

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome

N. Matricola

Fermo, 12 gennaio 2023

1. (3 punti) Calcolare il valore della seguente espressione:

$$\frac{(1+i)(1-2i) - (3-i)^2}{(2-i)^2} + \frac{i-5}{3}$$

2. (5 punti) Dire per quali valori del parametro α la seguente matrice è invertibile e calcolarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2 & 2\alpha \\ 3 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Dire se i seguenti punti sono complanari:

$$P_1 = (1, 2, 5), \quad P_2 = (3, 0, 8), \quad P_3 = (-1, 5, 5), \quad P_4 = (4, -2, 5)$$

4. (6 punti) Trovare l'equazione del piano contenente la retta r di equazione

$$\begin{cases} -x + y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano di equazione $-3x + y - z - 2 = 0$.

5. (5 punti) Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6. (6 punti) È data l'applicazione lineare

$$\phi(x, y, z) = (2x - y + 3z, -x + y - 2z, x + y + z)$$

e le basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' , con $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (0, 2, -1)\}$ e \mathcal{B}' la base canonica in \mathbb{R}^3 .
Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

Svolgimenti

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{(1+i)(1-2i) - (3-i)^2}{(2-i)^2} + \frac{i-5}{3} = \\ & = \frac{1+i-2i+2 - (9-1-6i)}{4-1-4i} + \frac{i-5}{3} = \\ & = \frac{-5+5i}{3-4i} + \frac{i-5}{3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{i-5}{3} =$$

$$= \frac{-35-5i}{9+16} + \frac{i-5}{3} = \frac{-35-5i}{25} + \frac{i-5}{3} =$$

$$= \frac{-7-i}{5} + \frac{i-5}{3} = \frac{-21-3i+5i-25}{15} =$$

$$= \frac{-46+2i}{15} = -\frac{46}{15} + \frac{2}{15}i$$

② $A = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 2\alpha \\ 3 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ e' invertibile se
 $\text{Det}(A) \neq 0$:

$$\text{Det}(A) = (\alpha + 2)\alpha - (3 - \alpha)2\alpha = 3\alpha^2 - 4\alpha$$

$$3\alpha^2 - 4\alpha = 0 \iff \alpha(3\alpha - 4) = 0$$

$$\iff \alpha = 0 \quad \vee \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

La matrice è invertibile se

$$\alpha \neq 0, \frac{4}{3}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & (-1)C_{21} \\ (-1)C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha(3\alpha - 4) \begin{pmatrix} \alpha & -2\alpha \\ \alpha - 3 & \alpha + 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\alpha - 4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{\alpha - 3}{\alpha} & \frac{\alpha + 2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad P_1 = (1, 2, 5) \quad P_2 = (3, 0, 8)$$

$$P_3 = (-1, 5, 5) \quad P_4 = (4, -2, 5)$$

Sono complanari? Due procedimenti:

a) Complanarità dei vettori $P_2 - P_1, P_3 - P_1, P_4 - P_1$

b) Piano per P_1, P_2, P_3 e verifico se P_4 vi appartiene

$$\textcircled{a} \quad P_2 - P_1 = (2, -2, 3) \quad \equiv \vec{v}$$

$$P_3 - P_1 = (-2, 3, 0) \quad \equiv \vec{u}$$

$$P_4 - P_1 = (3, -4, 0) \quad \equiv \vec{w}$$

Sono complanari $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w} = 0$:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) = -3 \neq 0$$

Nm sono complementari

⑥ Piane per P_1, P_2, P_3 :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-5 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-9(x-1) - 6(y-2) + 2(z-5) = 0$$

$$9x + 6y - 2z - 11 = 0$$

$$\text{In } P_4 : 9 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 - 11 = 3 \neq 0$$

Non Complementari

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} -x + y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equazione cartesiana} \\ \text{della retta.} \end{array}$$

Nel fascio di piani cerchiamo quello \perp

al piano $-3x + y - z - 2 = 0$

Fascio: $\lambda(-x + y + 3z - 1) + \mu(2x + y + 3z) = 0$

$$(2\mu - \lambda)x + (\lambda + \mu)y + 3(\lambda + \mu)z - \lambda = 0$$

Perpendicolarità: $-3(2\mu - \lambda) + (\lambda + \mu) - 3(\lambda + \mu) = 0$

$$-2(\lambda + \mu) - 3(2\mu - \lambda) = 0$$

$$\lambda - 8\mu = 0$$

Prendiamo $\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{8}$

Il piano cercato è:

$$\lambda(-x + y + 3z - 1) + \mu(2x + y + 3z) = 0$$

$$\lambda = 1 \\ \mu = \frac{1}{8} : \quad -x + y + 3z - 1 + \frac{1}{8}(2x + y + 3z) = 0$$

$$8(-x + y + 3z - 1) + (2x + y + 3z) = 0$$

$$-6x + 9y + 27z - 8 = 0$$

⑤

Autovetori e autovalori della

matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Autovetori: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(-1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{matrix} / & -2 \\ \backslash & 5 \end{matrix}$$

Aut vektor :

$$\lambda = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1+2 & 2 \\ 3 & 4+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$x = -2y$$

$$\text{Aut v. : } (-2y, y)$$

0 replacement $(-2, 1)$

$$\lambda = 5 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$y = 3x$$

Autov. $(x, 3x) \sim (1, 3)$

⑥

$$\phi(x, y, z) = (2x - y + 3z, -x + y - 2z, x + y + z)$$

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (0, 2, -1)\}$$

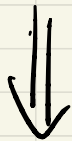
$$\mathcal{B}' = \left\{ \underset{e_1}{(1, 0, 0)}, \underset{e_2}{(0, 1, 0)}, \underset{e_3}{(0, 0, 1)} \right\}$$

$$v_1 = \phi(1, 1, 1) = (4, -2, 3)$$

$$v_2 = \phi(-1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

$$v_3 = \phi(0, 2, -1) = (-5, 4, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + a_{31} e_3 \\ v_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + a_{32} e_3 \\ v_3 = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3 \end{array} \right.$$



$$(4, -2, 3) = Q_{11}(1, 0, 0) + Q_{21}(0, 1, 0) + Q_{31}(0, 0, 1)$$

$$(0, 0, 1) = Q_{12}(1, 0, 0) + Q_{22}(0, 1, 0) + Q_{32}(0, 0, 1)$$

$$(-5, 4, 1) = Q_{13}(1, 0, 0) + Q_{23}(0, 1, 0) + Q_{33}(0, 0, 1)$$

↓

$$Q_{11} = 4 \quad Q_{21} = -2 \quad Q_{31} = 3$$

$$Q_{12} = 0 \quad Q_{22} = 0 \quad Q_{32} = 1$$

$$Q_{13} = -5 \quad Q_{23} = 4 \quad Q_{33} = 1$$

La matrice è quindi

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni delle altre tre versioni sono molto simili; i procedimenti sono gli stessi, cambiano solo i numeri e quindi le ometto.

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome

N. Matricola

Fermo, 12 gennaio 2023

1. (3 punti) Calcolare il valore della seguente espressione:

$$\frac{(1+2i)(1-i) + (1-3i)^2}{(3-i)^2} + \frac{2i-1}{3}$$

2. (5 punti) Dire per quali valori del parametro α la seguente matrice è invertibile e calcolarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 3\alpha & 2-\alpha \\ 2\alpha & 3+\alpha \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Dire se i seguenti punti sono complanari:

$$P_1 = (1, 2, 4), \quad P_2 = (3, 0, 8), \quad P_3 = (-1, 5, 5), \quad P_4 = (4, -2, 6)$$

4. (6 punti) Trovare l'equazione del piano contenente la retta r di equazione

$$\begin{cases} x + y + 3z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano di equazione $-3x + 2y + z + 1 = 0$.

5. (5 punti) Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. (6 punti) È data l'applicazione lineare

$$\phi(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y + z, 2x - 2y - z)$$

e le basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' , con $\mathcal{B} = \{(2, 1, 1), (1, 1, -1), (2, 0, -1)\}$ e \mathcal{B}' la base canonica in \mathbb{R}^3 .
Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome

N. Matricola

Fermo, 12 gennaio 2023

1. (3 punti) Calcolare il valore della seguente espressione:

$$\frac{(3-i)(2+i) - (3-i)^2}{(1-i)^2} + \frac{5i-2}{3}$$

2. (5 punti) Dire per quali valori del parametro α la seguente matrice è invertibile e calcolarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} \alpha - 3 & -2\alpha \\ \alpha + 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Dire se i seguenti punti sono complanari:

$$P_1 = (1, 2, 4), \quad P_2 = (3, 0, 8), \quad P_3 = (-1, 5, 4), \quad P_4 = (4, -2, 5)$$

4. (6 punti) Trovare l'equazione del piano contenente la retta r di equazione

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano di equazione $x - y - 2z - 3 = 0$.

5. (5 punti) Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. (6 punti) È data l'applicazione lineare

$$\phi(x, y, z) = (x - 3y + 2z, -2x + 3y - z, x - y + 2z)$$

e le basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' , con $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2), (1, -1, 1), (1, 2, 0)\}$ e \mathcal{B}' la base canonica in \mathbb{R}^3 .
Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo Numerico

Nome

N. Matricola

Fermo, 12 gennaio 2023

1. (3 punti) Calcolare il valore della seguente espressione:

$$\frac{(i-3)(1+i) - (1+3i)^2}{(1-2i)^2} + \frac{i-1}{3}$$

2. (5 punti) Dire per quali valori del parametro α la seguente matrice è invertibile e calcolarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 3-\alpha \\ 3\alpha & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

3. (5 punti) Dire se i seguenti punti sono complanari:

$$P_1 = (1, 2, 3), \quad P_2 = (3, 0, 8), \quad P_3 = (-1, 5, 5), \quad P_4 = (4, -2, 6)$$

4. (6 punti) Trovare l'equazione del piano contenente la retta r di equazione

$$\begin{cases} -x - 3y + z + 2 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano di equazione $x - 3y + 2z + 2 = 0$.

5. (5 punti) Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6. (6 punti) È data l'applicazione lineare

$$\phi(x, y, z) = (3x + 3y - 2z, 3x + 2y + z, x - y + 2z)$$

e le basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' , con $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (1, 1, 1), (3, 2, 0)\}$ e \mathcal{B}' la base canonica in \mathbb{R}^3 .
Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .