e sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare
$$\phi(x, y, z, w) = (2\,x + 2\,z + 3\,w,\ 2\,x + 2\,z + 3\,w + 3\,y)$$
Determinarne il nucleo ed una sua base.

(1) $a + bi + ci^2 + di^3 + ei^4 = (a - c + e) + (b - d)i$

$\vartheta = 3\pi/4 \Rightarrow \tan\vartheta = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{b-d}{a-c+e} = -1}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Det}(A) = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -8 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5/2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

③ $\begin{vmatrix} -\beta & 2 & 3\alpha \\ \beta & 1 & \alpha \\ 3 & 5 & \alpha \end{vmatrix} = 0$ e $3\beta + 5 + \alpha^2 = 0$

$$\begin{cases} \alpha \{ 3(5\beta - 3) - (-5\beta - 6) + (-\beta - 2\beta) = 0 \\ 3\beta + 5 + \alpha^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha(17\beta - 3) = 0 \\ 3\beta + 5 + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\beta + 5 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 17\beta - 3 = 0 \\ 3\beta + 5 + \alpha^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 3/17 \\ \frac{9}{17} + 5 + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

NESSUNA SOLUZIONE

$$\boxed{\alpha = 0, \ \beta = -\frac{5}{3}}$$

4 Retta per P_1 e P_2 :

$$\frac{x-4}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$$

$$\begin{cases} 2(x-4)+7(y-1)=0 \\ 3(x-4)+7(z+2)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+7y-15=0 \\ 3x+7z+2=0 \end{cases}$$

Fascio ($\lambda=1$ direttamente):

$$2x+7y-15+\mu(3x+7z+2)=0 \longrightarrow (2+3\mu)x+7y+7\mu z-15+2\mu=0$$

Perpendicolarità:
$$2+3\mu+7+28\mu=0$$
$$31\mu+9=0$$

$\mu = -\frac{9}{31}$

$$\begin{array}{r} 310 \\ 155 \\ \hline 465 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 62 \\ 27 \\ \hline 35 \end{array}$$

Il piano cercato è $\left(2-\frac{27}{31}\right)x + 7y - \frac{63}{31}z - 15 - \frac{18}{31} = 0$

$35x + 31\cdot 7y - 63z - 483 = 0$

$$\boxed{5x + 31y - 9z - 69 = 0}$$

5

V_1 non è un sottospazio perché non contiene l'elemento nullo.

6 $\Phi(x, y, z, w) = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2x + 2z + 3w = 0 \\ 2x + 2z + 3w + 3y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 2z + 3w = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Due variabili libere, ad es. x e z:

$$w = -\frac{2x+2z}{3}$$

$$y = 0$$

$$\boxed{\text{Base: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 21 aprile 2023

1. (4 punti) È dato il numero complesso

$$a + b\,i + c\,i^2 + d\,i^3 + e\,i^4$$

con a, b, c, d, e coefficienti reali. Quale relazione deve sussistere tra i coefficienti affinchè il suo argomento sia di $5\,\pi/4$?

2. (5 punti) Calcolare l'inversa della matrice della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Determinare i valori di α e β per cui i vettori

$$\vec{u} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} - 3\,\alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{v} = \beta\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\,\alpha\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = \beta\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}} + \alpha\,\hat{\mathbf{k}}$$

sono complanari con u e w fra loro ortogonali.

4. (6 punti) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $P_1 = (1, 3, 1)$ e $P_2 = (2, 1, 3)$ e perpendicolare al piano di equazione

$$-4\,x + 3\,y + 2\,z - 5 = 0$$

5. (4 punti) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Dire se il sottoinsieme $V_1 \subset V$ dato da

$$V_1 = \left\{ a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + \frac{1}{d} \in V : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

è un sottospazio di V.

6. (6 punti) Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \mathbb{R}^2$ e sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare

$$\phi(x, y, z, w) = (3\,x - 2\,z + w\,3\,x - 2\,z + w - y)$$

Determinarne il nucleo ed una sua base.

, virgola

(1) $a + bi + ci^2 + di^3 + ei^4 = (a - c + e) + (b - d)i$

$\theta = 5\pi/4 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{b-d}{a-c+e} = 1}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Det}(A) = -2$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5/2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

③ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3\alpha \\ \beta & 1 & 3\alpha \\ \beta & 5 & \alpha \end{vmatrix} = 0$ e $3\beta+10-3\alpha^2=0$

$$\begin{cases} \alpha\{-3(4\beta)-3(15-2\beta)+3-2\beta\} \\ 3\beta+10-3\alpha^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha(8\beta+42)=0 \\ 3\beta+10-3\alpha^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ 3\beta+10=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 8\beta+42=0 \\ 3\beta+10-3\alpha^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=-21/4 \\ -\frac{63}{4}+10-3\alpha^2=0 \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha=0, \quad \beta=-\frac{10}{3}}$$

$\rightarrow 23+12\alpha^2=0$

NESS. SOL.

4 Retta per P_1 e P_2 :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

$$\begin{cases} -2(x-1)-(y-3)=0 \\ 2(x-1)-(z-1)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+y-5=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$$

Fascio ($\lambda=1$ direttamente):

$$2x+y-5+\mu(2x-z-1)=0 \longrightarrow (2+2\mu)x+y-\mu z-5-\mu=0$$

Perpendicolarità : $-4(2+2\mu)+3-2\mu=0$

$$-10\mu-5=0$$

$$\mu = -\frac{1}{2}$$

Il piano cercato è $x + y + \frac{1}{2}z - 5 + \frac{1}{2} = 0$

$$2x + 2y + z - 9 = 0$$

5

V_1 non è un sottospazio perché non contiene l'elemento nullo.

⑥ $\Phi(x, y, z, w) = 0 \longrightarrow \begin{cases} 3x - 2z + w = 0 \\ 3x - 2z + w - y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 2z + w = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Due variabili libere, ad es.

x e z:

$w = 2z - 3x$

$y = 0$

$$\boxed{\text{Base: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$