Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Analisi Numerica

6 - METODI DIRETTI PER I SISTEMI LINEARI

Lucio Demeio
Dipartimento di Scienze Matematiche

Introduzione algebrica

Formulazione matriciale

Sappiamo che un sistema lineare, di m equazioni in n incognite,

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

può essere rappresentato in forma matriciale, come

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{A}$ è la matrice dei coefficienti, data da

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Introduzione algebrica

Formulazione matriciale

mentre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ sono i vettori colonna contenenti le incognite ed i termini noti, dati da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Spesso indicheremo con $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, ..., b_m)$ i vettori riga, trasposti di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$. La matrice $m \times (n+1)$ data da

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

è detta **matrice orlata** o **matrice completa**.

Introduzione algebrica

Theorem (Teorema di Rouche'-Capelli)

Il sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ha soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ ed il rango della matrice completa $\mathbf{B}$ sono uguali. Se k è il rango comune alle due matrici, allora le soluzioni del sistema formano uno spazio affine di dimensione $n-k$ (cioè il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni). Quando $n=k$, il sistema ammette una ed una sola soluzione (cioè si conviene di porre $\infty^0 = 1$).

Introduzione algebrica

Sistemi con $n = m$

Quando il numero di incognite eguaglia il numero delle equazioni allora il teorema si riduce al seguente:

Introduzione algebrica

Sistemi con $n = m$

Quando il numero di incognite eguaglia il numero delle equazioni allora il teorema si riduce al seguente:

- Se $det(\mathbf{A}) \neq 0$ il sistema ammette una ed una sola soluzione;

Introduzione algebrica

Sistemi con $n = m$

Quando il numero di incognite eguaglia il numero delle equazioni allora il teorema si riduce al seguente:

- Se $det(\mathbf{A}) \neq 0$ il sistema ammette una ed una sola soluzione;
- se $det(\mathbf{A}) = 0$ il sistema ammette infinite soluzioni se la matrice completa ha rango $< n$ (ed uguale al rango di $\mathbf{A}$), se invece ha rango massimo (n) il sistema è incompatibile (non ha nessuna soluzione).

Metodo di Gauss

Sistemi equivalenti

Consideriamo il sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$, ed $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vettori ad n componenti. Indicando con R_j gli elementi della riga j-esima del sistema, sappiamo dall'algebra che le seguenti operazioni conducono ad un sistema equivalente a quello di partenza (cioè con la stessa soluzione):

Metodo di Gauss

Sistemi equivalenti

Consideriamo il sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

con $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$, ed $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vettori ad n componenti. Indicando con R_j gli elementi della riga j-esima del sistema, sappiamo dall'algebra che le seguenti operazioni conducono ad un sistema equivalente a quello di partenza (cioè con la stessa soluzione):

- moltiplicazione di un'equazione (cioè degli elementi di una riga della matrice completa) per uno scalare, $\lambda R_j \to R_j$;

Metodo di Gauss

Sistemi equivalenti

Consideriamo il sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

con $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$, ed $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vettori ad n componenti. Indicando con R_j gli elementi della riga j-esima del sistema, sappiamo dall'algebra che le seguenti operazioni conducono ad un sistema equivalente a quello di partenza (cioè con la stessa soluzione):

- moltiplicazione di un'equazione (cioè degli elementi di una riga della matrice completa) per uno scalare, $\lambda R_j \to R_j$;
- scambio di due equazioni (righe della matrice completa), $R_i \leftrightarrow R_j$;

Metodo di Gauss

Sistemi equivalenti

Consideriamo il sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

con $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$, ed $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vettori ad n componenti.
Indicando con R_j gli elementi della riga j-esima del sistema, sappiamo dall'algebra che le seguenti operazioni conducono ad un sistema equivalente a quello di partenza (cioè con la stessa soluzione):

- moltiplicazione di un'equazione (cioè degli elementi di una riga della matrice completa) per uno scalare, $\lambda R_j \rightarrow R_j$;
- scambio di due equazioni (righe della matrice completa), $R_i \leftrightarrow R_j$;
- sostituzione di un'equazione (di una riga) con una sua combinazione lineare con altre equazioni (righe), ad esempio $\alpha R_i + \beta R_j \rightarrow R_j$ (con $\beta \neq 0$).

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- L'eliminazione di Gauss consiste nell'eseguire una successione di operazioni tra quelle descritte sopra fino a porre la matrice dei coefficienti in forma triangolare.

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- L'eliminazione di Gauss consiste nell'eseguire una successione di operazioni tra quelle descritte sopra fino a porre la matrice dei coefficienti in forma triangolare.
- Come esempio consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 & = & -2 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- L'eliminazione di Gauss consiste nell'eseguire una successione di operazioni tra quelle descritte sopra fino a porre la matrice dei coefficienti in forma triangolare.
- Come esempio consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 & = & -2 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \end{cases}$$

- Le operazioni $R_1 + R_2 \to R_2$ e $3\,R_1 - 2\,R_3 \to R_3$ trasformano il sistema in

$$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ \qquad 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ \qquad x_2 + 5\,x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- $$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ \quad 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ \quad x_2 + 5\,x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- $$\left\{\begin{array}{rcl} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ x_2 + 5\,x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

- Ora $R_2 - 2\,R_3 \to R_3$ trasforma il sistema in

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ -8\,x_3 & = & -11 \end{array}\right.$$

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

- $$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ x_2 + 5\,x_3 & = & 5 \end{cases}$$

- Ora $R_2 - 2\,R_3 \to R_3$ trasforma il sistema in

$$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2\,x_2 + 2\,x_3 & = & -1 \\ -8\,x_3 & = & -11 \end{cases}$$

- Una volta ridotto in questa forma, il sistema può essere risolto facilmente per **sostituzione all'indietro**:

$$x_3 = 11/8$$
$$x_2 = (-1 - 2\,x_3)/2 = -15/8$$
$$x_1 = (1 + x_2 - 3\,x_3)/2 = -5/2$$

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

La procedura vista ora può anche essere eseguita semplicemente sulla matrice orlata; nell'esempio precedente avremmo la successione:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 \end{pmatrix}$$

Mathematica file Sistemi1.nb

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

La procedura ora può essere formulata in generale.

Metodo di Gauss

Eliminazione di Gauss

La procedura ora può essere formulata in generale.

- Data la matrice orlata

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

  al primo passo sostituiamo la riga R_j, $j = 2, 3, ..., n$, con la combinazione lineare $R_j - a_{j1}\, R_1/a_{11}$, ottenendo così zero come primo elemento di ogni riga dopo la prima; indicando sempre con R_j la riga j-esima della matrice così ottenuta, al secondo passo sostituiamo la riga R_j, $j = 3, 4, ..., n$, con la combinazione lineare $R_j - a_{j2}\, R_2/a_{22}$, ottenendo così zero anche come secondo elemento di ogni riga dopo la seconda; e così via fino a rimanere con un solo elemento nell'ultima riga.

Metodo di Gauss

Scambio di righe

Metodo di Gauss

Scambio di righe

- Gli elementi diagonali a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} che si vengono via via generando nella procedura sopra descritta vengono detti **pivot**. È evidente che il metodo di Gauss, così come esposto nelle righe precedenti, fallisce quando uno dei pivot si annulla, cioè se al k-esimo passo della procedura, si ha $a_{kk} = 0$.

Metodo di Gauss

Scambio di righe

- Gli elementi diagonali a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} che si vengono via via generando nella procedura sopra descritta vengono detti **pivot**. È evidente che il metodo di Gauss, così come esposto nelle righe precedenti, fallisce quando uno dei pivot si annulla, cioè se al k-esimo passo della procedura, si ha $a_{kk} = 0$.
- In tal caso, si cerca tra le righe successive la prima che presenta un elemento non nullo nella medesima colonna e la si scambia con R_k. Questo metodo viene detto **metodo dello scambio di righe**. Illustriamo il problema con un esempio.

Metodo di Gauss

Scambio di righe

- Gli elementi diagonali a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} che si vengono via via generando nella procedura sopra descritta vengono detti **pivot**. È evidente che il metodo di Gauss, così come esposto nelle righe precedenti, fallisce quando uno dei pivot si annulla, cioè se al k-esimo passo della procedura, si ha $a_{kk} = 0$.
- In tal caso, si cerca tra le righe successive la prima che presenta un elemento non nullo nella medesima colonna e la si scambia con R_k. Questo metodo viene detto **metodo dello scambio di righe**. Illustriamo il problema con un esempio.
- Se non si riesce a trovare un pivot, vuol dire che il sistema non ha un'unica soluzione (possono essercene infinite oppure nessuna).

Metodo di Gauss

Scambio di righe

- Gli elementi diagonali a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} che si vengono via via generando nella procedura sopra descritta vengono detti **pivot**. È evidente che il metodo di Gauss, così come esposto nelle righe precedenti, fallisce quando uno dei pivot si annulla, cioè se al k-esimo passo della procedura, si ha $a_{kk} = 0$.
- In tal caso, si cerca tra le righe successive la prima che presenta un elemento non nullo nella medesima colonna e la si scambia con R_k. Questo metodo viene detto **metodo dello scambio di righe**. Illustriamo il problema con un esempio.
- Se non si riesce a trovare un pivot, vuol dire che il sistema non ha un'unica soluzione (possono essercene infinite oppure nessuna).
- **Vedi Mathematica file Sistemi2.nb**

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale

- Con alcuni sistemi, risulta necessario effettuare lo scambio di righe anche se uno degli elementi sulla diagonale non è rigorosamente nullo, ma soltanto molto piccolo.

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale

- Con alcuni sistemi, risulta necessario effettuare lo scambio di righe anche se uno degli elementi sulla diagonale non è rigorosamente nullo, ma soltanto molto piccolo.
- Sia, ad esempio, a_{kk} questo elemento. In tal caso, si cerca tra le righe successive quella che presenta l'elemento più grande (in valore assoluto) nella medesima colonna e la si scambia con R_k. Questo metodo viene detto **metodo del pivoting parziale**. Illustriamo il problema con un esempio.

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale

- Con alcuni sistemi, risulta necessario effettuare lo scambio di righe anche se uno degli elementi sulla diagonale non è rigorosamente nullo, ma soltanto molto piccolo.
- Sia, ad esempio, a_{kk} questo elemento. In tal caso, si cerca tra le righe successive quella che presenta l'elemento più grande (in valore assoluto) nella medesima colonna e la si scambia con R_k. Questo metodo viene detto **metodo del pivoting parziale**. Illustriamo il problema con un esempio.
- **Vedi Mathematica file Sistemi3.nb**

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Con alcuni sistemi, il metodo del pivoting parziale non è sufficiente. Si ricorre allora al **metodo del pivoting parziale riscalato**

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Con alcuni sistemi, il metodo del pivoting parziale non è sufficiente. Si ricorre allora al **metodo del pivoting parziale riscalato**
- Il metodo è del tutto simile a quello del pivoting parziale, solo che la ricerca della riga con cui effettuare lo scambio avviene determinando il pivot che ha il rapporto massimo con gli elementi della propria riga.

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Con alcuni sistemi, il metodo del pivoting parziale non è sufficiente. Si ricorre allora al **metodo del pivoting parziale riscalato**
- Il metodo è del tutto simile a quello del pivoting parziale, solo che la ricerca della riga con cui effettuare lo scambio avviene determinando il pivot che ha il rapporto massimo con gli elementi della propria riga.
- Illustriamo il metodo solo relativamente al primo passo, poi si procede allo stesso modo. Ricordiamo che, al primo passo, lo scopo dell'eliminazione di Gauss è di ottenere degli zeri nella prima colonna dalla seconda riga in poi.

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Con alcuni sistemi, il metodo del pivoting parziale non è sufficiente. Si ricorre allora al **metodo del pivoting parziale riscalato**
- Il metodo è del tutto simile a quello del pivoting parziale, solo che la ricerca della riga con cui effettuare lo scambio avviene determinando il pivot che ha il rapporto massimo con gli elementi della propria riga.
- Illustriamo il metodo solo relativamente al primo passo, poi si procede allo stesso modo. Ricordiamo che, al primo passo, lo scopo dell'eliminazione di Gauss è di ottenere degli zeri nella prima colonna dalla seconda riga in poi.
- ...

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Sia s_i il massimo elemento (in valore assoluto) della riga $i-$esima, cioè $s_i = \max_{j=1,n} |a_{ij}|$, per $i = 1, ..., n$; per ogni riga, calcoliamo il rapporto $|a_{i1}|/s_i$ e sia p la riga per cui questo rapporto è massimo;

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Sia s_i il massimo elemento (in valore assoluto) della riga $i-$esima, cioè $s_i = \max_{j=1,n} |a_{ij}|$, per $i = 1, ..., n$; per ogni riga, calcoliamo il rapporto $|a_{i1}|/s_i$ e sia p la riga per cui questo rapporto è massimo;
- allora effettuiamo lo scambio $R_1 \leftrightarrow R_p$.

Metodo di Gauss con pivoting

Metodo del pivoting parziale riscalato

- Sia s_i il massimo elemento (in valore assoluto) della riga $i-$esima, cioè $s_i = \max_{j=1,n} |a_{ij}|$, per $i = 1, ..., n$; per ogni riga, calcoliamo il rapporto $|a_{i1}|/s_i$ e sia p la riga per cui questo rapporto è massimo;
- allora effettuiamo lo scambio $R_1 \leftrightarrow R_p$.
- È più difficile a spiegarsi che a farne un esempio!
  Vedi Mathematica file Sistemi3.nb