Integrali di superficie: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali superficiali sulle superfici specificate:

a) $$\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\,d\sigma, \quad \Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\le z\le 2\right\}$$

$$\left[\tfrac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-\tfrac{17}{64}\sqrt{17}\right)\right]$$

b) $$\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}}\,d\sigma,$$

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z = x+\frac{\sqrt{2}}{2}y^2,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2},\ y\le\sin x\right\}$$

$$\left[\tfrac{3}{32}\sqrt{2}\pi^2\right]$$

c) $$\int_\Sigma z^2\,d\sigma, \quad \Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z = xy,\ 0\le y\le\sqrt{3}x,\ x^2+y^2\le 1\right\}$$

$$\left[\tfrac{1}{420}\left(11\sqrt{2}-4\right)\left(\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{\sqrt{3}}{8}\right)\right]$$

d) $$\int_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma, \quad \Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2<1\right\}$$

$$\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\right]$$

e) $$\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\,d\sigma,\ \Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ (x,y,z) = (\sin(uv),\cos(uv),u),\ \ (u,v)\in\Omega\right\},$$

$$\Omega = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ \ \frac{1}{2}<u<v,\ v<1\right\} \qquad [1-\log 2]$$

$f)$ $\displaystyle\int_\Sigma \frac{1}{4z+1}\,d\sigma, \quad \Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2+y^2, \ x^2+y^2 < 1\right\}$

$$\left[\tfrac{\pi}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$$

Svolgimento

$a)$ Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\,d\sigma$, dove

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ 1 \le z \le 2\right\}.$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

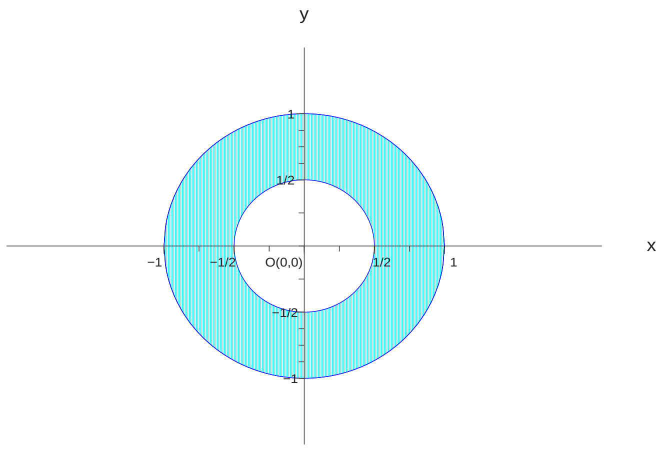

Fig. 1: L'insieme K.

Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\,d\sigma = \int_K \left(x^2+y^2\right)^2 \|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$. Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, 1 \right) \quad \Longrightarrow \quad \|N(x,y)\| = \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma = \int_K \left(x^2+y^2\right)^2 \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \left(x^2+y^2\right) \sqrt{1+(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy.$$

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in K \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $K = \Phi(K')$, dove

$$K' = \left\{ (\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma = \int_K \left(x^2+y^2\right) \sqrt{1+(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \int_{K'} \rho^3 \sqrt{1+\rho^4}\, d\rho\, d\vartheta =$$

ed essendo K' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^3 \sqrt{1+\rho^4}\, d\rho \right] = 2\pi \left[\frac{1}{6} \left(1+\rho^4\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{3} \left(2\sqrt{2} - \frac{17}{64}\sqrt{17} \right).$$

b) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}}\, d\sigma$, dove

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = x + \frac{\sqrt{2}}{2} y^2,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \leq \sin x \right\}.$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = x + \frac{\sqrt{2}}{2} y^2$, dove

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \leq \sin x \right\}.$$

Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, x + \frac{\sqrt{2}}{2} y^2 \right).$$

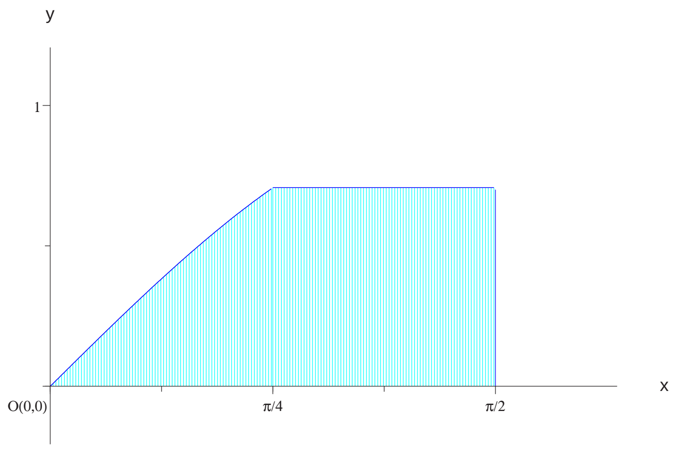

Fig. 2: L'insieme K.

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}}\,d\sigma = \int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^4}}\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$. Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-1, -\sqrt{2}y, 1\right),$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{2}\sqrt{1+y^2}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}}\,d\sigma = \int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^4}}\|N(x,y)\|\,dx\,dy = \sqrt{2}\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy.$$

Osserviamo che $K = K_1 \cup K_2$, dove

$$K_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ y \le \sin x\right\},$$

$$K_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Allora

$$\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}}\,d\sigma = \sqrt{2}\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\int_{K_1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy + \sqrt{2}\int_{K_2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy =$$

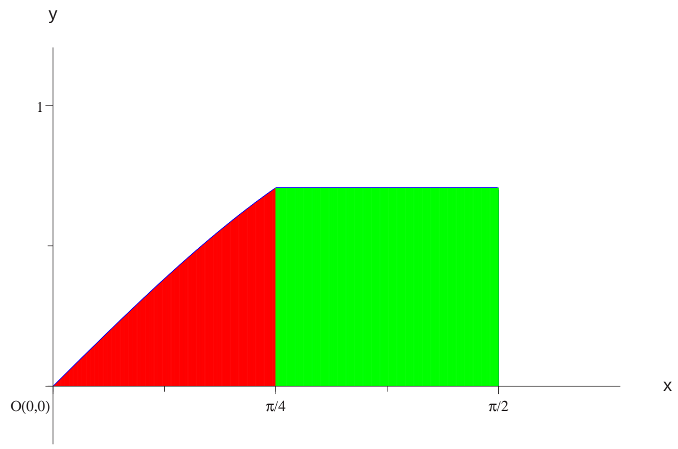

Fig. 3: Gli insiemi K_1 (in rosso) e K_2 (in verde).

ed essendo sia K_1 che K_2 y-semplici, si ottiene

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{\sin x}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right]dx + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right]dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big[\arcsin y\Big]_0^{\sin x}dx + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[\arcsin y\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx + \frac{\pi^2}{16}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi^2}{16}\sqrt{2} = \frac{3}{32}\sqrt{2}\pi^2.$$

c) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Sigma z^2\,d\sigma$, dove

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=xy,\ 0\le y\le\sqrt{3}x,\ x^2+y^2\le 1\right\}.$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g: K\to\mathbb{R}$ definita da $g(x,y)=xy$, dove

$$K = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le\sqrt{3}x,\ x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Si ha che $\Sigma=\sigma(K)$, dove $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = (x,y,xy).$$

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma z^2\,d\sigma = \int_K x^2y^2\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

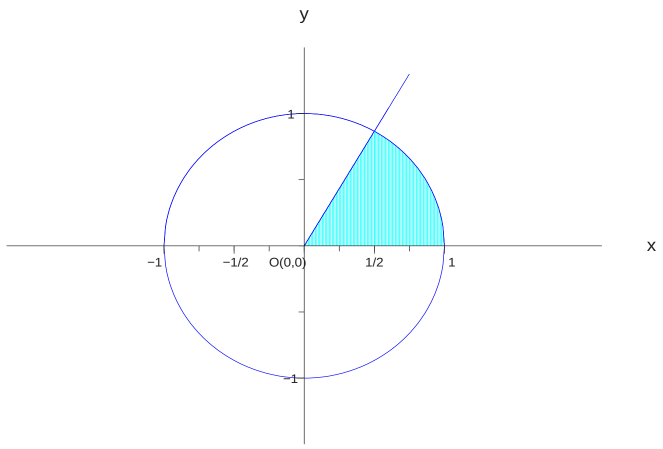

Fig. 4: L'insieme K.

dove $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$. Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = (-y,-x,1),$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma z^2\, d\sigma = \int_K x^2y^2 \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K x^2y^2\sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in K \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $K = \Phi(K')$, dove

$$K' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma z^2\, d\sigma = \int_K x^2y^2\sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_{K'} \rho^5\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho\, d\vartheta =$$

ed essendo K' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \right) \left[\int_0^1 \rho^5 \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho \right].$$

Calcoliamo separatamente i due integrali. Si ha che

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right)^2 \, d\vartheta = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} (2\vartheta - \sin 2\vartheta \cos 2\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right);$$

integrando due volte per parti si ottiene

$$\int_0^1 \rho^5 \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho = \left[\frac{1}{3} \rho^4 \left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \frac{4}{3} \int_0^1 \rho^3 \left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \, d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3} \left[\frac{1}{5} \rho^2 \left(1+\rho^2\right)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + \frac{8}{15} \int_0^1 \rho \left(1+\rho^2\right)^{\frac{5}{2}} \, d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{15}\sqrt{2} + \frac{8}{15} \left[\frac{1}{7} \left(1+\rho^2\right)^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{105} \left(11\sqrt{2} - 4 \right).$$

In conclusione

$$\int_\Sigma z^2 \, d\sigma = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \frac{2}{105} \left(11\sqrt{2} - 4 \right) = \frac{1}{420} \left(11\sqrt{2} - 4 \right) \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right).$$

d) Consideriamo l'integrale $\int_\Sigma \left(x^2+y^2\right) \, d\sigma$, dove

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = \sqrt{x^2+y^2}, \; x^2+y^2 < 1 \right\}.$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, dove

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 < 1 \right\}.$$

È quindi la parte del semicono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ compresa fra il vertice $O(0,0,0)$ e il piano $z = 1$.

Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2} \right).$$

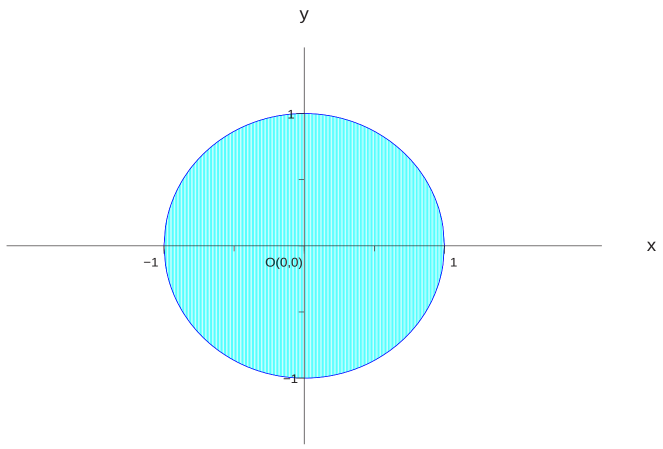

Fig. 5: L'insieme K (in azzurro).

Quindi si ha che

$$\int_{\Sigma} \left(x^2 + y^2\right)\, d\sigma = \int_K \left(x^2 + y^2\right) \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$. Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) =$$

$$= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \|N(x,y)\| = \sqrt{2}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} \left(x^2 + y^2\right)\, d\sigma = \int_K \left(x^2 + y^2\right) \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \sqrt{2} \int_K \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy.$$

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in K \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $K = \Phi(K')$, dove

$$K' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi\right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \left(x^2+y^2\right)\, d\sigma = \sqrt{2}\int_K \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy = \sqrt{2}\int_{K'} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta =$$

ed essendo K' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left[\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right] = 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

e) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\, d\sigma$, dove

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\;\; (x,y,z) = (\sin(uv), \cos(uv), u),\;\; (u,v)\in\Omega\right\},$$

$$\Omega = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\;\; \frac{1}{2} < u < v,\;\; v < 1\right\}.$$

Si ha che $\Sigma = \sigma(\Omega)$, dove $\sigma:\Omega\to\mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(u,v) = (\sin(uv), \cos(uv), u).$$

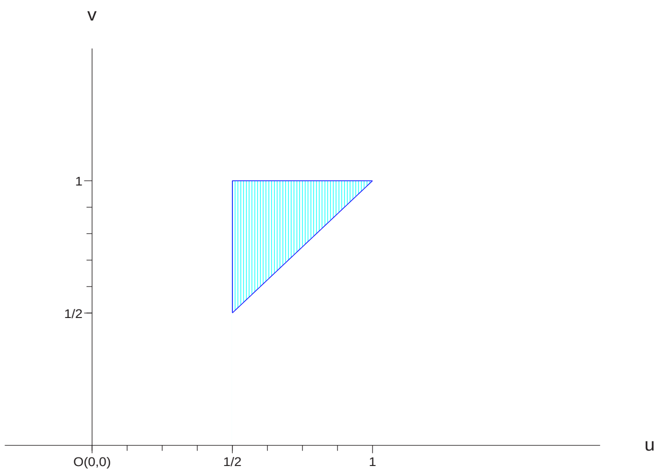

Fig. 6: L'insieme Ω (in azzurro).

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\, d\sigma = \int_\Omega \frac{1}{u^3}\|N(u,v)\|\, du\, dv,$$

dove $N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$. Si ha che

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (v\cos(uv), -v\sin(uv), 1), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial u}(v,v) = (u\cos(uv), -u\sin(uv), 0),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v\cos(uv) & -v\sin(uv) & 1 \\ u\cos(uv) & -u\sin(uv) & 0 \end{vmatrix} = u\sin(uv)\mathbf{i} + u\cos(uv)\mathbf{j}.$$

Quindi

$$N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (u\sin(uv), u\cos(uv), 0) \quad \Longrightarrow \quad \|N(u,v)\| = u.$$

Quindi

$$\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\,d\sigma = \int_\Omega \frac{1}{u^3}\|N(u,v)\|\,du\,dv = \int_\Omega \frac{1}{u^2}\,du\,dv =$$

essendo Ω u-semplice, si ottiene

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^v \frac{1}{u^2}\,du\right) dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[-\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^v dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 - \frac{1}{v}\right) dv = \Big[2v - \log v\Big]_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \log 2.$$

f) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{1}{4z+1}\,d\sigma$, dove

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2+y^2, \; x^2+y^2 < 1\right\}.$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = x^2+y^2$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 < 1\right\}.$$

È quindi la parte del paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$ compresa fra il vertice $O(0,0,0)$ e il piano $z = 1$.

Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,x^2+y^2\right).$$

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{1}{4z+1}\,d\sigma = \int_K \frac{1}{1+4x^2+4y^2}\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$. Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = (-2x,-2y,1),$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma \frac{1}{4z+1}\,d\sigma = \int_K \frac{1}{1+4x^2+4y^2}\|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dx\,dy.$$

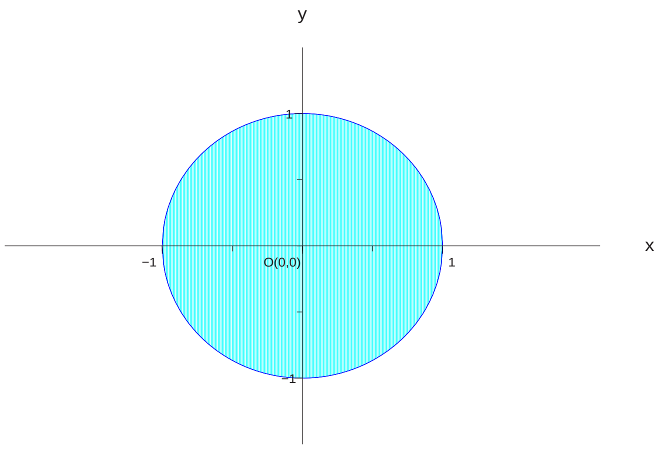

Fig. 7: L'insieme K (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in K \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $K = \Phi(K')$, dove

$$K' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi\right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{1}{4z+1}\, d\sigma = \int_K \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dx\, dy = \int_{K'} \frac{\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}\, d\rho\, d\vartheta =$$

ed essendo K' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left[\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}\, d\rho\right] = 2\pi\left[\frac{1}{4}\sqrt{1+4\rho^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Esercizio 2. Calcolare l'area delle seguenti superfici:

a) $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2y^2\right), \ x^2 + 4y^2 < 8\right\}$

$\left[\frac{26}{3}\pi\right]$

b) $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}, \quad R > 0$

$[4\pi R^2]$

Svolgimento

a) Consideriamo la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2), \ x^2 + 4y^2 < 8\right\}$.
La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2)$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 < 8\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} < 1\right\}.$$

È quindi parte del paraboloide ellittico di equazione $z = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2)$.

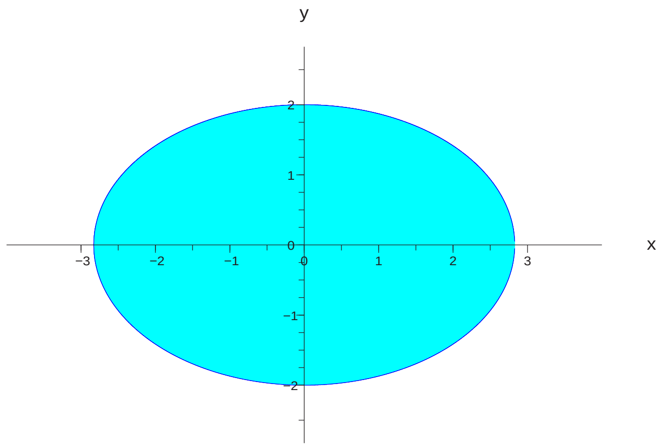

Fig. 8: L'insieme K (in azzurro).

Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, \frac{1}{2}\left(x^2 + 2y^2\right)\right).$$

Quindi si ha che l'area di Σ è

$$\mathcal{A}_\Sigma = \int_K \|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$. Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = (-x, -2y, 1),$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1+x^2+4y^2}.$$

Quindi

$$\mathcal{A}_\Sigma = \int_K \|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K \sqrt{1+x^2+4y^2}\,dx\,dy.$$

Passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\rho\cos\vartheta \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = 4\rho.$$

Allora

$$(x,y) \in K \quad \iff \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $K = \Phi(K')$, dove

$$K' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi\right\}.$$

Quindi si ha che

$$\mathcal{A}_\Sigma = \int_K \|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K \sqrt{1+x^2+4y^2}\,dx\,dy = 4\int_{K'} \rho\sqrt{1+8\rho^2}\,d\rho\,d\vartheta =$$

ed essendo K' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= 4\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left[\int_0^1 \rho\sqrt{1+8\rho^2}\,d\rho\right] = 8\pi\left[\frac{1}{24}\left(1+8\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{26}{3}\pi.$$

b) Consideriamo la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = R^2\right\}$, con $R > 0$. La superficie Σ è la sfera di centro $O(0,0,0)$ e raggio R. Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(\vartheta,\varphi) = (R\sin\vartheta\cos\varphi, R\sin\vartheta\sin\varphi, R\cos\vartheta),$$

dove $K = \left\{(\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \vartheta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$.

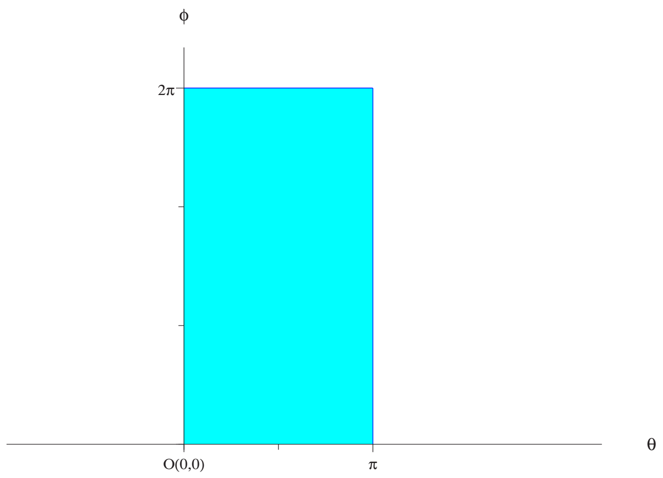

Fig. 9: L'insieme K.

Quindi si ha che l'area di Σ è

$$\mathcal{A}_\Sigma = \int_K \|N(\vartheta,\varphi)\|\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove $N(\vartheta,\varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi)$. Si ha che

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi) = (R\cos\vartheta\cos\varphi, R\cos\vartheta\sin\varphi, -R\sin\vartheta),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi) = (-R\sin\vartheta\sin\varphi, R\sin\vartheta\cos\varphi, 0),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\mathbf{k}.$$

Quindi

$$N(\vartheta,\varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi) = (R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi, R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi, R^2\sin\vartheta\cos\vartheta),$$

$$\|N(\vartheta,\varphi)\| = R^2\sin\vartheta.$$

Quindi

$$\mathcal{A}_\Sigma = \int_K \|N(\vartheta,\varphi)\|\, d\vartheta\, d\varphi = R^2 \int_K \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e di una di φ, si ottiene

$$= R^2\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left[\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\right] = 2\pi R^2\Big[-\cos\vartheta\Big]_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

Esercizio 3. Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x, y, z^2)$ dalla superficie costituita dal bordo di

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -1 < z < -x^2 - y^2\right\}.$$

$\left[\frac{\pi}{3}\right]$

Svolgimento

Il flusso uscente del campo vettoriale F dal bordo di D può essere calcolato in due modi: con la definizione oppure applicando il Teorema di Gauss, detto anche della divergenza.

1° modo: con la definizione

Si ha che $\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -1, \ x^2 + y^2 < 1\right\},$$

$$\Sigma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -x^2 - y^2, \ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Quindi

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_{\Sigma_1} F \cdot n + \int_{\Sigma_2} F \cdot n.$$

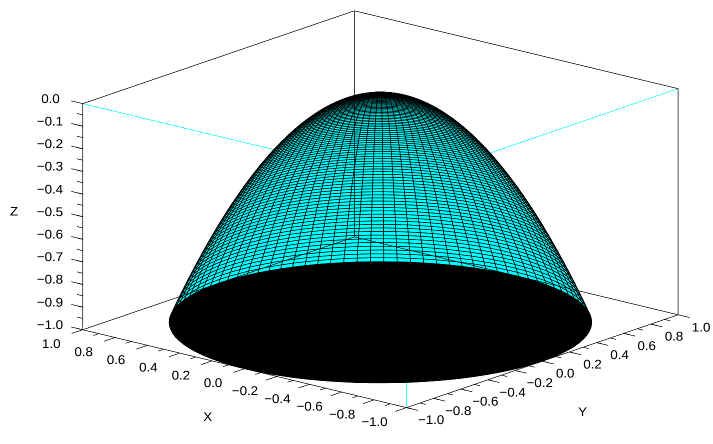

Fig. 10: L'insieme $\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, con Σ_1 (in nero) e Σ_2 (in verde).

Si ha che Σ_1 è il grafico della funzione $g_1 : K \to \mathbb{R}$ definita da $g_1(x, y) = -1$ e Σ_2 è il grafico della funzione $g_2 : K \to \mathbb{R}$ definita da $g_2(x, y) = -x^2 - y^2$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

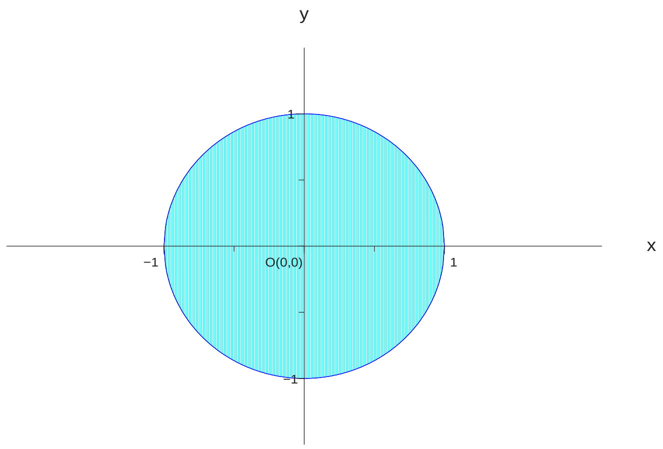

Fig. 11: L'insieme K (in azzurro).

Allora si ha che $\Sigma_1 = \sigma_1(K)$, dove $\sigma_1 : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma_1(x, y) = (x, y, g_1(x, y)) = (x, y, -1)$$

e $\Sigma_2 = \sigma_2(K)$, dove $\sigma_2 : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma_2(x, y) = (x, y, g_2(x, y)) = \left(x, y, -x^2 - y^2\right).$$

Per definizione di integrale di flusso si ha che

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n = \int_K F(\sigma_1(x, y)) \cdot N_1(x, y)\, dx\, dy,$$

dove $N_1(x, y)$ è il vettore normale esterno a D nel punto $\sigma_1(x, y)$ uscente da Σ_1. Si ha che il vettore $N(x, y) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x, y)$ è normale alla superficie $\Sigma_1 = \sigma_1(K)$. Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y), 1\right) = (0, 0, 1).$$

Questo vettore normale è entrante in D. Quindi un vettore uscente è $N_1(x, y) = -N(x, y) = (0, 0, -1)$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n = \int_K F(\sigma_1(x, y)) \cdot N_1(x, y)\, dx\, dy = \int_K F(x, y, -1) \cdot (0, 0, -1)\, dx\, dy =$$

$$= \int_K (x, y, 1) \cdot (0, 0, -1)\, dx\, dy = -\int_K dx\, dy = -m(K) = -\pi.$$

Per definizione di integrale di flusso si ha che

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n = \int_K F(\sigma_2(x, y)) \cdot N_2(x, y)\, dx\, dy,$$

dove $N_2(x, y)$ è il vettore normale esterno a D nel punto $\sigma_2(x, y)$ uscente da Σ_2. Si ha che il vettore $N(x, y) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x, y)$ è normale alla superficie $\Sigma_2 = \sigma_2(K)$. Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y), 1\right) = (2x, 2y, 1).$$

Questo vettore normale è uscente da D. Quindi un vettore uscente è $N_2(x, y) = N(x, y) = (2x, 2y, 1)$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n = \int_K F(\sigma_2(x, y)) \cdot N_2(x, y)\, dx\, dy = \int_K F\left(x, y, -x^2 - y^2\right) \cdot (2x, 2y, 1)\, dx\, dy =$$

$$= \int_K \left(x, y, \left(x^2 + y^2\right)^2\right) \cdot (2x, 2y, 1)\, dx\, dy = \int_K \left[2\left(x^2 + y^2\right) + \left(x^2 + y^2\right)^2\right] dx\, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) \left[\int_0^1 \left(2\rho^3 + \rho^5\right) d\rho\right] = 2\pi \left[\frac{1}{2}\rho^4 + \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_{\Sigma_1} F \cdot n + \int_{\Sigma_2} F \cdot n = \frac{\pi}{3}.$$

2° modo: con il Teorema di Gauss (o della divergenza)

Essendo il campo F di classe C^1 e l'insieme D un aperto con bordo, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\mathrm{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z).$$

Quindi $\mathrm{div} F(x, y, z) = 2(1 + z)$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 2\int_D (1 + z)\, dx\, dy\, dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$= 2\int_K \left(\int_{-1}^{-x^2-y^2} (1+z)\, dz \right) dx\, dy = 2\int_K \left[z + \frac{1}{2}z^2 \right]_{-1}^{-x^2-y^2} dx\, dy =$$

$$= 2\int_K \left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 - x^2 - y^2 + \frac{1}{2} \right] dx\, dy,$$

dove

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1 \right\}.$$

Passando in coordinate polari nel piano si ottiene

$$\int_{\partial D} F \cdot n = 2\int_K \left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 - x^2 - y^2 + \frac{1}{2} \right] dx\, dy =$$

$$= 2\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[\int_0^1 \left[\frac{1}{2}\rho^5 - \rho^3 + \frac{1}{2}\rho \right] d\rho \right] = 4\pi \left[\frac{1}{12}\rho^6 - \frac{1}{4}\rho^4 + \frac{1}{4}\rho^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 4. Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale F dal bordo dell'insieme D nei seguenti casi:

a) $F(x,y,z) = (x,y,z), \quad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z < 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0 \right\}$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

b) $F(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z\right), \quad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 < z < 1 \right\}$

$\left[\frac{\pi}{2}\right]$

c) $F(x,y,z) = \left(x^3, y^3, z^3\right), \quad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 < 1, \ z > 0 \right\}$

$\left[\frac{6}{5}\pi\right]$

Svolgimento

a) Calcoliamo il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x,y,z)$ dal bordo dell'insieme $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z < 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0 \right\}$. Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Quindi $\mathrm{div}F(x,y,z) = 3$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 3\int_D dx\,dy\,dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$= 3\int_\Omega \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dx\,dy = 3\int_\Omega (1-x-y)\,dx\,dy,$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1-x\right\}.$$

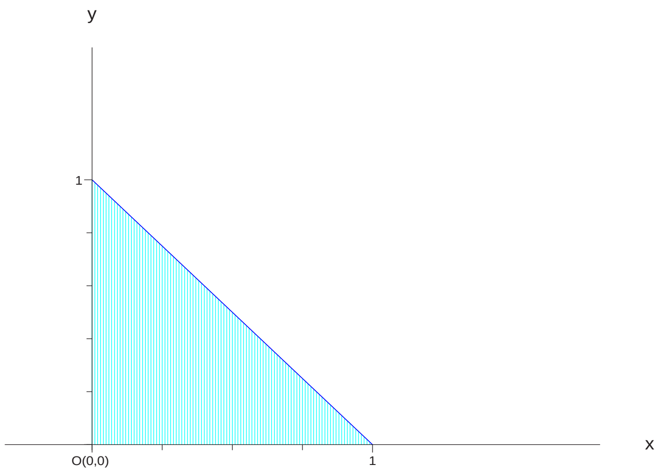

Fig. 12: L'insieme Ω (in azzurro).

Essendo Ω y-semplice, si ottiene

$$\int_{\partial D} F \cdot n = 3\int_\Omega (1-x-y)\,dx\,dy = 3\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\right) dx =$$

$$= 3\int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

b) Calcoliamo il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z)$ dal bordo dell'insieme $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x^2 + y^2 < z < 1\right\}$. Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Quindi $\mathrm{div}F(x,y,z) = 2x + 2y + 1$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D (2x+2y+1)\,dx\,dy\,dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$= \int_\Omega \left(\int_{x^2+y^2}^1 (2x+2y+1)\,dz \right) dx\,dy = \int_\Omega (2x+2y+1)\left(1 - x^2 - y^2\right)\,dx\,dy,$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

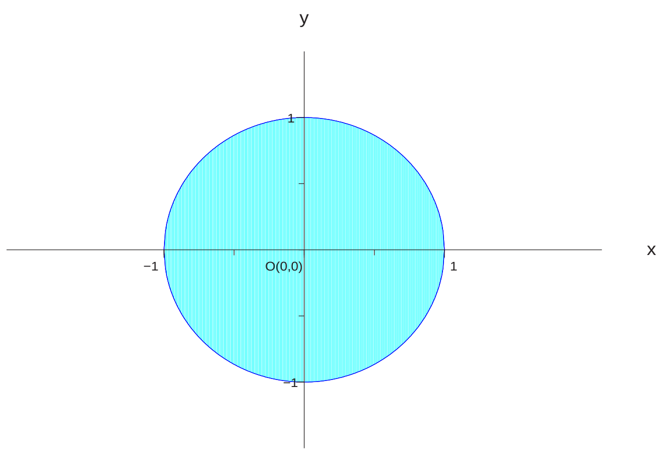

Fig. 13: L'insieme Ω (in azzurro).

Passando in ccordinate polari nel piano si ottiene

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_\Omega (2x+2y+1)\left(1 - x^2 - y^2\right)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (2\rho\cos\vartheta + 2\rho\sin\vartheta + 1)\left(\rho - \rho^3\right)\,d\rho \right] d\vartheta =$$

essendo $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta = 0$, si ottiene

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right)\,d\rho \right] = 2\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$c)$ Calcoliamo il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ dal bordo dell'insieme $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 < 1, \; z > 0\right\}$. Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Quindi $\mathrm{div} F(x,y,z) = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 3 \int_D \left(x^2+y^2+z^2\right)\, dx\, dy\, dz.$$

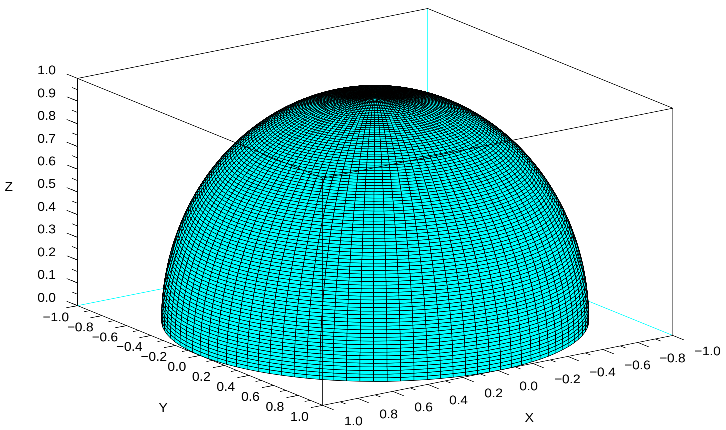

Fig. 14: L'insieme D.

Passiamo in coordinate polari nello spazio. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \; 0 \leq \vartheta \leq \pi, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho^2 \sin\vartheta.$$

Allora

$$(x,y,z) \in D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{(\rho, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \leq \rho < 1, \; 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \varphi < 2\pi\right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = 3 \int_D \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dx\, dy\, dz = 3 \int_{D'} \rho^4 \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo D' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ, una di ϑ e una di φ, si ottiene

$$= 3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta\right) \left[\int_0^1 \rho^4\, d\rho\right] = 6\pi \Big[-\cos\vartheta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^1 = \frac{6}{5}\pi.$$