

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Analisi Numerica
9 - EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Lucio Demeio
Dipartimento di Scienze Matematiche

- 1 Problemi ai Valori Iniziali: metodo di Eulero
- 2 Problemi ai Valori Iniziali: metodo di Runge-Kutta
- 3 Problemi al contorno

Problemi ai valori iniziali

Problemi ai Valori iniziali

Ci occuperemo della soluzione numerica di equazioni del prim'ordine del tipo

$$y'(t) = f(t, y),$$

$t \in [t_A, t_B]$ con la condizione iniziale $y(t_A) = \alpha$. Il problema è ben posto (vedi la schermata successiva) se la funzione f soddisfa una condizione di continuità Lipschitziana rispetto ad y nell'insieme $D = \{(t, y) : t_A \leq t \leq t_B, -\infty < y < \infty\}$, cioè se esiste una costante L tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

per ogni $(t, y_1), (t, y_2) \in D$.

Problemi ai valori iniziali

Problema ben posto

Si dice che il problema ai valori iniziali

$$y'(t) = f(t, y)$$

$$y(t_A) = \alpha$$

è **ben posto** se

Problemi ai valori iniziali

Problema ben posto

Si dice che il problema ai valori iniziali

$$y'(t) = f(t, y)$$

$$y(t_A) = \alpha$$

è **ben posto** se

- La soluzione esiste ed è unica;

Problemi ai valori iniziali

Problema ben posto

Si dice che il problema ai valori iniziali

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y) \\ y(t_A) &= \alpha\end{aligned}$$

è **ben posto** se

- La soluzione esiste ed è unica;
- se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $k(\varepsilon) > 0$ tale che, se $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ e $\delta(t)$ continua con $|\delta(t)| < \varepsilon$ per $t \in [t_A, t_B]$, la soluzione $z(t)$ del **problema perturbato**

$$\begin{aligned}z'(t) &= f(t, z) + \delta(t) \\ z(t_A) &= \alpha + \varepsilon_0\end{aligned}$$

esiste, è unica e soddisfa $|z(t) - y(t)| < k(\varepsilon) \varepsilon$ per $t \in [t_A, t_B]$.

Problemi ai valori iniziali

Problema ben posto

Commento: la seconda condizione affinché un problema sia ben posto significa che, se si perturbano di poco la funzione f e la condizione iniziale, l'esistenza ed unicità della soluzione deve essere ancora garantita e la soluzione del problema perturbato deve differire di poco da quella del problema non perturbato.

Problemi ai valori iniziali

Metodo di Eulero

Iniziamo con la discretizzazione della variabile indipendente, dividendo l'intervallo $[t_A, t_B]$ in N intervallini equispaziati; se h è il passo di discretizzazione, abbiamo $t_i = t_A + ih$, per $i = 0, 1, 2, \dots, N$, con $t_0 = t_A$ e $t_N = t_B$. Rappresentando la derivata $y'(t)$ con la formula delle differenze finite in avanti, ed indicando con w_i l'approssimazione numerica al valore della soluzione in t_i , cioè $y(t_i) \approx w_i$, otteniamo

$$\frac{w_{i+1} - w_i}{h} = f(t_i, w_i) + O(h),$$

dove abbiamo calcolato il membro di destra dell'equazione differenziale in t_i . Sopprimendo il termine di errore ed esplicitando w_{i+1} :

$$w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i),$$

che, con la condizione iniziale $w_0 = y(t_A) = \alpha$, fornisce tutti i valori w_i , cioè l'approssimazione numerica alla soluzione dell'equazione differenziale.

Problemi ai valori iniziali

Errore nel metodo di Eulero

Ricordiamo che le formule alle differenze finite in avanti utilizzate qui portano un errore lineare nel passo h :

$$y'(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \frac{h}{2!} y''(\xi).$$

Supponiamo di sapere che la derivata seconda è limitata, cioè che esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|y''(t)| \leq M$$

per $t \in [t_A, t_B]$.

Problemi ai valori iniziali

Errore nel metodo di Eulero

Si può allora dimostrare che l'errore nel metodo di Eulero obbedisce alla seguente limitazione:

$$|y(t_i) - w_i| \leq h \frac{M}{2L} \left[e^{L(t_i - t_A)} - 1 \right]$$

dove L è la costante di continuità lipschitziana della f rispetto ad y . Non è detto che si riesca sempre a trovare la costante M e quindi a trovare un limite realistico per l'errore.

Problemi ai valori iniziali

Errore nel metodo di Eulero

Si può allora dimostrare che l'errore nel metodo di Eulero obbedisce alla seguente limitazione:

$$|y(t_i) - w_i| \leq h \frac{M}{2L} \left[e^{L(t_i - t_A)} - 1 \right]$$

dove L è la costante di continuità lipschitziana della f rispetto ad y . Non è detto che si riesca sempre a trovare la costante M e quindi a trovare un limite realistico per l'errore.

L'errore diminuisce linearmente con il passo h , quindi scegliendo passi più piccoli la precisione del metodo migliora. Attenzione però: nella formula per l'errore non si è tenuto conto degli errori di arrotondamento, dovuti alla rappresentazione dei numeri in virgola mobile. Scegliendo passi h molto piccoli, aumenta anche il numero di valutazioni della funzione, e l'accumulo degli errori di arrotondamento porta ad una perdita di precisione. In pratica, esiste un h minimo al di sotto del quale non si deve scendere.

Il metodo di Eulero è poco preciso ma estremamente semplice da implementare.

Problemi ai Valori Iniziali

Metodi di Runge-Kutta

- Vogliamo risolvere il problema

$$y'(t) = f(t, y),$$

$t \in [t_A, t_B]$ con la condizione iniziale $y(t_A) = \alpha$, con uno schema di ordine superiore rispetto a quello di Eulero. Ricaveremo una famiglia di algoritmi seguendo una strada diversa da quella vista in precedenza.

Problemi ai Valori Iniziali

Metodi di Runge-Kutta

- Vogliamo risolvere il problema

$$y'(t) = f(t, y),$$

$t \in [t_A, t_B]$ con la condizione iniziale $y(t_A) = \alpha$, con uno schema di ordine superiore rispetto a quello di Eulero. Ricaveremo una famiglia di algoritmi seguendo una strada diversa da quella vista in precedenza.

- Intanto, ricordiamo la variabile t discretizzata, con $t_i = ih$, per $i = 0, 1, 2, \dots, N$, e $t_0 = t_A$ e $t_N = t_B$ e che indichiamo con w_i l'approssimazione numerica ad $y(t_i)$.

Problemi ai Valori Iniziali

Metodi di Runge-Kutta

- Vogliamo risolvere il problema

$$y'(t) = f(t, y),$$

$t \in [t_A, t_B]$ con la condizione iniziale $y(t_A) = \alpha$, con uno schema di ordine superiore rispetto a quello di Eulero. Ricaveremo una famiglia di algoritmi seguendo una strada diversa da quella vista in precedenza.

- Intanto, ricordiamo la variabile t discretizzata, con $t_i = ih$, per $i = 0, 1, 2, \dots, N$, e $t_0 = t_A$ e $t_N = t_B$ e che indichiamo con w_i l'approssimazione numerica ad $y(t_i)$.
- Supposto noto il valore w_i all'istante t_i , possiamo integrare l'equazione differenziale da t_i a t_{i+1} ottenendo in modo esatto

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

Problemi ai Valori Iniziali

Metodi di Runge-Kutta

- A questo punto, a seconda dell'approssimazione che usiamo per calcolare l'integrale, otteniamo uno schema diverso;

Problemi ai Valori Iniziali

Metodi di Runge-Kutta

- A questo punto, a seconda dell'approssimazione che usiamo per calcolare l'integrale, otteniamo uno schema diverso;
- per ottenere uno schema con errore più piccolo rispetto allo schema di Eulero, dovremo pagare il prezzo di un maggior numero di valutazioni della funzione f ; tale numero, s , viene detto **numero di stadi del metodo** ed il corrispondente algoritmo viene detto **metodo di Runge-Kutta ad s stadi**;

Problemi ai Valori Iniziali

Metodi di Runge-Kutta

- A questo punto, a seconda dell'approssimazione che usiamo per calcolare l'integrale, otteniamo uno schema diverso;
- per ottenere uno schema con errore più piccolo rispetto allo schema di Eulero, dovremo pagare il prezzo di un maggior numero di valutazioni della funzione f ; tale numero, s , viene detto **numero di stadi del metodo** ed il corrispondente algoritmo viene detto **metodo di Runge-Kutta ad s stadi**;
- in realtà, è più utile classificare i metodi di Runge Kutta a seconda dell'ordine dell'errore, e quindi si parla di metodo di ordine n quando l'errore è di ordine $O(h^n)$;

Problemi ai Valori Iniziali

Metodi di Runge-Kutta

- A questo punto, a seconda dell'approssimazione che usiamo per calcolare l'integrale, otteniamo uno schema diverso;
- per ottenere uno schema con errore più piccolo rispetto allo schema di Eulero, dovremo pagare il prezzo di un maggior numero di valutazioni della funzione f ; tale numero, s , viene detto **numero di stadi del metodo** ed il corrispondente algoritmo viene detto **metodo di Runge-Kutta ad s stadi**;
- in realtà, è più utile classificare i metodi di Runge Kutta a seconda dell'ordine dell'errore, e quindi si parla di metodo di ordine n quando l'errore è di ordine $O(h^n)$;
- vedremo i casi con $s = 1$ (che restituisce il metodo di Eulero), $s = 2$ (Runge-Kutta a due stadi, RK2, di second'ordine) ed $s = 4$ (Runge-Kutta a quattro stadi, RK4, del quart'ordine).

Problemi ai Valori Iniziali

Metodo di Runge-Kutta ad uno stadio

Con la posizione

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + h f(t_i, w_i) + O(h^2)$$

abbiamo il metodo ad uno stadio che restituisce il metodo di Eulero.

Problemi ai Valori Iniziali

Metodo di Runge-Kutta ad uno stadio

Con la posizione

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + h f(t_i, w_i) + O(h^2)$$

abbiamo il metodo ad uno stadio che restituisce il metodo di Eulero.

Metodo di Runge-Kutta a due stadi

È facile vedere che, calcolando l'integrale usando il valore della funzione nel punto medio dell'intervallo, l'errore diventa del terz'ordine:

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_{i+1/2}\right) + O(h^3)$$

Problemi ai Valori Iniziali

Metodo di Runge-Kutta a due stadi

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + h f(t_i + (h/2), w_{i+1/2}) + O(h^3)$$

dove si è indicato con $w_{i+1/2}$ l'approssimazione numerica alla soluzione per $t_i + h/2$. Quest'ultima può essere calcolata con un passo del metodo di Eulero,

$$w_{i+1/2} = w_i + (h/2) f(t_i, w_i) + O(h^2).$$

Sopprimendo l'errore ed introducendo

$$k_1 \equiv f(t_i, w_i) \quad k_2 \equiv f(t_i + (h/2), w_i + (h/2) k_1),$$

otteniamo infine il metodo di Runge-Kutta a due stadi:

$$w_{i+1} = w_i + h k_2$$

Problemi ai Valori Iniziali

Metodo di Runge-Kutta a quattro stadi

- Usando questa volta la regola di Simpson abbiamo

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + \frac{h}{3} [f(t_i, w_i) + 4f(t_i + h/2, w_{i+1/2}) + f(t_i + h, w_{i+1})] + O(h^5)$$

Problemi ai Valori Iniziali

Metodo di Runge-Kutta a quattro stadi

- Usando questa volta la regola di Simpson abbiamo

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt = w_i + \frac{h}{3} [f(t_i, w_i) + 4f(t_i + h/2, w_{i+1/2}) + f(t_i + h, w_{i+1})] + O(h^5)$$

- Con opportune approssimazioni a $w_{i+1/2}$ e w_{i+1} , si perviene alla regola di Runge Kutta del quart'ordine

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Problemi ai Valori Iniziali

Metodo di Runge-Kutta a quattro stadi

dove

$$k_1 = f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h/2, w_i + (h/2) k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + h/2, w_i + (h/2) k_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, w_i + h k_3)$$

Problemi ai Valori Iniziali

Metodo di Runge-Kutta a quattro stadi

dove

$$k_1 = f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h/2, w_i + (h/2) k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + h/2, w_i + (h/2) k_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, w_i + h k_3)$$

Se la soluzione è di classe C^5 , l'errore del metodo è $O(h^4)$.

Mathematica file ODE.nb

Problemi ai Valori Iniziali

Errore di troncamento

I metodi di Eulero e di Runge-Kutta visti sopra si possono scrivere in generale nella forma

$$w_{i+1} = w_i + h \phi(t_i, w_i)$$

$$w_0 = \alpha.$$

Negli schemi di questo tipo, detti anche **metodi alle differenze finite**, si introduce l'**errore di troncamento locale**, $\tau_{i+1}(h)$, che è l'errore che si ottiene se si sostituisce la soluzione esatta all'equazione differenziale discretizzata. Con la notazione $y_i = y(t_i)$, abbiamo esplicitamente

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h \phi(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i)$$

L'errore di troncamento dipende dall'equazione differenziale, dal metodo usato e dal passo di discretizzazione.

Problemi ai Valori Iniziali

Stabilità, convergenza e consistenza

- Un metodo numerico si dice **consistente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i(h) = 0;$$

per ogni i ;

Problemi ai Valori Iniziali

Stabilità, convergenza e consistenza

- Un metodo numerico si dice **consistente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i(h) = 0;$$

per ogni i ;

- un metodo numerico si dice **convergente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_i = y(t_i);$$

per ogni i ;

Problemi ai Valori Iniziali

Stabilità, convergenza e consistenza

- Un metodo numerico si dice **consistente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i(h) = 0;$$

per ogni i ;

- un metodo numerico si dice **convergente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_i = y(t_i);$$

per ogni i ;

- un metodo numerico si dice **stabile** se la soluzione numerica rimane limitata.

Problemi ai Valori Iniziali

Stabilità, convergenza e consistenza

- Un metodo numerico si dice **consistente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i(h) = 0;$$

per ogni i ;

- un metodo numerico si dice **convergente** se

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_i = y(t_i);$$

per ogni i ;

- un metodo numerico si dice **stabile** se la soluzione numerica rimane limitata.

Se uno schema numerico è consistente, allora esso è convergente se e solo se è stabile.

Problemi ai Valori Iniziali

Errore di troncamento

- Per il metodo di Eulero abbiamo $\phi(t_i, y_i) = f(t_i, y_i)$ e si vede facilmente (anche dall'espressione del metodo di Runge-Kutta ad uno stadio) che $\tau_{i+1}(h) = O(h)$;

Problemi ai Valori Iniziali

Errore di troncamento

- Per il metodo di Eulero abbiamo $\phi(t_i, y_i) = f(t_i, y_i)$ e si vede facilmente (anche dall'espressione del metodo di Runge-Kutta ad uno stadio) che $\tau_{i+1}(h) = O(h)$;
- per il metodo di Runge-Kutta a due stadi vediamo subito che $\tau_{i+1}(h) = O(h^2)$;

Problemi ai Valori Iniziali

Errore di troncamento

- Per il metodo di Eulero abbiamo $\phi(t_i, y_i) = f(t_i, y_i)$ e si vede facilmente (anche dall'espressione del metodo di Runge-Kutta ad uno stadio) che $\tau_{i+1}(h) = O(h)$;
- per il metodo di Runge-Kutta a due stadi vediamo subito che $\tau_{i+1}(h) = O(h^2)$;
- per il metodo di Runge-Kutta a quattro stadi invece $\tau_{i+1}(h) = O(h^4)$.

Problemi ai Valori Iniziali

Errore di troncamento

- Per il metodo di Eulero abbiamo $\phi(t_i, y_i) = f(t_i, y_i)$ e si vede facilmente (anche dall'espressione del metodo di Runge-Kutta ad uno stadio) che $\tau_{i+1}(h) = O(h)$;
- per il metodo di Runge-Kutta a due stadi vediamo subito che $\tau_{i+1}(h) = O(h^2)$;
- per il metodo di Runge-Kutta a quattro stadi invece $\tau_{i+1}(h) = O(h^4)$.

Questo giustifica le nostre affermazioni sull'ordine dei vari metodi visti sopra.

Problemi al contorno

Equazioni del second'ordine

Problemi al contorno

Equazioni del second'ordine

- Qui ci occuperemo della soluzione di equazioni differenziali del tipo

$$y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x),$$

con le condizioni al contorno $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, di cui vogliamo determinare la soluzione per via numerica nell'intervallo

$$a \leq x \leq b.$$

Problemi al contorno

Equazioni del second'ordine

- Qui ci occuperemo della soluzione di equazioni differenziali del tipo

$$y''(x) = p(x) y'(x) + q(x) y(x) + r(x),$$

con le condizioni al contorno $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, di cui vogliamo determinare la soluzione per via numerica nell'intervallo

$$a \leq x \leq b.$$

- Per fare questo, iniziamo discretizzando la variabile indipendente come fatto in precedenza per i problemi ai valori iniziali: $\{x_i\}_{i=0}^N$, con $x_i = a + h i$.

Problemi al contorno

Equazioni del second'ordine

- Qui ci occuperemo della soluzione di equazioni differenziali del tipo

$$y''(x) = p(x) y'(x) + q(x) y(x) + r(x),$$

con le condizioni al contorno $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, di cui vogliamo determinare la soluzione per via numerica nell'intervallo $a \leq x \leq b$.

- Per fare questo, iniziamo discretizzando la variabile indipendente come fatto in precedenza per i problemi ai valori iniziali: $\{x_i\}_{i=0}^N$, con $x_i = a + h i$.
- Introduciamo quindi un'approssimazione alle differenze finite per gli operatori differenziali, prestando attenzione ad usare approssimazioni dello stesso ordine per la derivata prima e per la derivata seconda.

Problemi al contorno

- Per costruire uno schema del second'ordine adotteremo le formule alle differenze finite date da

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

Problemi al contorno

- Per costruire uno schema del second'ordine adatteremo le formule alle differenze finite date da

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

- Introducendo le approssimazioni numeriche w_i alla soluzione $y(x_i)$ come fatto in precedenza, indicando con $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ ed $r_i = r(x_i)$ e sostituendo le approssimazioni numeriche nell'equazione, otteniamo:

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q_i w_i + r_i$$

Problemi al contorno

- Quest'ultima relazione può essere usata solo per i punti interni, quindi $i = 1, 2, \dots, N - 1$, mentre per $x_0 = a$ e per $x_N = b$ useremo le condizioni al contorno.

Problemi al contorno

- Quest'ultima relazione può essere usata solo per i punti interni, quindi $i = 1, 2, \dots, N - 1$, mentre per $x_0 = a$ e per $x_N = b$ useremo le condizioni al contorno.
- Organizzando le incognite w_0, w_1, \dots, w_N in un vettore incognito $\mathbf{w} = (w_0, w_2, \dots, w_N)$ e moltiplicando le equazioni per $2h^2$, otteniamo il sistema algebrico lineare

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

con \mathbf{A} e \mathbf{b} dati da

Problemi al contorno

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 2 + h p_1 & -2(2 + h^2 q_1) & 2 - h p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 + h p_2 & -2(2 + h^2 q_2) & 2 - h p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 + h p_{N-2} & -2(2 + h^2 q_{N-2}) & 2 - h p_{N-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2 + h p_{N-1} & -2(2 + h^2 q_{N-1}) & 2 - h p_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problemi al contorno

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2h^2 r_1 \\ 2h^2 r_2 \\ \dots \\ 2h^2 r_{N-2} \\ 2h^2 r_{N-1} \\ \beta \end{pmatrix}$$

La matrice \mathbf{A} è tridiagonale, quindi si possono usare le tecniche numeriche per la risoluzione dei sistemi tridiagonali.