Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 13 febbraio 2023

1. (4 punti) Calcolare modulo e argomento del numero complesso
$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

2. (6 punti) Studiare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} \alpha-2 & \beta & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (5 punti) Dopo aver verificato che i vettori
$$\vec{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 5\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{u} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = 7\,\hat{\mathbf{i}} + 4\,\hat{\mathbf{j}} + 16\,\hat{\mathbf{k}}$$
sono complanari, determinare α e β tali che $\vec{w} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{u}$

4. (4 punti) Determinare l'angolo tra i piani
$$x - y\sqrt{2} + z - 2 = 0 \qquad e \qquad x + y\sqrt{2} - z + 5 = 0$$

5. (6 punti) Dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ con le solite operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare reale, si consideri il sottoinsieme $V_1 \in V$ dato da:
$$V_1 = \{(a, 2\,a, a+b) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Dire se V_1 è un sottospazio di V.

6. (5 punti) Dimostrare che le matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
formano una base per le matrici triangolari superiori di dimensione 2. Determinare quindi i coefficienti dello sviluppo della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
in tale base.

1. $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ $\qquad |z| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$

$\cos\vartheta = \dfrac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \vartheta = \dfrac{\pi}{3}$

2. $A = \begin{pmatrix} \alpha-2 & \beta & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad r = \text{rango}(A)$

Ovviamente, $\quad 1 \leq r \leq 2$

$\begin{vmatrix} \alpha-2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 3(\alpha-2) - 6 = 0 \qquad 3\alpha = 12 \qquad \alpha = 4$

$$\begin{vmatrix} \beta & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 3\beta - 9 = 0 \qquad \beta = 3$$

Per $(\alpha, \beta) \neq (4, 3)$ $\qquad r = 2$

" $(\alpha, \beta) = (4, 3)$ $\qquad r = 1$

Verifica sul terzo minore:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 2 & \beta \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\alpha = 4,\ \beta = 3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3

$$\vec{v} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k} \qquad \vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$$

$$\vec{w} = 7\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 16\hat{k}$$

Complanari se $\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 16 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 36 = 0$$

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{u}$$

$$\begin{cases} 7 = -\alpha + 3\beta \\ 4 = 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 3 \end{aligned}$$

(4)

$$x - y\sqrt{2} + z - 2 = 0$$

$$x + y\sqrt{2} - z + 5 = 0$$

Vettori normali:

$$\vec{N}_1 = \hat{i} - \sqrt{2}\,\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{N}_2 = \hat{i} + \sqrt{2}\,\hat{j} - \hat{k}$$

$$|\vec{N}_1| = \sqrt{1+2+1} = 2 = |\vec{N}_2|$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 1 - 2 - 1 = -2$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

(5) $V = \mathbb{R}^3$ $\qquad V_1 = \{(a, 2a, a+b) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(a, 2a, a+b) = (\lambda a, 2\lambda b, \lambda a + \lambda b) \in V_1$$

$$(a, 2a, a+b) + (a', 2a', a'+b') =$$

$$= (a+a', 2a+2a', a+b+a'+b') = (a+a', 2(a+a'), (a+a')+(b+b'))$$

$$\in V_1$$

V_1 è un sottospazio

⑥ Le matrici devono essere linearmente indipendenti e generare tutto lo spazio delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

- $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{Ma} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

quindi $(\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0)$ è l'unica soluzione
e le matrici sono lin. indip.

- $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ 2\alpha + 3\beta - \gamma = y \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = z \end{cases} \qquad \text{Ma} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

quindi la soluzione per (α, β, γ) esiste
ed è unica.

Sia ora $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{7-7-14}{14} = -1$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{7-3+16}{14} = \frac{10}{7}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{7-8+5}{14} = \frac{2}{7}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 13 febbraio 2023

1. (4 punti) Calcolare modulo e argomento del numero complesso
$$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

2. (6 punti) Studiare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} 2\,\alpha-2 & 1-\beta & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (5 punti) Dopo aver verificato che i vettori
$$\vec{v} = \hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 4\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{u} = -2\,\hat{\mathbf{i}} + 8\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = -5\,\hat{\mathbf{i}} - 2\,\hat{\mathbf{j}} + 12\,\hat{\mathbf{k}}$$
sono complanari, determinare α e β tali che $\vec{w} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{u}$

4. (4 punti) Determinare l'angolo tra i piani
$$3\,x - y\,\sqrt{2} + z - 2 = 0 \qquad e \qquad x - y\,\sqrt{2} + z - 5 = 0$$

5. (6 punti) Dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ con le solite operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare reale, si consideri il sottoinsieme $V_1 \in V$ dato da:
$$V_1 = \{(a, b, a+1) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Dire se V_1 è un sottospazio di V.

6. (5 punti) Dimostrare che le matrici
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
formano una base per le matrici triangolari superiori di dimensione 2. Determinare quindi i coefficienti dello sviluppo della matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
in tale base.

① $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ $|z| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen}\vartheta = \frac{1}{2}$ $\vartheta = \frac{\pi}{6}$

② $A = \begin{pmatrix} 2\alpha-2 & 1-\beta & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $r = \text{rango}(A)$

Ovviamente, $1 \leq r \leq 2$

$\begin{vmatrix} 2\alpha-2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $3(2\alpha-2)+2=0$ $6\alpha = 4$ $\alpha = \frac{2}{3}$

$$\begin{vmatrix} 1-\beta & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 3(1-\beta)+1 = 0 \qquad \beta = \frac{4}{3}$$

Per $(\alpha, \beta) \neq \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ $\qquad r = 2$

e $(\alpha, \beta) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ $\qquad r = 1$

Verifica sul terzo minore:

$$\begin{vmatrix} 2\alpha-2 & 1-\beta \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{4}{3}} \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3

$$\vec{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k} \qquad \vec{u} = -2\hat{\imath} + 8\hat{k}$$

$$\vec{w} = -5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 12\hat{k}$$

Complanari se $\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 8 \\ -5 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 12 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 64 - 64 = 0$$

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{u}$$

$$\begin{cases} -5 = \alpha - 2\beta \\ -2 = 2\alpha \end{cases} \qquad \alpha = -1 \qquad 2\beta = 4$$

$$\beta = 2$$

4

$$3x - y\sqrt{2} + z - 2 = 0$$

$$x - y\sqrt{2} + z - 5 = 0$$

Vettori normali:

$$\vec{N}_1 = 3\hat{i} - \sqrt{2}\,\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{N}_2 = \hat{i} - \sqrt{2}\,\hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{N}_1| = \sqrt{12} \quad ; \; |\vec{N}_2| = \sqrt{4}$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

(5) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad V_1 = \{(a, b, a+1) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}$

$0 \notin V_1$ $\quad V_1$ NON è uno spazio vettoriale

(6) Le matrici devono essere linearmente indipendenti e generare tutto lo spazio delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

• $\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{Ma} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$$

quindi $(\alpha=0, \beta=0, \gamma=0)$ è l'unica soluzione

e le matrici sono lin. indip.

- $\alpha\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma = x \\ \alpha - 3\beta - \gamma = y \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma = z \end{cases} \qquad \text{Ma} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$$

quindi la soluzione per (α, β, γ) esiste

ed è unica.

Lie ora $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{42} = \frac{-10+8+18}{42} = \frac{8}{21}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{42} = \frac{-16-1-15}{42} = -\frac{16}{21}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{42} = \frac{-12+5-7}{42} = -\frac{14}{42} = -\frac{1}{3}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 13 febbraio 2023

1. (4 punti) Calcolare modulo e argomento del numero complesso
$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

2. (6 punti) Studiare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} 3-\alpha & -\beta & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (5 punti) Dopo aver verificato che i vettori
$$\vec{v} = \hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 4\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{u} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + 8\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = -6\,\hat{\mathbf{i}} - 6\,\hat{\mathbf{j}} - 20\,\hat{\mathbf{k}}$$
sono complanari, determinare α e β tali che $\vec{w} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{u}$

4. (4 punti) Determinare l'angolo tra i piani
$$x - y + 1 = 0 \qquad e \qquad x - 2\,y + z = 0$$

5. (6 punti) Dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ con le solite operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare reale, si consideri il sottoinsieme $V_1 \in V$ dato da:
$$V_1 = \{(a, 2\,b - 1, a - b) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Dire se V_1 è un sottospazio di V.

6. (5 punti) Dimostrare che le matrici
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$
formano una base per le matrici triangolari inferiori di dimensione 2. Determinare quindi i coefficienti dello sviluppo della matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
in tale base.

1 $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ $|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\cos\vartheta = \frac{1}{2}$ $\operatorname{sen}\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$

2 $A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & -\beta & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $r = \text{rango}(A)$

Ovviamente, $1 \leq r \leq 2$

$\begin{vmatrix} 3-\alpha & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $3 - \alpha - 2 = 0$ $\alpha = 1$

$$\begin{vmatrix} -\beta & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -\beta + 4 = 0 \qquad \beta = 4$$

Per $(\alpha, \beta) \neq (1, 4)$ $\quad r = 2$

" $(\alpha, \beta) = (1, 4)$ $\quad r = 1$

Verifica sul terzo minore:

$$\begin{vmatrix} 3-\alpha & -\beta \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\alpha = 1,\ \beta = 4} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3

$$\vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} \qquad \vec{u} = 3\hat{i} + 8\hat{k}$$

$$\vec{w} = -6\hat{i} - 6\hat{j} - 20\hat{k}$$

Complanari se $\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \\ -6 & -6 & -20 \end{vmatrix} = -3(-16) - 8(6) = 48 - 48 = 0$$

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{u}$$

$$\begin{cases} -6 = \alpha + 3\beta \\ -6 = 2\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} \alpha &= -3 \\ \beta &= -1 \end{aligned}$$

4

$$x - y + 1 = 0$$
$$x - 2y + z = 0$$

Vettori normali:

$$\vec{N}_1 = \hat{i} - \hat{j}$$
$$\vec{N}_2 = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{N}_1| = \sqrt{2} \quad ; \quad |\vec{N}_2| = \sqrt{6}$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

(5) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad V_1 = \{(a, 2b-1, a-b) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}$

$0 \notin V_1$ $\quad V_1$ NON è uno spazio vettoriale

(6) Le matrici devono essere linearmente indipendenti e generare tutto lo spazio delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

- $\alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{Ma} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 63$$

quindi $(\alpha=0, \beta=0, \gamma=0)$ è l'unica soluzione e le matrici sono lin. indip.

- $$\alpha\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma = x \\ \alpha - 3\beta - 4\gamma = y \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma = z \end{cases} \qquad \text{Ma} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 63 \neq 0$$

quindi la soluzione per (α, β, γ) esiste ed è unica.

Sia ora $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{63} = \frac{-22-6+30}{63} = \frac{2}{63}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{63} = \frac{12+2+3}{63} = \frac{17}{63}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{63} = \frac{-20-1-7}{63} = -\frac{28}{63} = -\frac{4}{9}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 13 febbraio 2023

1. (4 punti) Calcolare modulo e argomento del numero complesso
$$\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

2. (6 punti) Studiare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & 2\,\beta & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (5 punti) Dopo aver verificato che i vettori
$$\vec{v} = \hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 3\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{u} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + 8\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad \vec{w} = 6\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$
sono complanari, determinare α e β tali che $\vec{w} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{u}$

4. (4 punti) Determinare l'angolo tra i piani
$$3\,x - 1 = 0 \qquad e \qquad x + y + 5 = 0$$

5. (6 punti) Dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ con le solite operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare reale, si consideri il sottoinsieme $V_1 \in V$ dato da:
$$V_1 = \{(a, a-b, a+b) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Dire se V_1 è un sottospazio di V.

6. (5 punti) Dimostrare che le matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$
formano una base per le matrici triangolari inferiori di dimensione 2. Determinare quindi i coefficienti dello sviluppo della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
in tale base.

① $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}$ $\qquad |z| = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1$

$\cos\vartheta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\vartheta = -\dfrac{1}{2} \qquad \vartheta = -\dfrac{\pi}{6}$

② $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2\beta & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad r = \text{rango}(A)$

Ovviamente, $\quad 1 \le r \le 2$

$\begin{vmatrix} 1+\alpha & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad -2(1+\alpha) + 6 = 0 \qquad -2\alpha = -4 \quad \alpha = 2$

$$\begin{vmatrix} 2\beta & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad -4\beta + 2 = 0 \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

Per $(\alpha, \beta) \neq (2, \frac{1}{2})$ $\qquad r = 2$

e $(\alpha, \beta) = (2, \frac{1}{2})$ $\qquad r = 1$

Verifica sul terzo minore:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 2\beta \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\alpha = 2 \quad \beta = 1/2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(3) $\vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\quad \vec{u} = 3\hat{i} + 8\hat{k}$

$$\vec{w} = 6\hat{j} + \hat{k}$$

Complanari se $\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3(2-18) - 8(6) = 48 - 48 = 0$$

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{u}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + 3\beta \\ 6 = 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{matrix}$$

4

$$\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

Vettori normali:

$$\vec{N}_1 = 3\hat{i}$$

$$\vec{N}_2 = \hat{i} + \hat{j}$$

$$|\vec{N}_1| = 3 \qquad |\vec{N}_2| = \sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 3$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

(5) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad V_1 = \{(a, a-b, a+b) \in V : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(a, a-b, a+b) = (\lambda a, \lambda(a-b), \lambda(a+b)) =$$

$$= (\lambda a, \lambda a - \lambda b, \lambda a + \lambda b) \in V_1$$

$$(a, a-b, a+b) + (a', a'-b', a'+b') =$$

$$= (a+a', a-b+a'-b', a+b+a'+b') =$$

$$= (a+a', a+a'-(b+b'), a+a'+b+b') \in V_1$$

V_1 è un sottospazio

(6) Le matrici devono essere linearmente indipendenti e generare tutto lo spazio delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

- $$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{Ma} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$$

quindi $(\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0)$ è l'unica soluzione

e le matrici sono lin. indip.

- $\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3 & 0\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & z\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=x\\ \alpha-3\beta-4\gamma=y\\ \alpha+4\beta-2\gamma=z\end{cases}\qquad \text{Ma}\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=39\neq 0$$

quindi la soluzione per (α,β,γ) esiste

ed è unica.

Fie ma $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{39} = \frac{22+12-30}{39} = \frac{4}{39}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{39} = \frac{-6-2-3}{39} = -\frac{11}{39}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{39} = \frac{10+2+7}{39} = \frac{19}{39}$$