Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli

Analisi Matematica — 2^a edizione

Dimostrazioni richiamate nel testo

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

1 Dimostrazioni del Capitolo 1 **2**

2 Dimostrazioni del Capitolo 2 **8**

3 Dimostrazioni del Capitolo 3 **9**

4 Dimostrazioni del Capitolo 4 **12**

5 Dimostrazioni del Capitolo 5 **18**

6 Dimostrazioni del Capitolo 6 **19**

7 Dimostrazioni del Capitolo 7 **21**

8 Dimostrazioni del Capitolo 8 **28**

9 Dimostrazioni del Capitolo 9 **35**

10 Dimostrazioni del Capitolo 10 **39**

11 Dimostrazioni del Capitolo 11 **41**

12 Dimostrazioni del Capitolo 12 **51**

13 Dimostrazioni del Capitolo 13 **56**

14 Dimostrazioni del Capitolo 14 **58**

15 Dimostrazioni del Capitolo 15 **65**

16 Dimostrazioni del Capitolo 16 **68**

17 Dimostrazioni del Capitolo 17 **70**

18 Dimostrazioni del Capitolo 18 **75**

19 Dimostrazioni del Capitolo 19 **87**

1 Dimostrazioni del Capitolo 1

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 1.3 (proprietà di densità di $\mathbb{R}$), pag. 9 2
Dimostrazione del Teorema 1.10 (proprietà di completezza di $\mathbb{R}$), pag. 14 2
Dimostrazione del Teorema 1.11 (esistenza e unicità della radice n-esima), pag. 15 4
Dimostrazione del Teorema 1.13 (esistenza e unicità del logaritmo), pag. 17 5
Dimostrazione del Teorema 1.15 (proprietà elementari dei numeri complessi), pag. 20 6

Dimostrazione del Teorema 1.3 (proprietà di densità di $\mathbb{R}$), pag. 9

Dobbiamo dimostrare che se $x, y \in \mathbb{R}$ sono tali che $x < y$, allora l'insieme $\{z \in \mathbb{R} : x < z < y\}$ contiene infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

Consideriamo prima il caso in cui $y < 0$. Per la positività di $y - x$ e per la proprietà 19 del Paragrafo 1.2, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$y - x > 10^{-n_0} = 10 \cdot 10^{-(n_0+1)} > 2 \cdot 10^{-(n_0+1)}. \tag{D1.1}$$

Sia $y = -p.\beta_1\beta_2\ldots$. Per la (1.2)

$$-p.\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n_0+1} - 10^{-(n_0+1)} < y \le -p.\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n_0+1}\,. \tag{D1.2}$$

Posto

$$p.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n_0+1} := p.\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n_0+1} + 10^{-(n_0+1)},$$

si ha:

$$\begin{aligned} x &\overset{\text{(D1.1)}}{<} y - 2\cdot 10^{-(n_0+1)} \overset{\text{(D1.2)}}{\le} -p.\beta_1\ldots\beta_{n_0+1} - 2\cdot 10^{-n_0+1} \\ &= -p.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n_0+1} - 10^{-(n_0+1)} < -p.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n_0+1} \overset{\text{(D1.2)}}{<} y. \end{aligned}$$

Allora ogni allineamento decimale della forma $z = p.\alpha_1\cdots\alpha_{n_0+1}\gamma_{n_0+2}\gamma_{n_0+3}\cdots$ verifica $x < z < y$. Variando i valori di γ_j, $j \ge n_0 + 2$, si ottengono infiniti allineamenti limitati o periodici (numeri razionali) e infiniti allineamenti non limitati e non periodici (numeri irrazionali) che verificano $x < z < y$.

Se $0 \le y = p,\beta_1\beta_2\ldots$, si pone $\hat{y} = y - p - 1$ e $\hat{x} = x - p - 1$, cosicché $\hat{x} < \hat{y} < 0$. Per quanto appena dimostrato, esistono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali $\hat{z}$ tali che $\hat{x} < \hat{z} < \hat{y}$: ponendo $z = \hat{z} + p + 1$ si ottengono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali che verificano $x < z < y$.

Dimostrazione del Teorema 1.10 (proprietà di completezza di $\mathbb{R}$), pag. 14

Dimostriamo il Teorema 1.10 nel caso in cui A è limitato superiormente (il caso in cui A è limitato inferiormente è del tutto analogo). Dobbiamo cioè dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato superiormente, allora esiste $\sup A \in \mathbb{R}$.

Per definizione A ammette un maggiorante, ovvero un numero reale m tale che $a \leq m$ per ogni $a \in A$. Osserviamo preliminarmente che è sufficiente dimostrare il Teorema nel caso in cui $m < 0$. Se infatti il Teorema è vero in quel caso, allora dato un insieme A superiormente limitato da $m \geq 0$, operiamo una "traslazione" ponendo $A^* := \{y \in \mathbb{R} : y = x - m - 1,\ x \in A\}$: poiché -1 è un maggiorante per A^*, esiste $\sup A^*$, e per la definizione di A^* si ha $\sup A^* = \ell \Leftrightarrow \sup A = \ell + m + 1$.

La dimostrazione si divide in *due parti*:

(a) si costruisce un candidato ad essere estremo superiore di A, nel senso che si prova che esiste $\ell = -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots < 0$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} -p.\alpha_1 \cdots \alpha_n & \text{è maggiorante di } A \\ -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n - 10^{-n} & \text{non è maggiorante di } A, \end{cases} \tag{D1.3}$$

(b) si dimostra che effettivamente $\ell = \sup A$; per la (1.10), ciò è equivalente a dimostrare che:

($b1$) $\forall x \in A : x \leq \ell$;

($b2$) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A : x > \ell - \varepsilon$.

(*a*). Per provare (a) osserviamo che, poiché A ammette maggiorante negativo, esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{cases} -p & \text{è maggiorante di } A \\ -p - 1 & \text{non è maggiorante di } A; \end{cases}$$

quindi

$$\exists\, \alpha_1 \in \{0, 1, \cdots, 9\} : \begin{cases} -p.\alpha_1 & \text{è maggiorante di } A \\ -p.\alpha_1 - 10^{-1} & \text{non è maggiorante di } A. \end{cases}$$

Ripetendo il ragionamento si ha

$$\exists\, \alpha_2 \in \{0, 1, \cdots, 9\} : \begin{cases} -p.\alpha_1\alpha_2 & \text{è maggiorante di } A \\ -p.\alpha_1\alpha_2 - 10^{-2} & \text{non è maggiorante di } A \end{cases}$$

e così procedendo si costruisce il "candidato" $\ell := -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots$ che verifica la proprietà (D1.3).

(*b1*). Per provare ($b1$) procediamo per assurdo e supponiamo che ($b1$) sia falsa; allora esiste $x \in A$ tale che $x > \ell$, ovvero $x - \ell > 0$. Per la proprietà 19 del Paragrafo 1.2, ciò implica che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x - \ell > 10^{-n}$, da cui segue che

$$x > \ell + 10^{-n} = -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots + 10^{-n} \overset{(1.2)}{>} -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n + 10^{-n} - 10^{-n} = -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Quindi $-p.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ non è maggiorante di A, in contraddizione con la (D1.3). Perciò ($b1$) è vera.

(*b2*). Per provare ($b2$) procediamo ancora per assurdo e supponiamo che ($b2$) sia falsa, ovvero che esista $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $x \leq -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots - \varepsilon$ per ogni $x \in A$. Poiché $\varepsilon > 0$, per la proprietà 19 del Paragrafo 1.2 esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varepsilon \geq 10^{-n}$; quindi si ha

$$x \leq -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots - 10^{-n} \quad \text{per ogni } \ x \in A.$$

D'altra parte
$$-p.\alpha_1\alpha_2\cdots \leq -p.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,$$
da cui segue che
$$x \leq -p.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n - 10^{-n} \quad \text{per ogni } \ x \in A,$$
ovvero $-p.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n - 10^{-n}$ è maggiorante di A, in contraddizione con la (D1.3). Ciò prova ($b2$) e completa la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del Teorema 1.11 (esistenza e unicità della radice n-esima), pag. 15

Dimostriamo il Teorema 1.11 nel caso particolare in cui $n = 2$ e $y = 2$, ovvero proviamo che
$$\text{esiste un unico } x \in [0,\infty) \text{ tale che } x^2 = 2$$
(il caso generale è del tutto analogo; lo studente è invitato a verificarlo per esercizio).

L'unicità segue immediatamente dal fatto che se $0 \leq x_1 < x_2$, allora
$$x_1^2 = x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_2 = x_2^2.$$

Per dimostrare l'esistenza, siano $A = \{s \in \mathbb{R} : s^2 < 2\}$ e $x = \sup A$. Segue dal Teorema 1.10 che x è ben definito: infatti A è limitato superiormente (2 è maggiorante di A) e $A \neq \emptyset$ ($1 \in A$). Inoltre $1 < x < 2$: infatti $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$. Per dimostrare che $x^2 = 2$ basta provare che
$$(a) \quad x^2 \leq 2 \qquad \text{e} \qquad (b) \quad x^2 \geq 2.$$

(*a*). Per provare (a) procediamo per assurdo. Se (a) è falsa, allora $x^2 > 2$ e quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $x^2 > 2 + \varepsilon$. Dimostreremo che da ciò segue che
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \begin{cases} x - 10^{-n_0} > 0 \\ (x - 10^{-n_0})^2 > 2, \end{cases} \tag{D1.4}$$
ovvero che $x - 10^{-n_0}$ è un maggiorante di A, in contraddizione con $x = \sup A$. Resta dunque da dimostrare (D1.4). Poiché $x > 1$, è evidente che
$$x - 10^{-n} > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Poiché $x^2 > 2 + \varepsilon$, $x < 2$ e $10^{-2n} > 0$, si ottiene
$$(x - 10^{-n})^2 = x^2 - 2 \cdot 10^{-n}x + 10^{-2n} > 2 + \varepsilon - 4 \cdot 10^{-n},$$
quindi $(x - 10^{-n})^2 > 2$ se
$$\varepsilon - 4 \cdot 10^{-n} \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad 4 \cdot 10^{-n} \leq \varepsilon.$$
Per la positività di ε e per la proprietà 19 del Paragrafo 1.2, è possibile scegliere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $10^{-n_0} \leq \frac{\varepsilon}{4}$, e (D1.4) è provata.

(*b*). Per provare (b), procediamo ancora per assurdo e supponiamo che $x^2 < 2$; quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $x^2 < 2 - \varepsilon$. Basta dimostrare che da ciò segue che l'esistenza di $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che
$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \ (x + 10^{-n_1})^2 < 2; \tag{D1.5}$$

infatti in tal caso $x + 10^{-n_1} \in A$, ovvero x non è maggiorante di A, in contraddizione con $x = \sup A$. Sia quindi $n_1 \in \mathbb{N}$ (da determinare); si ha

$$\begin{aligned}(x + 10^{-n_1})^2 &= x^2 + 2x10^{-n_1} + 10^{-2n_1} < 2 - \varepsilon + 4 \cdot 10^{-n_1} + 10^{-2n_1} \\ &< 2 - \varepsilon + 5 \cdot 10^{-n_1}.\end{aligned}$$

Se si sceglie $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $10^{-n_1} \leq \frac{\varepsilon}{5}$, il che è possibile per la positività di ε e per la proprietà 19 del Paragrafo 1.2, risulta $2 - \varepsilon + 5 \cdot 10^{-n_1} \leq 2$, ovvero la (D1.5). Ciò conclude la dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 1.13 (esistenza e unicità del logaritmo), pag. 17

Dobbiamo dimostrare che per ogni $a, y \in (0, \infty)$ con $a \neq 1$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$.

L'unicità segue dalla proprietà 9 delle potenze. Per l'esistenza si distinguono alcuni casi.

(I) Se $y = 1$, allora $x = 0$ è ovviamente soluzione dell'equazione $a^x = 1$.

(II) Se $a > 1$ e $y > 1$, si pone

$$x := \sup\{s \in \mathbb{R} : a^s < y\},$$

(si può facilmente verificare che l'insieme $\{s \in \mathbb{R} : a^s < y\}$ è limitato superiormente, quindi, per la completezza di $\mathbb{R}$, ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$; lo studente spieghi l'idea della definizione di x come estremo superiore!) e si dimostra che $a^x = y$ (omettiamo questa parte poiché i ragionamenti sono analoghi a quelli usati nella dimostrazione del Teorema 1.11).

(III) Se $0 < a < 1$ e $y > 1$, allora si ha, per le proprietà delle potenze, che

$$a^x = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = y,$$

quindi essendo $\frac{1}{a} > 1$ risulta

$$\log_a y := -\log_{\frac{1}{a}} y.$$

(IV) Se $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ e $0 < y < 1$, allora, per le proprietà delle potenze,

$$a^x = y \Leftrightarrow a^{-x} = \frac{1}{y},$$

e, essendo $\frac{1}{y} > 1$, si pone

$$\log_a y := -\log_a \left(\frac{1}{y}\right).$$

Dimostrazione del Teorema 1.15 (proprietà elementari dei numeri complessi), pag. 20

La dimostrazione si basa sulla definizione della somma e del prodotto di numeri complessi e sulle proprietà elementari verificate dai numeri reali. Utilizzeremo sempre le notazioni $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$ ($k \in \mathbb{N}$) ecc., dove $x, y, x_k, y_k \in \mathbb{R}$.

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Per la definizione di addizione di numeri complessi,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \text{e} \quad z_2 + z_1 = (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1).$$

Poiché l'addizione di numeri reali verifica la proprietà commutativa, $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ e $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$, quindi $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *per ogni* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Per la definizione di addizione di numeri complessi,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) + (x_3 + iy_3) = ((x_1 + x_2) + x_3) + i((y_1 + y_2) + y_3)$$

e

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1) + ((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)) = (x_1 + (x_2 + x_3)) + i(y_1 + (y_2 + y_3)).$$

Poiché l'addizione di numeri reali verifica la proprietà associativa, $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ e $(y_1 + y_2) + y_3 = y_1 + (y_2 + y_3)$, quindi $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3. *Esiste un unico numero complesso, indicato con* 0*, tale che* $z + 0 = z$ *per ogni* $z \in C$.

Cerchiamo $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ tale che $z + z_0 = z$ per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$, cioè tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x + iy) + (x_0 + iy_0) = x + iy \quad \text{ovvero} \quad (x + x_0) + i(y + y_0) = x + iy.$$

Allora $x + x_0 = x$ e $y + y_0 = y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ ovvero $x_0 = y_0 = 0$. Perciò $z_0 = 0 + i0$ è l'unico numero complesso che verifica la proprietà richiesta.

4. *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *esiste un unico numero complesso, indicato con* $-z$*, tale che* $z+(-z) = 0$.

Dato $z = x+iy \in \mathbb{C}$, cerchiamo $w = \xi+i\eta \in \mathbb{C}$ tale che $z+w = 0$ ovvero $(x+\xi)+i(y+\eta) = 0 + i0$. Allora $x + \xi = 0$ e $y + \eta = 0$, per cui $\xi = -x$ e $\eta = -y$, quindi $-z = (-x) + i(-y)$ è l'unico numero complesso che verifica la proprietà richiesta.

5. $z_1z_2 = z_2z_1$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Per la definizione di moltiplicazione di numeri complessi,

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad \text{e} \quad z_2z_1 = (x_2x_1 - y_2y_1) + i(x_2y_1 + y_2x_1).$$

Poiché la moltiplicazione di numeri reali verifica la proprietà commutativa, $x_1x_2 - y_1y_2 = x_2x_1 - y_2y_1$ e $x_1y_2 + y_1x_2 = x_2y_1 + y_2x_1$, quindi $z_1z_2 = z_2z_1$.

6. $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ *per ogni* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Per la definizione di moltiplicazione di due numeri complessi,

$$\begin{aligned}(z_1z_2)z_3 &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2))(x_3 + iy_3)\\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3) + i((x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_1(z_2z_3) &= (x_1 + iy_1)((x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_2y_3 + y_2x_3)) \\ &= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3)) + i(x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)). \end{aligned}$$

Poiché i numeri reali verificano le proprietà commutativa e associativa,

$$(x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3 = x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3)$$

e

$$(x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3 = x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3),$$

quindi $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.

7. *Esiste un unico numero complesso, indicato con* 1*, tale che* $z \cdot 1 = z$ *per ogni* $z \in C$.

Cerchiamo $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ tale che $zz_1 = z$ per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$, cioè tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x + iy)(x_1 + iy_1) = x + iy \quad \text{ovvero} \quad (xx_1 - yy_1) + i(xy_1 + yx_1) = x + iy$$

ovvero

$$xx_1 - yy_1 = x \quad \text{e} \quad xy_1 + yx_1 = y \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

La scelta di $x = 0$ e $y = 1$ nella prima uguaglianza implica che $y_1 = 0$, quindi rimane da dimostrare che esiste un unico $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $xx_1 = x$ e $yx_1 = y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Per la proprietà 7 dei numeri reali $x_1 = 1$ è l'unica possibilità, quindi $z_1 = 1 + i0$ è l'unico numero complesso che verifica la proprietà richiesta.

8. *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$*,* $z \neq 0$*, esiste un unico numero complesso, indicato con* z^{-1}*, tale che* $z \cdot z^{-1} = 1$.

Dato $z = x + iy \neq 0$, cerchiamo $w = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ tale che $zw = 1$ ovvero $(x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi) = 1 + i0$. Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x\xi - y\eta = 1 \\ x\eta + y\xi = 0. \end{cases}$$

rispetto a $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Se $x \neq 0$, per la seconda equazione $\eta = -y\xi/x$, e sostituendolo nella prima equazione, si trova

$$x\xi + \frac{y^2}{x}\xi = 1 \quad \text{ovvero} \quad \xi = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Allora $\eta = -\frac{y}{x}\xi = -\frac{y}{x^2+y^2}$, quindi, se $x \neq 0$, $w = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ è l'unico numero complesso tale che $zw = 1$. Se invece $x = 0$, necessariamente $y \neq 0$ e partendo dall'ugualianza $\xi = -x\eta/y$ si ragiona in modo analogo per giungere alla stessa conclusione.

9. *Per ogni* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$*,* $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Dati $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, 3)$ si ha che

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)z_3 &= ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2))(x_3 + iy_3) \\ &= ((x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3) + i((x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_1z_3 + z_2z_3 &= (x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + y_1x_3) + (x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_2y_3 + y_2x_3) \\ &= ((x_1x_3 - y_1y_3 + x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_3 + y_2x_3)). \end{aligned}$$

Chiaramente $(x_1+x_2)x_3-(y_1+y_2)y_3 = x_1x_3-y_1y_3+x_2x_3-y_2y_3$ e $(x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3 = x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_3 + y_2x_3$, quindi $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

2 Dimostrazioni del Capitolo 2

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione che $\mathbb{Q}$ è numerabile, pag. 51 8

Dimostrazione che $\mathbb{Q}$ è numerabile, pag. 51

Si elencano i numeri razionali seguendo le frecce indicate nella tabella sottostante, saltando quei numeri razionali che si sono già elencati in precedenza:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \ldots.$$

In tal modo si determina una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
1/1 & & 1/2 & \rightarrow & 1/3 & & 1/4 & \rightarrow & 1/5 & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow \\
2/1 & & 2/2 & & 2/3 & & 2/4 & & 2/5 & \ldots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
3/1 & & 3/2 & & 3/3 & & 3/4 & & 3/5 & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
4/1 & & 4/2 & & 4/3 & & 4/4 & & 4/5 & \ldots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
5/1 & & 5/2 & & 5/3 & & 5/4 & & 5/5 & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
6/1 & & 6/2 & & 6/3 & & 6/4 & & 6/5 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ldots
\end{array}$$

3 Dimostrazioni del Capitolo 3

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Lemma 3.6, pag. 78 9
Dimostrazione del Teorema 3.7 (Teorema di Bolzano-Weierstrass), pag. 78 9
Dimostrazione del Teorema 3.20 (aritmetica parziale di $\mathbb{R}^*$), pag. 89 . . 11

Dimostrazione del Lemma 3.6, pag. 78

Dobbiamo dimostrare che se $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è un punto di accumulazione per $E \subset \mathbb{R}$, un qualunque intorno $\mathcal{U}$ di x_0 contiene infiniti punti di E.

Per definizione, esiste $x_1 \neq x_0$ tale che $x_1 \in E \cap \mathcal{U}$. Quindi, per il principio di induzione, basta dimostrare che dati n punti ($n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$) $x_1, \dots, x_n$ appartenenti ad $E \cap \mathcal{U}$ e diversi da x_0, esiste un punto $x_{n+1} \in E \cap \mathcal{U}$ tale che $x_{n+1} \neq x_k$ per $k = 0, 1, \dots, n$. Per la proprietà di separazione della topologia di $\mathbb{R}^*$, per ogni $k = 1, \dots, n$ esiste un intorno $\mathcal{U}_k$ di x_0 tale che $x_k \notin \mathcal{U}_k$. Sia $\mathcal{V} := \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}$. Allora $x_k \notin \mathcal{V}$ per ogni $k = 1, \dots, n$ e, per la proprietà (ii) della topologia, $\mathcal{V}$ è un intorno di x_0. Per la definizione di punto di accumulazione, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ contiene un punto x_{n+1} di E diverso da x_0, quindi $x_{n+1} \in E \cap \mathcal{U}$ e $x_{n+1} \neq x_k$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n$.

Dimostrazione del Teorema 3.7 (Teorema di Bolzano-Weierstrass), pag. 78

Dobbiamo dimostrare che se $E \subset \mathbb{R}$ è un insieme limitato e infinito, allora esiste almeno un punto di accumulazione per E in $\mathbb{R}$.

La dimostrazione è costruttiva e procede nel modo seguente:

(a) si determina un punto x candidato ad essere punto di accumulazione;

(b) si prova che x soddisfa tale proprietà.

(a). Essendo per ipotesi E limitato, esistono $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tali che $a_0 < b_0$ ed $E \subseteq I_0 := [a_0, b_0]$. Dividiamo l'intervallo I_0 in due intervalli di uguale lunghezza:

$$\left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right].$$

Poiché E contiene infiniti punti e $E \subseteq I_0$, almeno uno dei due intervalli contiene infiniti punti di E; indichiamo con $I_1 = [a_1, b_1]$ tale intervallo. Si osservi che

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Suddividendo, in modo analogo, I_1 in due intervalli, si determina un intervallo

$$I_2 = [a_2, b_2]$$

che contiene infiniti punti di E e risulta

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}.$$

Così procedendo, si costruisce per ogni $n \in \mathbb{N}$ un intervallo

$$I_n = [a_n, b_n]$$

che contiene infiniti punti di E e tale che

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0,$$
$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Detti

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\},$$

tali insiemi risultano limitati in $\mathbb{R}$ (sono contenuti in I_0) e quindi, per la proprietà di completezza, esistono

$$\sup A \quad \text{e} \quad \inf B.$$

Si osservi che, per costruzione, si ha $a_k < b_m$ per ogni $k, m \in \mathbb{N}$; ciò significa che per ogni $m \in \mathbb{N}$ b_m è maggiorante di A: quindi

$$\sup A \leq b_m \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

perciò

$$\sup A \leq \inf B.$$

Inoltre si ha

$$0 \leq \inf B - \sup A \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

cosicché, data l'arbitrarietà di n,

$$\inf B - \sup A = 0,$$

ovvero

$$x := \inf B = \sup A.$$

(***b***). Dimostriamo che x è punto di accumulazione per E, cioè che

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad B_\varepsilon(x) \text{ contiene infiniti punti di } E.$$

Si noti che, per costruzione, $x \in I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per la proprietà di Archimede, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$b_{n_0} - a_{n_0} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Perciò si ha

$$I_{n_0} \subseteq B_\varepsilon(x),$$

quindi anche $B_\varepsilon(x)$ contiene infiniti punti di E.

Dimostrazione del Teorema 3.20 (aritmetica parziale di $\mathbb{R}^*$), pag. 89

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per $X = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$.

(*i*) Dimostriamo che *se* $f(x) \to +\infty$ *e* $g(x)$ *è definitivamente limitata inferiormente per* $x \to x_0$*, allora* $f(x) + g(x) \to +\infty$ *per* $x \to x_0$ (l'altro caso è analogo).

Sia $M \in \mathbb{R}$ qualunque. Per l'ipotesi su g, esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) \geq K$ definitivamente per $x \to x_0$. Per l'ipotesi su f, $f(x) > M - K$ definitivamente per $x \to x_0$. Perciò, per (3.17)-(3.19),

$$f(x) + g(x) > M - K + K = M \quad \text{definitivamente per } \; x \to x_0.$$

(*ii*) Dimostriamo che *se* $f(x) \to +\infty$ *e* $g(x) \to \ell \in (0, +\infty)$ *per* $x \to x_0$*, allora* $f(x)g(x) \to +\infty$ *per* $x \to x_0$ (i casi in cui $\ell = +\infty$ o $\ell \in [-\infty, 0)$ sono analoghi).

Sia $M \in \mathbb{R}$ qualunque. Per l'ipotesi su g e il Lemma 3.14, $g(x) > \frac{\ell}{2} > 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Per l'ipotesi su f, $f(x) > 2|M|/\ell$ definitivamente per $x \to x_0$. Perciò, per (3.17)-(3.19),

$$f(x)g(x) > \frac{2|M|}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = |M| \geq M \quad \text{definitivamente per } \; x \to x_0.$$

(*iii*) Dimostriamo che *se* $f(x) \to 0$ *e* $g(x)$ *è definitivamente limitata per* $x \to x_0$*, allora* $f(x)g(x) \to 0$ *per* $x \to x_0$.

Sia $\varepsilon > 0$ qualunque. Per l'ipotesi su g, esiste $K > 0$ tale che $|g(x)| < K$ definitivamente per $x \to x_0$. Per l'ipotesi su f, $|f(x)| < \varepsilon/K$ definitivamente per $x \to x_0$. Perciò, per (3.17)-(3.19),

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \quad \text{definitivamente per } \; x \to x_0.$$

(*iv*) Dimostriamo che *se* $f(x) \to 0^+$ *per* $x \to x_0$*, allora* $1/f(x) \to +\infty$ *per* $x \to x_0$ (il casi in cui $f \to +\infty$ è analogo).

Sia $M \in \mathbb{R}$ qualunque. Per l'ipotesi su f, $0 < f(x) < 1/|M|$ definitivamente per $x \to x_0$. Perciò

$$f(x) > |M| \geq M \quad \text{definitivamente per } \; x \to x_0.$$

4 Dimostrazioni del Capitolo 4

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 4.3 (il numero di Nepero), pag. 113 12
Dimostrazione del Teorema 4.6, pag. 115 13
Dimostrazione del Teorema 4.7, pag. 115 13
Dimostrazione del Teorema 4.9 (Criterio di Cauchy), pag. 116 13
Dimostrazione del Teorema 4.18 (Teorema del confronto asintotico), pag. 127 14
Dimostrazione del Teorema 4.28 (Teorema di Riemann), pag. 142 15
Dimostrazione del Teorema 4.30 (prodotto di Cauchy di due serie), pag. 144 16

Dimostrazione del Teorema 4.3 (il numero di Nepero), pag. 113

Dobbiamo dimostrare che la successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ per $n = 1, 2\dots$ è strettamente crescente e limitata.

Proviamo prima che $\{a_n\}$ è strettamente crescente. Per $n \geq 2$, si ha:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n}{\dfrac{n-1}{n}} = \frac{\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{n}} = \frac{\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{n}}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli (si veda la (1.37)) $(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$, quindi $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$ ovvero $\{a_n\}$ è crescente.

Per provare che $\{a_n\}$ è limitata, si consideri la successione $\{b_n\}$ definita da

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n. \tag{D4.1}$$

Per ogni $n \geq 2$ si ha:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1+\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^n} = \frac{1+\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n} = \frac{1+\dfrac{1}{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli,

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n},$$

quindi $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$, ovvero $\{b_n\}$ è decrescente. Allora, per la (D4.1), $0 < a_n < b_n < b_1 = 4$ e $\{a_n\}$ è limitata.

Dimostrazione del Teorema 4.6, pag. 115

Dobbiamo dimostrare che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$;

(ii) per ogni sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell \in \mathbb{R}^*$.

(*i*) ⇒ (*ii*). Sia $\{a_{k_n}\}$ una sottosuccessione e sia $\varepsilon > 0$; per (i), esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n > N$. Poiché $k_n \geq n$, anche $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n > N$, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$.

(*ii*) ⇒ (*i*). Basta osservare che $\{a_n\}$ è sottosuccessione di sé stessa.

Dimostrazione del Teorema 4.7, pag. 115

Data una successione limitata $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, dobbiamo dimostrare che esiste una sottosuccessione convergente.

Se uno stesso valore, a, compare infinite volte nella successione, la sottosuccessione $\{a, a, \ldots\}$ converge ad a. Quindi resta da considerare il caso in cui la successione contiene infiniti valori distinti, cioè il caso in cui l'immagine $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ della successione è un insieme infinito. Per la limitatezza della successione, A è anche un insieme limitato e quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass (Teorema 3.7), possiede almeno un punto di accumulazione $\ell \in \mathbb{R}$. Per il Lemma 3.6, ogni intorno sferico $\mathcal{U}_n := (\ell - \frac{1}{n}, \ell + \frac{1}{n})$ contiene infiniti punti di A diversi da ℓ. Quindi esiste $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 > 0$ tale che $a_{k_1} \in \mathcal{U}_1$, esiste $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$ tale che $a_{k_2} \in \mathcal{U}_2$ e così via: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n > k_{n-1}$ tale che $a_{k_n} \in \mathcal{U}_n$. La successione $\{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ che, per costruzione, converge a ℓ: infatti $a_{k_n} \in \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$ per ogni $n \geq m$, e quindi per ogni ε si ha $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$, dove n_ε è tale che $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ (per esempio $n_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$).

Dimostrazione del Teorema 4.9 (Criterio di Cauchy), pag. 116

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione. Dobbiamo dimostrare che le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\{a_n\}$ è convergente;

(ii) $\{a_n\}$ è fondamentale.

(*i*) ⇒ (*ii*). Poiché $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geq N.$$

Quindi per ogni $n, m \geq N$ si ha

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \ell) - (a_m - \ell)| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(*ii*) ⇒ (*i*). Poiché $\{a_n\}$ è fondamentale, per la (4.13) $\{a_n\}$ è limitata e quindi, per il Teorema 4.7, possiede una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ convergente a un certo valore $\ell \in \mathbb{R}$. Ciò significa che preso $\varepsilon > 0$, esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geq N_1.$$

Inoltre, poiché per ipotesi $\{a_n\}$ è fondamentale, esiste $N_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n, m \geq N_2.$$

Scegliendo $m = k_n$, si ottiene

$$|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geq N_2$$

(si noti che la condizione $m \geq N_2$ è verificata: $m = k_n \geq n \geq N_2$ poiché k_n è strettamente crescente). Quindi, per la disuguaglianza triangolare,

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\, n \geq N := \max\{N_1, N_2\}.$$

Dimostrazione del Teorema 4.18 (Teorema del confronto asintotico), pag. 127

Dobbiamo dimostrare che se $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ e $a_k = b_k(1 + o(1))$ definitivamente per $k \to +\infty$, allora le corrispondenti serie hanno lo stesso comportamento.

Segue dall'ipotesi che esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{2} b_k \leq a_k \leq 2b_k \quad \text{per ogni } k > k_0,$$

quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k \leq 2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \quad \text{per ogni } k > k_0.$$

Poiché (si veda la 4.25) le due serie hanno lo stesso comportamento delle rispettive code, segue dal criterio del confronto (Teorema 4.17) che le due serie hanno lo stesso comportamento.

Dimostrazione del Teorema 4.28 (Teorema di Riemann), pag. 142

Dobbiamo dimostrare che se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge semplicemente ma non assolutamente, allora:

(i) per ogni $s \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, di $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tale che $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = s$;

(ii) esiste un riordinamento di $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ che diverge;

(iii) esiste un riordinamento di $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ che è irregolare.

(i). Siano $\{P_k\}$ e $\{M_k\}$ le sottosuccessioni di $\{a_k\}$ che contengono, rispettivamente, *tutti* gli elementi non negativi e tutti gli elementi negativi di $\{a_k\}$, presi nell'ordine in cui appaiono: $P_k \geq 0$ e $M_k < 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Poichè $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente ma non assolutamente convergente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} M_k = -\infty. \tag{D4.2}$$

Siano infatti $s'_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ e $s''_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$; le due successioni sono monotone, quindi ammettono limite, e $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = s'_n + s''_n$. Perciò, se per assurdo una delle due è convergente, allora lo è anche l'altra; d'altra parte $\sum_{k=1}^{n} |a_k| = s'_n - s''_n$, e quindi la serie risulta assolutamente convergente, in contraddizione con l'ipotesi. Ciò prova la (D4.2).

Definiamo la successione $\{b_k\}$ per ricorrenza. L'idea è la seguente: a ciascun passo, valutiamo la somma dei n termini già selezionati, $s_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, e scegliamo come successivo, b_{n+1}, il primo non già selezionato tra quelli non negativi se $s_n < s$, il primo non già selezionato tra quelli negativi se $s_n \geq s$. Per far questo, a ciascun passo aggiorniamo due indici, $p(n)$ e $m(n)$, che segnalano il primo elemento non già selezionato delle due sottosuccessioni.

Inizializziamo il sistema ponendo

$$b_0 = 0,\ p(0) = 0,\ m(0) = 0.$$

Al primo passo, poniamo

$$\left\{\begin{array}{l} b_1 = P_{p(0)} \\ p(1) = 1 \\ m(1) = 0 \end{array}\right\} \text{se } 0 < s, \qquad \left\{\begin{array}{l} b_1 = M_{m(0)} \\ p(1) = 0 \\ m(1) = 1 \end{array}\right\} \text{se } s \leq 0.$$

Procedendo in questo modo, al passo n poniamo $s_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ e

$$\left.\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & P_{p(n)} \\ p(n+1) & = & p(n) + 1 \\ m(n+1) & = & m(n) \end{array}\right\} \qquad \text{se } s_n < s,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & M_{m(n)} \\ p(n+1) & = & p(n) \\ m(n+1) & = & m(n) + 1 \end{array}\right\} \qquad \text{se } s \leq s_{n-1}.$$

Osserviamo che
$$p(n) \to +\infty \quad \text{e} \quad m(n) \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty. \tag{D4.3}$$
Per costruzione $p(n)$ è crescente; se per assurdo $p(n)$ è limitata, allora esiste n_0 tale che $s \leq s_n = s_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} M_k$ per ogni $n > n_0$; passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene $s \leq -\infty$, che è impossibile poiché $s \in \mathbb{R}$.

Segue da (D4.3) che la successione $\{b_k\}_{k\geq 1}$ contiene tutti gli elementi di $\{P_k\}$ e di $\{M_k\}$; perciò $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ è un riordinamento di $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Resta da dimostrare che $s_n \to s$ per $n \to +\infty$. Da (D4.3) segue anche che il segno di $s_n - s$ cambia infinite volte; quindi esiste una sottosuccessione s_{j_n} tale che $s_{j_{2n}} \leq s \leq s_{j_{2n}+1}$ e $s_{j_{(2n+1)}+1} \leq s \leq s_{j_{(2n+1)}}$. Si ha
$$\begin{aligned} 0 \leq s_n - s &\leq |b_{j_{2n}+1}| && \text{per ogni } n \in [j_{2n}+1, j_{(2n+1)}] \\ 0 \leq s - s_n &\leq |b_{j_{(2n+1)}+1}| && \text{per ogni } n \in [j_{(2n+1)}+1, j_{(2n+2)}] \end{aligned}$$
Infatti, se ad esempio $n \in [j_{2n}+1, j_{(2n+1)}]$ allora per costruzione $0 \leq s_n - s \leq s_{j_{2n}+1} - s \leq s_{j_{2n}+1} - s_{j_{2n}} = b_{j_{2n}+1}$ (la seconda si verifica allo stesso modo). Poiché (per la convergenza semplice) $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$, (i) è dimostrato.
(ii). Procediamo come prima, definendo b_n invece come
$$b_{n+1} := \begin{cases} M_{m(n)+1} & \text{se } s_n = \sum_{i=0}^{n} b_i \geq n \\ P_{p(n)+1} & \text{se } s_n < n. \end{cases}$$
In questo caso si dimostra che $s_n - n$ cambia segno infinite volte, utilizzando, oltre alla (D4.2), il fatto che $P_k \to 0$ per $k \to +\infty$; ragionando come sopra, da ciò segue facilmente che $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$.

(iii). Per la (D4.2) si può costruire un riordinamento tale che le sue somme parziali s_n verificano la seguente proprietà: per ogni $N \in \mathbb{N}$ esisto $n_1, n_2 > N$ tali che $s_{n_1} \leq 0$ e $s_{n_2} \geq +1$. Tale riordinamento è chiaramente irregolare.

Dimostrazione del Teorema 4.30 (prodotto di Cauchy di due serie), pag. 144

Dobbiamo dimostrare che se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sono convergenti e una delle due è assolutamente convergente, allora la serie prodotto è convergente e
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Supponiamo per esempio che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sia assolutamente convergente; siano A_n, B_n e C_n le seguenti somme parziali:
$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right).$$

Allora risulta

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0(b_0 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_0 \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) - R_n = A_nB_n - R_n \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$R_n = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)a_n + (b_2 + \cdots + b_n)a_{n-1} + \cdots + b_na_1. \tag{D4.4}$$

Poiché $A_nB_n \to \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ per $n \to +\infty$, resta da dimostrare che

$$R_n \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty. \tag{D4.5}$$

Preso $\varepsilon > 0$, per il criterio di Cauchy esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq m > N_\varepsilon\,.$$

Si osservi che, se $n > N_\varepsilon$, nella (D4.4) soltanto i coefficienti di $a_n, a_{n-1}, \ldots, \ldots, a_{n-N_\varepsilon+1}$ contengono b_k con $k \leq N_\varepsilon$, quindi

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq |b_1 + \cdots + b_n| \cdot |a_n| + \cdots + |b_{N_\varepsilon} + \cdots + b_n| \cdot |a_{n-N_\varepsilon+1}| + \varepsilon \sum_{k=1}^{n-N_\varepsilon} |a_k| \\ &\leq M_1 \sum_{k=n-N_\varepsilon+1}^{n} |a_k| + \varepsilon M_2\,, \end{aligned}$$

dove

$$M_1 := \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \quad \text{e} \quad M_2 := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Per il criterio di Cauchy esiste $\overline{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ tale che

$$\sum_{k=n-N_\varepsilon+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \quad \forall\, n > \overline{N}_\varepsilon,$$

quindi

$$|R_n| \leq (M_1 + M_2)\varepsilon \quad \forall\, n > \overline{N}_\varepsilon$$

e la (D4.5) segue dall'arbitrarietà di ε.

5 Dimostrazioni del Capitolo 5

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 5.5 (teorema ponte), pag. 160 18

Dimostrazione del Teorema 5.5 (teorema ponte), pag. 160

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Dobbiamo dimostrare che le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$;

(ii) per ogni successione $\{a_n\} \subseteq X \setminus \{x_0\}$ tale che $a_n \to x_0$ per $n \to +\infty$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$.

Consideriamo solo il caso in cui x_0 e $\ell \in \mathbb{R}$ (gli altri sono analoghi).

$(i) \Rightarrow (ii)$. Se vale (i), preso $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{se} \quad x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - x_0| < \delta. \tag{D5.1}$$

D'altra parte, se $a_n \to x_0$, esiste per questo $\delta > 0$ un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n > N$ si ha $|a_n - x_0| < \delta$; inoltre per ipotesi $a_n \in X$ e $0 < |a_n - x_0|$ ($a_n \neq x_0$!); quindi, per la (D5.1),

$$|f(a_n) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n > N$$

e abbiamo trovato la (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Per assurdo, supponiamo che valga la (ii) ma sia falsa la (i). Allora

$$\text{non è vero che: per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che}$$
$$x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ovvero

$$\text{esiste } \varepsilon > 0 \text{ tale che non è vero che: esiste } \delta > 0 \text{ tale che}$$
$$x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ovvero

$$\text{esiste } \varepsilon > 0 \text{ tale che per ogni } \delta > 0 \text{ non è vero che:}$$
$$x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ovvero

$$\begin{array}{c} \text{esiste } \varepsilon > 0 \text{ tale che per ogni } \delta > 0 \text{ esiste } x_\delta \in X \text{ tale che} \\ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \;\text{ e }\; |f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon \end{array} \tag{D5.2}$$

(lo studente confronti la definizione di limite e la sua negazione (D5.2)!).

Visto che la (D5.2) è valida per ogni $\delta > 0$, possiamo dare a δ i valori $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ e chiamare i valori corrispondenti x_δ nella (D5.2) $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ Allora abbiamo trovato un valore $\varepsilon > 0$ e una successione $\{a_n\} \subseteq X$ tali che

$$0 < |a_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Quindi $a_n \to x_0$ per $n \to +\infty$ e $f(a_n) - \ell \not\to 0$ per $n \to +\infty$, in contraddizione con (ii).

6 Dimostrazioni del Capitolo 6

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 6.13 (continuità della funzione inversa nel caso in cui X è compatto), pag. 173 19
Dimostrazione del Teorema 6.19, pag. 177 19
Dimostrazione del Teorema 6.20, pag. 177 20

Dimostrazione del Teorema 6.13 (continuità della funzione inversa nel caso in cui X è compatto), pag. 173

Per definizione di funzione inversa, dom $f^{-1} = f(X)$. Quindi dobbiamo dimostrare che, preso un elemento $y \in f(X)$, f^{-1} è continua in y. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Ciò significa (negando la definizione di limite, lo studente verifichi) che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, y_\delta \in f(X) : 0 < |y - y_\delta| < \delta \text{ e } |f^{-1}(y_\delta) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon.$$

Scegliendo $\delta = 1/n$ ($n \geq 1$) e scrivendo y_n al posto di $y_{1/n}$, si ottiene una successione $\{y_n\} \subset f(X)$ tale che $y_n \to y$ per $n \to +\infty$ e

$$\left|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)\right| \geq \varepsilon \quad \text{per ogni } n \in N\,. \tag{D6.1}$$

Ponendo $x_n = f^{-1}(y_n) \in X$, la compatezza di X implica che $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente in X:

$$x_{k_n} \to x \in X \ \text{ per } \ n \to +\infty. \tag{D6.2}$$

Essendo f continua in $x \in X$, anche $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(x)$ per $n \to +\infty$. D'altra parte, tutta la successione $\{y_n\}$ converge a y, quindi $y = f(x)$. Ma allora $x = f^{-1}(y)$ e la (D6.1) diventa $|x_n - x| \geq \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ciò contraddice la (D6.2) e completa la dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 6.19, pag. 177

Sia $f : X \supseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua in X, e sia $A \subseteq X$ limitato. Dobbiamo dimostrare che $f|_A$ è limitata.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che f non sia limitata in A. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ tale che $|f(x_n)| > n$. La successione $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ è limitata (poiché lo è A); quindi, per il Teorema 4.7, esiste una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente a un elemento $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Poiché f è uniformemente continua, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < 1$ se $|x - y| < \delta$ (si è scelto $\varepsilon = 1$ nella (6.13)). Per il criterio di Cauchy (Teorema 4.9) applicato alla successione $\{x_{k_n}\}$ con $\varepsilon = \delta/2$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|x_{k_n} - x_{k_N}| < \delta/2$ per ogni $n \geq N$. Quindi

$$|f(x_{k_n})| \leq |f(x_{k_N})| + |f(x_{k_n}) - f(x_{k_N})| < |f(x_{k_N})| + 1 \ \text{ per ogni } n \geq N.$$

D'altra parte, per definizione di $\{x_{k_n}\}$, $|f(x_{k_n})| \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e abbiamo trovato una contraddizione.

Dimostrazione del Teorema 6.20, pag. 177

Dobbiamo dimostrare che se $f : X \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua nell'intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$, esistono $\alpha, \beta > 0$ tali che $|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta$ per ogni $x \in X$.

Per la continuità uniforme di f in X esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < 1$ se $|x - y| < \delta$ ($x, y \in X$), quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \quad \text{se} \quad |x - y| \leq \delta, \quad x, y \in X. \tag{D6.3}$$

Sia $x_0 \in X$. Dimostreremo che

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 + |x - x_0|/\delta \quad \text{per ogni} \;\; x \in X, \tag{D6.4}$$

da cui segue la tesi con $\alpha = |f(x_0)| + 1 + |x_0|/\delta$ e $\beta = 1/\delta$:

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 + |x_0|/\delta + |x|/\delta \quad \text{per ogni} \;\; x \in X.$$

Per la (D6.3) (con $y = x_0$),

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 \quad \text{se} \;\; x \in X \;\; \text{e} \;\; |x - x_0| \leq \delta.$$

In particolare $|f(x_0 \pm \delta)| \leq |f(x_0)| + 1$; quindi, sempre per la (D6.3) (con $y = x_0 \pm \delta$),

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 2 \quad \text{se} \;\; x \in X \;\; \text{e} \;\; \delta \leq |x - x_0| \leq 2\delta.$$

Ripetendo questo procedimento (o, più precisamente, ragionando per induzione), si trova che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + n + 1 \quad \text{se} \;\; x \in X \;\; \text{e} \;\; n\delta \leq |x - x_0| \leq (n + 1)\delta. \tag{D6.5}$$

La (D6.5) vale per $n \leq |x - x_0|/\delta$, quindi sostituendolo in $|f(x)| \leq |f(x_0)| + n + 1$ si ottiene la (D6.4).

7 Dimostrazioni del Capitolo 7

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 7.4 (derivabilità e retta tangente), pag. 182 21
Dimostrazione del Teorema 7.12 (“algebra delle derivate”), pag. 188 . . 21
Dimostrazione del Teorema 7.13 (regola della catena), pag. 188 22
Dimostrazione del Teorema 7.21 (monotonia e derivata), pag. 199 . . . 23
Dimostrazione del Lemma 7.27, pag. 208 23
Dimostrazione del Teorema 7.28, pag. 208 24
Dimostrazione del Teorema 7.29, pag. 208 25
Teorema 7.30, pag. 209 26
Dimostrazione del Teorema 7.36 (formula del resto di Lagrange), pag. 229 26

Dimostrazione del Teorema 7.4 (derivabilità e retta tangente), pag. 182

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dobbiamo verificare che f è derivabile in x_0 se e solo se esiste la retta tangente non verticale al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, ovvero che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

(i) esiste finito $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

(ii) esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

(*i*) ⇒ (*ii*). Si ha $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = o(1)$ per $x \to x_0$, ovvero

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = o(1) \cdot (x - x_0) \quad \text{per } \ x \to x_0$$

e (ii) segue da $o(1) \cdot (x - x_0) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$ (si vedano le proprietà algebriche degli o-piccolo a pag. 143) scegliendo $m = f'(x_0)$.

(*ii*) ⇒ (*i*). Ancora utilizzando $o(1) \cdot (x - x_0) = o(x - x_0)$, si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = o(1) \quad \text{per } \ x \to x_0,$$

per cui il limite in (i) esiste finito e $f'(x_0) = m$.

Dimostrazione del Teorema 7.12 (“algebra delle derivate”), pag. 188

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che:

(i) la funzione αf è derivabile in x_0 e $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$;

(ii) la funzione $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

(iii) la funzione fg è derivabile in x_0 e $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

(*iv*) se $g(x_0) \neq 0$, la funzione f/g è derivabile in x_0 e $(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/(g(x_0))^2$.

(i), ***(ii)***. Seguono immediatamente dalla definizione di derivata e dalle proprietà dei limiti.

(iii). Utilizziamo l'equivalenza tra la (7.6) e la (7.8): per $x \to x_0$,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \cdot (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &= f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0)\,. \end{aligned}$$

Perciò $m = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente ad fg in x_0, che sappiamo (per il Teorema 7.4) coincidere con la derivata.

(iv). Per provare la (*iv*), invece, utilizziamo direttamente la definizione (7.6) di derivata e la (*iii*) (che abbiamo appena dimostrato). Si noti innanzitutto che, se $g(x_0) \neq 0$, $g(x)$ è definitivamente non nulla per $x \to x_0$ e

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{-g(x) + g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \end{aligned}$$

Quindi applicando la (*iii*) alle funzioni derivabili f e $1/g$, la f/g è derivabile in x_0 e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Dimostrazione del Teorema 7.13 (regola della catena), pag. 188

Siano I, J intervalli, $x_0 \in I$, $g : I \to J$ derivabile in x_0 ed $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile in $g(x_0)$. Dobbiamo dimostrare che la funzione composta $f \circ g$ è derivabile in x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$; si vuole cioè dimostrare che

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0\,.$$

Per ipotesi,

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0, \tag{D7.1}$$

$$f(y) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(y - g(x_0)) + o(y - g(x_0)) \quad \text{per } y \to g(x_0). \tag{D7.2}$$

Se $g(x) \neq g(x_0)$ definitivamente per $x \to x_0$, possiamo sostituire y con $g(x)$ nella (D7.2):

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \quad \text{per } x \to x_0. \tag{D7.3}$$

Quindi, utilizzando la (D7.1), si ottiene

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

che prova l'asserto. Nel caso generale, in cui può accadere che $g(x) = g(x_0)$, utilizzando la definizione di o piccolo riscriviamo la (D7.2) come

$$f(y) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(y - g(x_0)) + (y - g(x_0))h(y), \tag{D7.4}$$

con

$$\lim_{y\to g(x_0)} h(y) = 0,$$

ed estendiamo (se necessario) h con continuità in $y = g(x_0)$ ponendo $h(g(x_0)) = 0$. In tal modo:

- l'uguaglianza (D7.4) ha senso ed è vera anche se $y = g(x_0)$; perciò si può sostituire $y = g(x)$, da cui

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))h(g(x));$$

- si può applicare il Teorema 6.4 (continuità di funzione composta); perciò $h(g(x)) \to 0$ per $x \to x_0$, ovvero $h(g(x)) = o(1)$ per $x \to x_0$, ovvero $(g(x) - g(x_0))h(g(x)) = o(g(x) - g(x_0))$ per $x \to x_0$.

Abbiamo così ritrovato la (D7.3), e a questo punto la dimostrazione si conclude come sopra.

Dimostrazione del Teorema 7.21 (monotonia e derivata), pag. 199

Non è restrittivo supporre che $f'(x) \geq 0$ (altrimenti basta scambiare f con $-f$). Dobbiamo quindi dimostrare che se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in (a, b), allora

$$\begin{array}{llll} (i) & f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in (a,b) & \Longleftrightarrow & f \text{ è crescente in } (a,b); \\ (ii) & f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (a,b) & \Longrightarrow & f \text{ è strettamente crescente in } (a,b). \end{array}$$

(*i*). Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora, per il teorema del valor medio, per ogni $a < x_1 < x_2 < b$ esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$ per ogni $x_2 > x_1$.

Se viceversa f è crescente in (a, b), allora il rapporto incrementale è non negativo:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall\, x, y \in (a, b), \quad x \neq y.$$

Perciò

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall\, x \in I.$$

(*ii*). Si procede esattamente come nella parte (i), osservando che in questo caso $f'(c) > 0$ e quindi $f(x_2) > f(x_1)$.

Dimostrazione del Lemma 7.27, pag. 208

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $P(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Dimostriamo che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

(i) f è convessa in (a, b);

(ii) $P(x_2, x_1) \leq P(x_3, x_1) \leq P(x_3, x_2)$ per ogni $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$

(nel caso di disuguaglianze strette e di stretta convessità la dimostrazione è identica). Ricordiamo la (7.34):

$$(i) \iff f(z) \le f(x) + P(y,x)(z-x) \text{ per ogni } x < z < y.$$

(i)* ⇒ *(ii). Scegliendo $x = x_1$, $z = x_2$ e $y = x_3$ si ottiene

$$f(x_2) \le f(x_1) + P(x_3,x_1)(x_2 - x_1) \tag{D7.5}$$

da cui segue immediatamente la prima disuguaglianza. Per la seconda basta osservare che la retta di equazione $y(x_2) = f(x_1) + P(x_3,x_1)(x_2 - x_1)$ coincide con quella di equazione $y(x_2) = f(x_3) + P(x_3,x_1)(x_2 - x_3)$ in quanto entrambe passano per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_3, f(x_3))$. Perciò (D7.5) è equivalente a

$$f(x_2) \le f(x_3) + P(x_3,x_1)(x_2 - x_3)$$

da cui segue immediatamente la seconda disuguaglianza.

(ii)* ⇒ *(i). È sufficiente scrivere la prima disuguaglianza con $x_1 = x$, $x_2 = z$ e $x_3 = y$:

$$P(z,x) \le P(y,x) \iff f(z) \le f(x) + P(y,x)(z-x).$$

Dimostrazione del Teorema 7.28, pag. 208

Dobbiamo dimostrare che se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è (strettamente) convessa in (a,b), allora

- (i) per ogni $x \in (a,b)$ esistono finiti $f'_+(x)$ ed $f'_-(x)$;
- (ii) $f'_+(x) \ge f'_-(x)$ per ogni $x \in (a,b)$;
- (iii) le funzioni f'_+ ed f'_- sono (strettamente) crescenti in (a,b);
- (iv) f è continua in (a,b).

(i). Sia h_0 tale che $x + h_0 < b$; dal Lemma 7.27 segue che il rapporto incrementale $P(x+h,x)$ è crescente rispetto ad h; inoltre è limitato dal basso, poiché fissato un qualunque $y \in (a,x)$ si ha

$$P(x+h,x) \ge P(x+h,y) \ge P(x,y) \quad \text{per ogni } h \in (0,h_0).$$

Perciò il limite $h \to 0^+$ esiste ed è finito, ovvero esiste finita f'_+. Per f'_- si procede allo stesso modo.

(ii). Per il Lemma 7.27, per ogni $h > 0$ (tale che $a < x - h < x + h < b$) si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} &= \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = P(x,x-h)\\ &\le P(x+h,x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h},\end{aligned}$$

quindi la (ii) segue passando al limite $h \to 0^+$.

(iii). Sia $x < y$. Utilizzando il Lemma 7.27 si ottiene

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \frac{f(y+h)-f(x)}{y+h-x} \le \frac{f(y+h)-f(y)}{h}.$$

Passando al limite $h \to 0^+$ si ottiene la monotonia di f'_+; quella di f'_- si prova allo stesso modo. Se inoltre f è strettamente convessa, allora osserviamo che per $x < z < y$ e h sufficientemente piccolo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(y)-f(z)}{y-z} < \frac{f(y+h)-f(y)}{h}.$$

Passando al limite $h \to 0^+$ si ottiene

$$f'_+(x) \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \le f'_+(y)$$

che prova la stretta monotonia di f'_+. Quella di f'_- si dimostra allo stesso modo.

(iv). Segue da (i) che f è continua da destra e da sinistra per ogni $x \in (a,b)$, quindi è continua in (a,b).

Dimostrazione del Teorema 7.29, pag. 208

Sia f derivabile in (a,b). Dobbiamo dimostrare che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

(a) f è (strettamente) convessa in (a,b);

(b) f' è (strettamente) crescente in (a,b);

(c) $f(x) \overset{(>)}{\ge} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in (a,b)$, $x \neq x_0$.

(*a*) ⇒ (*b*). Poiché f è derivabile, $f' = f'_+ = f'_-$ in (a,b); quindi (b) segue immediatamente dal Teorema 7.28 (iii).

(*b*) ⇒ (*c*). Poiché f è derivabile in (a,b), si può applicare il teorema di Lagrange (Teorema 7.18) nell'intervallo di estremi x_0 e x. Se per esempio $x_0 < x$, allora esiste $c \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

e (c) segue dal fatto che $f'(c) \overset{(>)}{\ge} f'(x_0)$. Se viceversa $x < x_0$ allora esiste $c \in (x, x_0)$ tale che

$$f(x_0) = f(x) + f'(c)(x_0 - x)$$

e la tesi segue dal fatto che $f'(x_0) \overset{(>)}{\ge} f'(c)$.

(*c*) ⇒ (*a*). Siano $x \neq x_0$. Applicando due volte la disuguaglianza in (c), per ogni $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ si ottiene

$$\begin{aligned} f(x_1) &\overset{(>)}{\ge} f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \\ f(x_2) &\overset{(>)}{\ge} f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima per $(x_2 - x_0)$, la seconda per $(x_0 - x_1)$ e sommando, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x_0)(x_2 - x_1) &\overset{(<)}{\le} f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_2)(x_0 - x_1) \\ &= f(x_1)(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x_0 - x_1) \end{aligned}$$

che, dividendo per $x_2 - x_1$ e ponendo $x_0 = x$, coincide con la (7.34) e prova la (stretta) convessità di f.

Teorema 7.30, pag. 209

Sia f due volte derivabile in (a, b); dobbiamo dimostrare che

(i) f è convessa in (a, b) se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;

(ii) se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente convessa in (a, b).

(*i*). Per il Teorema 7.29, f è convessa in (a, b) se e solo se f' è crescente in (a, b); per il Teorema 7.21 (applicato ad f') ciò accade se e solo se $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x) = f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

(ii). se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora (per il Teorema 7.21 applicato ad f') f' è strettamente crescente in (a, b); per il Teorema 7.29 ciò accade se e solo se f è strettamente convessa.

Dimostrazione del Teorema 7.36 (formula del resto di Lagrange), pag. 229

Sia $f \in C^n([a, b])$ derivabile $n + 1$ volte in $[a, b] \setminus \{x_0\}$ e sia $x \in (x_0, b]$ (il caso $x \in [a, x_0)$ si tratta in modo analogo). Dobbiamo dimostrare che esiste $y \in (x_0, x)$ tale che, posto

$$u(x) := f(x) - T_n(x),$$

si ha

$$u(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Segue dal Teorema 7.34 (e dal fatto che $T_n^{(n+1)}(x)$ è identicamente nulla) che

$$u(x_0) = u'(x_0) = \cdots = u^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x). \tag{D7.6}$$

Posto

$$v(x) := (x - x_0)^{n+1}$$

vale

$$v(x_0) = v'(x_0) = \cdots = v^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad v^{(n+1)}(x) = (n+1)!\,. \tag{D7.7}$$

Per il teorema di Cauchy (Teorema 7.20), applicato alle funzioni u e v, esiste $y_1 \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u(x) - u(x_0)}{v(x) - v(x_0)} = \frac{u'(y_1)}{v'(y_1)}.$$

Applicando una seconda volta il teorema di Cauchy, stavolta alle funzioni u' e v', otteniamo che esiste $y_2 \in (x_0, y_1)$ tale che

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u'(y_1)}{v'(y_1)} = \frac{u'(y_1) - u'(x_0)}{v'(y_1) - v'(x_0)} = \frac{u''(y_2)}{v''(y_2)}.$$

Per la (D7.6) e (D7.7), si può ripetere questo procedimento $(n + 1)$ volte, perciò esistono

$$x_0 < y_{n+1} < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_2 < y_1 < x$$

tali che

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u^{(k)}(y_k)}{v^{(k)}(y_k)} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

In particolare, posto $y = y_{n+1}$, si trova

$$\frac{u(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{u^{(n+1)}(y)}{v^{(n+1)}(y)} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}$$

che conclude la dimostrazione.

8 Dimostrazioni del Capitolo 8

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Lemma 8.3 (confronto tra somme superiori e inferiori), pag. 235 . . . 28
Dimostrazione del Teorema 8.5 (criterio di integrabilità), pag. 238 . . . 29
Dimostrazione del Teorema 8.8 (integrabilità di funzioni continue a tratti), pag. 239 . . . 30
Dimostrazione del Teorema 8.9 (proprietà elementari dell'integrale), pag. 239 . . . 30
Dimostrazione del Teorema 8.19 (criterio del confronto per integrali impropri), pag. 271 . . . 33
Dimostrazione del Corollario 8.20 (criterio del confronto asintotico per integrali impropri), pag. 272 . . . 34

Dimostrazione del Lemma 8.3 (confronto tra somme superiori e inferiori), pag. 235

Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ due suddivisioni di $[a,b]$. Dobbiamo dimostrare che:

(i) Se $\mathcal{D}_1$ è più fine di $\mathcal{D}_2$, allora

$$s(\mathcal{D}_2, f) \leq s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f);$$

(ii) $s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f)$ (per ogni coppia di suddivisioni).

(*i*). Svolgiamo la dimostrazione nel caso in cui $\mathcal{D}_1$ possiede un solo punto in più rispetto a $\mathcal{D}_2$ (ripetendo il ragionamento aggiungendo un punto per volta si perviene al risultato generale in un numero finito di passi). Sia dunque $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 \cup \{z\}$, con $z \in (a,b) \setminus \mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_2 = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Quindi esiste $k \in \{1, \cdots, n\}$ tale che $z \in (x_{k-1}, x_k)$ e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} s(\mathcal{D}_2, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - z + z - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

dove

$$m_k = \inf_{(x_{k-1},x_k)} f \leq \inf_{(x_{k-1},z)} f := m_{k_1} \quad \text{e} \quad m_k \leq \inf_{(z,x_k)} f := m_{k_2}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} s(\mathcal{D}_2, f) \leq & \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_{k_1}(z - x_{k-1}) + m_{k_2}(x_k - z) \\ & + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s(\mathcal{D}_1, f). \end{aligned}$$

Analogamente, essendo

$$M_k = \sup_{(x_{k-1},x_k)} f \geq \sup_{(x_{k-1},z)} f := M_{k_1} \quad \text{e} \quad M_k \geq \sup_{(z,x_k)} f := M_{k_2},$$

si ha

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_2, f) &= \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_k(x_k - z + z - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_{k_1}(z - x_{k-1}) + M_{k_2}(x_k - z) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= S(\mathcal{D}_1, f) \end{aligned}$$

In conclusione, ricordando la (8.4), risulta

$$s(\mathcal{D}_2, f) \leq s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f).$$

(*ii*). Se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono due arbitrarie suddivisioni di $[a, b]$. Se $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, posto $\mathcal{D}_3 := \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ è più fine di $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$; quindi, per la parte (*i*) di questo lemma, risulta

$$s(\mathcal{D}_1, f) \leq s(\mathcal{D}_3, f) \leq S(\mathcal{D}_3, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f).$$

Dimostrazione del Teorema 8.5 (criterio di integrabilità), pag. 238

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Dobbiamo dimostrare che

$$f \in \mathcal{R}(a, b) \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \text{ suddivisione } \mathcal{D}_\varepsilon \text{ di } [a, b] : S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

(⇒). Per definizione, se $f \in \mathcal{R}(a, b)$ allora

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \mathcal{I} = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f), \quad \mathcal{I} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore, preso $\varepsilon > 0$ esistono $\mathcal{D}'_\varepsilon$ e $\mathcal{D}''_\varepsilon$, suddivisioni di $[a, b]$, tali che

$$s(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) > \mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(\mathcal{D}''_\varepsilon, f) < \mathcal{I} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{D8.1}$$

Posto $\mathcal{D}_\varepsilon := \mathcal{D}'_\varepsilon \cup \mathcal{D}''_\varepsilon$, dal Lemma 8.3 (*i*) e dalla (D8.1) segue che

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) \leq S(\mathcal{D}''_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) < \mathcal{I} + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

(⇐). Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$0 \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) - \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon\,;$$

per l'arbitrarietà di ε si ottiene

$$\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f),$$

ovvero $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Dimostrazione del Teorema 8.8 (integrabilità di funzioni continue a tratti), pag. 239

Dobbiamo dimostrare che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità, allora $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Sia $\mathcal{D}$ la suddivisione di $[a,b]$ che contiene tutti i punti di discontinuità e gli estremi dell'intervallo: $\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b\}$, dove per ogni $i = 0, 1, \ldots, N$ x_i è un punto di discontinuità di f oppure un estremo. Sia inoltre $M = \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$. Preso $\varepsilon > 0$, costruiamo un raffinamento $\mathcal{D}_*$ di $\mathcal{D}$ definendo:

$$y_i = x_{i-1} + \varepsilon \quad \text{e} \quad z_i = x_i - \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Per ε sufficientemente piccolo si ha

$$a = x_0 < y_1 < z_1 < x_1 < y_2 < z_2 < \cdots < y_N < z_N < x_N = b.$$

Poiché $f \in C([y_i, z_i])$ per ogni $i = 1, \ldots, N$, per il Teorema 8.6 e il Teorema 8.5 esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon^{(i)}$ di $[y_i, z_i]$ tale che

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon^{(i)}, f|_{[y_i,z_i]}) - s(\mathcal{D}_\varepsilon^{(i)}, f|_{[y_i,z_i]}) < \varepsilon.$$

Consideriamo allora la seguente suddivisione di $[a,b]$: $\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_* \cup \mathcal{D}_\varepsilon^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{D}_\varepsilon^{(N)}$. Si ha

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) &= \sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{[x_{i-1},y_i]} f - \inf_{[x_{i-1},y_i]} f \right)(y_i - x_{i-1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{[z_i,x_i]} f - \inf_{[z_i,x_i]} f \right)(x_i - z_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \Big(S(\mathcal{D}_\varepsilon^{(i)}, f|_{[y_i,z_i]}) - s(\mathcal{D}_\varepsilon^{(i)}, f|_{[y_i,z_i]}) \Big) \\
&\le 2N\varepsilon \left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \right) + N\varepsilon = N(2M+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

e (poiché N ed M sono costanti fissate) la tesi segue dal Teorema 8.5.

Dimostrazione del Teorema 8.9 (proprietà elementari dell'integrale), pag. 239

Siano $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che:

(*i*) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(a,b)$ e $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

(*ii*) se $f \le g$ in $[a,b]$, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

(*iii*) se $c \in (a,b)$, risulta $f \in \mathcal{R}(a,c)$, $f \in \mathcal{R}(c,b)$ e

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,; \tag{8.8}$$

viceversa, se $f \in \mathcal{R}(a,c)$ e $f \in \mathcal{R}(c,b)$ si ha $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e vale la (8.8);

(*iv*) $f_+, f_-, |f| \in \mathcal{R}(a,b)$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{8.9}$$

(*i*). Segue immediatamente dal Teorema 8.5 e dalle seguenti proprietà generali dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore: dato un qualsiasi sottoinsieme X del dominio di f e g, risulta

$$\sup_X(f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g, \quad \inf_X(f+g) \geq \inf_X f + \inf_X g,$$

$$\sup_X(\alpha f) = \begin{cases} \alpha \sup_X f & \text{se } \alpha \geq 0 \\ \alpha \inf_X f & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\inf_X(\alpha f) = \begin{cases} \alpha \inf_X f & \text{se } \alpha \geq 0 \\ \alpha \sup_X f & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Proviamo per esempio che se $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$, allora

$$f - g \in \mathcal{R}(a,b) \quad \text{e} \quad \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{D8.2}$$

lasciando per esercizio i dettagli del caso generale.

Per il Teorema 8.5, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni $\mathcal{D}'_\varepsilon, \mathcal{D}''_\varepsilon$ di $[a,b]$ tali che

$$S(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) < \varepsilon \quad \text{e} \quad S(\mathcal{D}''_\varepsilon, g) - s(\mathcal{D}''_\varepsilon, g) < \varepsilon.$$

Per il Lemma 8.3, posto $\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}'_\varepsilon \cup \mathcal{D}''_\varepsilon = \{x_i\}_{i=0}^n$, si ha

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon \quad \text{e} \quad S(\mathcal{D}_\varepsilon, g) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, g) < \varepsilon.$$

Si ha

$$\begin{aligned} s(\mathcal{D}_\varepsilon, f-g) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]}(f-g) \\ &\geq \sum_{k=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \inf_{[x_{i-1},x_i]}(-g)\right) = \sum_{k=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f - \sup_{[x_{i-1},x_i]} g\right) \\ &= s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - S(\mathcal{D}_\varepsilon, g) \end{aligned}$$

e analogamente

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f-g) \leq S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, g).$$

Perciò

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f-g) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f-g) \leq S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, g) - (s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - S(\mathcal{D}_\varepsilon, g)) < 2\varepsilon,$$

quindi $f - g$ è integrabile in $[a,b]$. Inoltre

$$\begin{aligned} &\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \; S(\mathcal{D}_\varepsilon, f-g) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) + S(\mathcal{D}_\varepsilon, g) \\ &< \; S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, g) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) + S(\mathcal{D}_\varepsilon, g) \\ &< \; 2\varepsilon \end{aligned}$$

e analogamente

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > -2\varepsilon.$$

Quindi (D8.2) segue dall'arbitrarietà di ε.

(ii). Grazie a (i), è sufficiente provare che

$$h(x) := g(x) - f(x) \geq 0 \;\text{ in }\; [a,b] \;\Rightarrow\; \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Poiché $h(x)$ è non negativa $\inf_{[a,b]} h \geq 0$; perciò la tesi segue immediatamente dalla (8.4):

$$0 \leq (b-a)\inf_{[a,b]} h \leq \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii). Proviamo solo la prima parte e lasciamo per esercizio la seconda (l'argomento è del tutto analogo). Poiché f è integrabile in $[a,b]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ tale che

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon. \tag{D8.3}$$

Per il Lemma 8.3, la (D8.3) continua a valere se al posto della suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ se ne considera una più fine; quindi non è restrittivo supporre che $c \in \mathcal{D}_\varepsilon$. Dette $\mathcal{D}'_\varepsilon = \mathcal{D}_\varepsilon \cap [a,c]$ e $\mathcal{D}''_\varepsilon = \mathcal{D}_\varepsilon \cap [c,b]$ si ottiene

$$S(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) + S(\mathcal{D}''_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}''_\varepsilon, f) = S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

In particolare si ha

$$S(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) < \varepsilon \quad \text{e} \quad S(\mathcal{D}''_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}''_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Per il Teorema 8.5, ciò implica che $f \in \mathcal{R}(a,c)$ e $f \in \mathcal{R}(c,b)$. Inoltre

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x &\leq S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}''_\varepsilon, f)\\ &= S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x &\geq s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - S(\mathcal{D}'_\varepsilon, f) - S(\mathcal{D}''_\varepsilon, f)\\ &= s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) > -\varepsilon\end{aligned}.$$

Per l'arbitrarietà di ε, la (8.8) segue immediatamente da queste due disuguaglianze.

(iv). Proviamo che f_+ è integrabile. Si osservi che dato un qualsiasi sottoinsieme X del dominio di f si ha

$$\sup_X f_+ - \inf_X f_+ \leq \sup_X f - \inf_X f.$$

Infatti, se $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in X$ allora $f_+ \equiv 0$ e la disuguaglianza è ovvia. Altrimenti $\sup_X f_+ = \sup_X f$ e, poiché $f \leq f_+$, $\inf_X f \leq \inf_X f_+$. Perciò, preso $\varepsilon > 0$ e una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ di $[a,b]$ tale che $S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$, si ottiene

$$\begin{aligned}S(\mathcal{D}_\varepsilon, f_+) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f_+) &= \sum_{i=1}^n (\sup_X f_+ - \inf_X f_+)(x_i - x_{i-1})\\ &\leq \sum_{i=1}^n (\sup_X f - \inf_X f)(x_i - x_{i-1}) = S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon,\end{aligned}$$

ovvero f_+ è integrabile.

L'integrabilità di f_- segue da quanto appena dimostrato poiché $f_- = (-f)_+$ e $-f$ è integrabile per la parte (i). L'integrabilità di $|f|$ segue dalla parte (i) ricordando che $|f| = f_+ + f_-$. Infine, poiché $f = f_+ - f_-$, applicando la disuguaglianza triangolare risulta

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{(i)}{=} \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

cioè la (8.9).

Dimostrazione del Teorema 8.19 (criterio del confronto per integrali impropri), pag. 271

Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, tali che $f, g \in \mathcal{R}(a, \omega)$ per ogni $\omega \in (a, b)$. Supponiamo che esista $x_0 \in [a, b)$ tale che $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [x_0, b)$. Dobbiamo dimostrare che:

(i) se g è integrabile in senso improprio in (a, b) allora anche f lo è;

(ii) se f non è integrabile in senso improprio in (a, b) allora neppure g lo è.

Poiché (i) e (ii) sono equivalenti, è sufficiente provare la (i). Quindi sappiamo che esiste finito $\lim_{\omega\to b^-} \int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ e dobbiamo dimostrare che esiste finito $\lim_{\omega\to b^-} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$. Per le proprietà degli integrali,

$$\int_{x_0}^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to b^-} \int_{x_0}^\omega g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to b^-} \int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} g(x)\,\mathrm{d}x < \infty \qquad \text{(D8.4)}$$

e

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^\omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Quindi basta dimostrare che esiste finito

$$\lim_{\omega\to b^-} \int_{x_0}^\omega f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(D8.5)}$$

Poiché f è non negativa per $x \ge x_0$, la funzione integrale

$$F_{x_0}(\omega) = \int_{x_0}^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

è crescente in ω, per cui il limite nella (D8.5) esiste. D'altra parte, per ogni $\omega \ge x_0$ risulta

$$F_{x_0}(\omega) = \int_{x_0}^\omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{x_0}^\omega g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{x_0}^b g(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{(D8.4)}}{<} +\infty,$$

perciò il limite è finito e la tesi è dimostrata.

Dimostrazione del Corollario 8.20 (criterio del confronto asintotico per integrali impropri), pag. 272

Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, tali che f, $g \in \mathcal{R}(a, \omega)$ per ogni $\omega \in [a, b)$. Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano definitivamente positive per $x \to b^-$ e che $f(x) = g(x)(1 + o(1))$ per $x \to b^-$. Dobbiamo dimostrare che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ è convergente (divergente)} \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ è convergente (divergente)}\,.$$

Dalle ipotesi segue che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$0 < \frac{1}{2} f(x) \le g(x) \le 2f(x) \quad \text{per } x_0 \le x < b.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 8.19, è sufficiente dimostrare che

$$\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ è convergente (divergente)} \Leftrightarrow \int_{x_0}^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ è convergente (divergente)}\,.$$

Poiché $f/2$ e $2f$ sono integrabili in senso improprio in $[x_0, b)$ se e solo se lo è f, la tesi segue dal criterio del confronto (Teorema 8.19).

9 Dimostrazioni del Capitolo 9

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 9.1 (criterio integrale per serie a termini positivi), pag. 279 . . . 35
Dimostrazione del Teorema 9.8 (continuità della somma di una serie di potenze), pag. 287 . . . 36
Dimostrazione del Teorema 9.9 (integrazione termine a termine di serie di potenze), pag. 287 . . . 37
Dimostrazione del Teorema 9.10 (derivazione termine a termine di serie di potenze), pag. 288 . . . 38

Dimostrazione del Teorema 9.1 (criterio integrale per serie a termini positivi), pag. 279

Siano $k_0 \in \mathbb{Z}$ e $f : [k_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che $f \geq 0$ ed f è decrescente in $[k_0, +\infty)$. Dobbiamo dimostrare che allora

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \text{ è convergente (divergente)} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ è convergente (divergente)}$$

e che nel caso di convergenza si ha

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) - \sum_{k=k_0}^{n} f(k) \leq a_{n+1} + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, n \geq k_0 \,.$$

A meno di una traslazione, è sufficiente considerare solo il caso $k_0 = 0$. Poniamo $a_k = f(k)$ e definiamo le funzioni $\overline{f}(x)$ e $\underline{f}(x)$ come nella (9.1):

$$\begin{cases} \overline{f}(x) = a_k & \text{se } k \leq x < k+1 \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}) \\ \underline{f}(x) = a_{k+1} & \text{se } k \leq x < k+1 \quad (\forall\, k \in \mathbb{N})\,. \end{cases}$$

Per la monotonia di f risulta

$$0 \leq \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) \quad \text{per ogni } \ x \geq 0$$

e

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{n+1} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = a_0 + \int_0^{n} \underline{f}(x)\,\mathrm{d}x \tag{D9.1}$$

(si veda la Figura 9.2). Segue dal teorema del confronto per gli integrali impropri che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ è convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \underline{f}(x)\,\mathrm{d}x \text{ è convergente,}$$

quindi, per la (D9.1), la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.

D'altra parte, sempre per il teorema del confronto per gli integrali impropri, risulta

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty \;\Rightarrow\; \int_0^{+\infty} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$$

e in tal caso segue dalla (D9.1) che $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

Infine, si noti che

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) - \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k),$$

perciò, sostituendo l'intervallo $[n+1, +\infty)$ a $[0, +\infty)$ nella (D9.1),

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = \int_{n+1}^{+\infty} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = a_{n+1} + \int_{n+1}^{+\infty} \underline{f}(x)\,\mathrm{d}x \leq a_{n+1} + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione del Teorema 9.8 (continuità della somma di una serie di potenze), pag. 287

Sia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$. Dobbiamo dimostrare che la sua somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{se } |x| < r$$

è continua nell'intervallo $(-r, r)$.

Siano $x_0 \in (-r, r)$ ed $r_0 \in (|x_0|, r)$. Per il Teorema 9.6 la serie di potenze è assolutamente convergente nel punto r_0; perciò esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r_0^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

e quindi anche

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{se} \quad |x| \leq r_0.$$

Perciò

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{N} a_n (x^n - x_0^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_0^n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=0}^{N} a_n (x^n - x_0^n) \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x_0|^n \\
&< \left| \sum_{n=0}^{N} a_n (x^n - x_0^n) \right| + \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{se } |x| \leq r_0. \qquad \text{(D9.2)}
\end{aligned}$$

Ora, la funzione $x \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n(x^n - x_0^n)$ è continua in x_0 (è un polinomio di grado al più N); quindi esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n(x^n - x_0^n)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{se } |x - x_0| < \delta_1. \tag{D9.3}$$

Scegliendo $\delta = \min\{\delta_1, r_0 - |x|\}$, segue dalla (D9.2) e dalla (D9.3) che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{se } |x - x_0| < \delta.$$

Abbiamo così provato la continuità di f in x_0, che per l'arbitrarietà di $x_0 \in (-r, r)$ conclude la dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 9.9 (integrazione termine a termine di serie di potenze), pag. 287

Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dobbiamo dimostrare che f è integrabile in $(-r, r)$ e che

$$\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{per ogni } x \in (-r, r)\ .$$

L'integrabilità di f segue immediatamente dal Teorema 8.6, poiché per il Teorema 9.8 f è continua. Sia $x_0 \in (-r, r)$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n |x_0|^n < \varepsilon \quad \forall\, N \ge N_\varepsilon,\ \forall\, x \in [-|x_0|, |x_0|]. \tag{D9.4}$$

Quindi

$$\left|\int_0^{x_0} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x\right| \le \varepsilon |x_0| \quad \forall\, N > N_\varepsilon.$$

D'altra parte

$$\int_0^{x_0} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}.$$

Perciò

$$\left|\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}\right| = \left|\int_0^{x_0} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x\right| < \varepsilon |x_0|$$

per ogni $N > N_\varepsilon$. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}$ è convergente e la sua somma è $\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$. Per l'arbitrarietà di $x_0 \in (-r, r)$ il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema 9.10 (derivazione termine a termine di serie di potenze), pag. 288

Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dobbiamo dimostrare che f è derivabile in $(-r, r)$ e che

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{per ogni} \quad x \in (-r, r).$$

Proviamo anzitutto che il raggio di convergenza r_1 della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ coincide con r.

Se $r_1 > 0$ ed $|x| < r_1$, allora per definizione di raggio di convergenza $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x|^{n-1}$ converge. Poiché $|a_n x^n| \le n|a_n||x|^n$ $\forall n \ge 1$, segue dal criterio del confronto che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$ è convergente e quindi $r_1 \le r$. Se $r_1 = 0$, allora $r_1 \le r$ banalmente.

Per provare la disuguaglianza opposta, $r_1 \ge r$, sia x tale che $0 < |x| < r$. Scelto $\varepsilon > 0$ tale che $0 < (1 + \varepsilon)|x| < r$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(1 + \varepsilon)^n |x|^n$ risulta convergente. Ricordando che $n/(1 + \varepsilon)^n \to 0$ per $n \to +\infty$, esiste N tale che $|n a_n x^n| \le |a_n|(1 + \varepsilon)^n |x|^n$ per ogni $n > N$. Dal teorema del confronto segue quindi la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| \cdot |x|^n$.

Poiché $r_1 = r > 0$, per $x \in (-r, r)$ è ben definita la funzione somma $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Per il Teorema 9.9

$$\int_0^x g(s)\, \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + a_0 - a_0 = f(x) - f(0).$$

Quindi

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(s)\, \mathrm{d}s, \quad |x| < r,$$

ovvero f è derivabile in $(-r, r)$, e dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che

$$f'(x) = g(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (-r, r).$$

10 Dimostrazioni del Capitolo 10

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 10.3 (Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$), pag. 307 39
Dimostrazione del Teorema 10.4 (caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$, pag. 309 39

Dimostrazione del Teorema 10.3 (Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$), pag. 307

Dobbiamo dimostrare se $E \subset \mathbb{R}^n$ è limitato e infinito, allora esiste un punto di accumulazione di E in $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo il caso $n = 2$: la dimostrazione per $n > 2$ è analoga[1]. Procediamo in modo analogo al caso $n = 1$ (si veda la dimostrazione del Teorema 3.7). Poiché E è limitato, è contenuto in un rettangolo: $E \subseteq R_0 := [a_0, b_0] \times [c_0, d_0]$. Dividiamo R_0 in 4 rettangoli:

$$\begin{aligned}
&[a_0, (a_0 + b_0)/2] \times [c_0, (c_0 + d_0)/2], \quad [(a_0 + b_0)/2, b_0] \times [c_0, (c_0 + d_0)/2],\\
&[a_0, (a_0 + b_0)/2] \times [(c_0 + d_0)/2, d_0], \quad [(a_0 + b_0)/2, b_0] \times [(c_0 + d_0)/2, d_0].
\end{aligned}$$

Almeno uno di questi, che indichiamo con $R_1 := [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, contiene un numero infinito di punti di E. Ripetendo la procedura, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ottiene un rettangolo $R_k := [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ tale che:

(i) R_k contiene un numero infinito di punti di E;

(ii) $b_k - a_k = 2^{-k}(b_0 - a_0)$ e $d_k - c_k = 2^{-k}(d_0 - c_0)$;

(iii) $a_0 \le a_{k-1} \le a_k < b_k \le b_{k-1} \le b_0$;

(iv) $c_0 \le c_{k-1} \le c_k < d_k \le d_{k-1} \le d_0$.

Per (iii), le successioni $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sono limitate e monotone, quindi convergono; per (ii), il limite $x_0 \in \mathbb{R}$ è lo stesso. Analogamente, le successioni $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergono ad $y_0 \in \mathbb{R}$.

Per dimostrare che (x_0, y_0) è un punto di accumulazione per E basta osservare che, per costruzione di (x_0, y_0), per ogni $\varepsilon > 0$ i rettangoli R_k sono contenuti in $B_\varepsilon(x_0, y_0)$ per ogni k sufficientemente grande; quindi $B_\varepsilon(x_0, y_0)$ contiene infiniti punti di E.

Dimostrazione del Teorema 10.4 (caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$, pag. 309

Dobbiamo dimostrare che se $E \subseteq \mathbb{R}^n$, le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

[1]Per esempio, se $n = 3$, $E \subseteq R_0 := [a_0, b_0] \times [c_0, d_0] \times [e_0, f_0]$; si divide R_0 in 9 rettangoli di cui almeno uno contiene infiniti punti di E, si itera il procedimento, si individua il candidato (x_0, y_0, z_0) e si verifica che è un punto di accumulazione.

(i) E è chiuso;

(ii) $\partial E \subseteq E$;

(iii) E contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

(*i*) ⇒ (*ii*). Dimostriamo, equivalentemente, che se $x \notin E$ allora $x \notin \partial E$. Poiché per ipotesi E è chiuso, $\complement E$ è aperto e $x \in \complement E$; perciò x è un punto interno a $\complement E$, ovvero esterno ad E; quindi $x \notin \partial E$.

(*ii*) ⇒ (*iii*). Dobbiamo dimostrare che se x è punto di accumulazione per E allora $x \in E$. Se per assurdo $x \notin E$, allora x è esterno ad E oppure $x \in \partial E$. Poiché x è di accumulazione per E, non può essere esterno; quindi $x \in \partial E$. Ma per ipotesi $\partial E \subseteq E$ e abbiamo ottenuto una contraddizione.

(*iii*) ⇒ (*i*). Dimostriamo equivalentemente che $\complement E$ è aperto ($\complement E$ aperto $\Leftrightarrow$ E chiuso). Se $x \in \complement E$, allora per ipotesi x non è punto di accumulazione per E e quindi x è esterno ad E, ovvero x è interno a $\complement E$. Quindi $\complement E$ è aperto.

11 Dimostrazioni del Capitolo 11

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 11.5 (Teorema del differenziale totale), pag. 337 41
Dimostrazione del Teorema 11.9 (passaggio al limite sotto integrale), pag. 339 42
Dimostrazione del Teorema 11.10 (derivazione sotto integrale), pag. 340 42
Dimostrazione del Teorema 11.11 (Teorema di Schwarz), pag. 342 . . . 42
Dimostrazione del Teorema 11.14 (polinomio di Taylor di ordine *m*), pag. 345 44
Dimostrazione del Teorema 11.17, pag. 347 45
Dimostrazione del Teorema 11.18, pag. 347 48
Dimostrazione del Teorema 11.19, pag. 347 48
Dimostrazione del Teorema 11.25 (convessità e natura dei punti critici), pag. 351 49
Teorema 11.29 (regola della catena generale), pag. 356 50

Dimostrazione del Teorema 11.5 (Teorema del differenziale totale), pag. 337

Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ un intorno di $\mathbf{x}$ ed $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che se f è derivabile in $\mathcal{U}$ con derivate parziali continue in $\mathbf{x}$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}$.

Consideriamo il caso $n = 2$ (la dimostrazione è analoga se $n > 2$). Poiché f è derivabile in $\mathbf{x} = (x, y)$, per la (11.16) f è differenziabile in $\mathbf{x}$ se

$$Q(h,k) \to 0 \quad \text{per } (h,k) \to \mathbf{0}$$

dove

$$Q(h,k) := \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Per il Teorema del valor medio applicato alle funzioni $h \mapsto f(x+h, y+k)$ e $k \mapsto f(x, y+k)$, per ogni (h,k) esistono $\xi \in (0,1)$ ed $\eta \in (0,1)$ tali che

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x,y) &= f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x,y) \\ &= f_x(x+\xi h, y+k)h + f_y(x, y+\eta k)k. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} Q(h,k) = {} & (f_x(x+\xi h, y+k) - f_x(x,y))\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ & + (f_y(x, y+\eta k)k - f_y(x,y))\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza triangolare

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1 \quad \text{e} \quad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1.$$

Quindi, per la continuità di f_x e f_y in (x,y), $Q(h,k) \to 0$ per $(h,k) \to \mathbf{0}$.

Dimostrazione del Teorema 11.9 (passaggio al limite sotto integrale), pag. 339

Data $f \in C([a,b] \times [c,d])$, dobbiamo dimostrare che la funzione

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y \in [c,d],$$

è continua in $[c,d]$.

Poiché f è continua su un insieme chiuso e limitato, per il teorema di Heine-Cantor (Teorema 10.13) f è uniformemente continua: dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$ se $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 < \delta^2$. Allora, se $y_0 \in [c,d]$ e $|y - y_0| < \delta$, risulta

$$\begin{aligned} |g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

che prova la continuità di g in y_0. Poichè $y_0 \in [c,d]$ è arbitrario, il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema 11.10 (derivazione sotto integrale), pag. 340

Data $f \in C([a,b] \times [c,d])$ tale che $f_y \in C([a,b] \times [c,d])$, dobbiamo dimostrare che la funzione

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y \in [c,d],$$

è derivabile in $[c,d]$ e $g'(y) = \displaystyle\int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Sia $y_0 \in [c,d]$ e sia $h : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} & \text{se } \ y \neq y_0 \\ f_y(x,y_0) & \text{se } \ y = y_0. \end{cases}$$

La funzione h è continua per $y \neq y_0$ (poiché f è continua) e per $y = y_0$ (poiché f_y è continua). Quindi h è continua in $[a,b] \times [c,d]$ e le si può applicare il Teorema 11.9 (passaggio al limite sotto integrale). Si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \to y_0} \int_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\,\mathrm{d}x = \lim_{y \to y_0} \int_a^b h(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \lim_{y \to y_0} h(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema 11.11 (Teorema di Schwarz), pag. 342

Svolgiamo la dimostrazione nel caso in cui $n = 2$ (il caso generale è analogo). Dobbiamo quindi dimostrare che se $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}^2$ aperto, è due volte differenziabile in $\mathbf{x} = (x,y) \in X$, allora $f_{xy}(\mathbf{x}) = f_{yx}(\mathbf{x})$.

Si osservi che

$$\begin{aligned} f_{xy}(\mathbf{x}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f_x(x, y+t) - f_x(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\lim_{s\to 0} \frac{f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - f(x+s, y) + f(x, y)}{st} \right); \end{aligned}$$

analogamente

$$f_{yx}(\mathbf{x}) = \lim_{s\to 0} \left(\lim_{t\to 0} \frac{f(x+s, y+t) - f(x+s, y) - f(x, y+t) + f(x, y)}{st} \right),$$

ovvero la stessa espressione con i due limiti scambiati. Ciò fornisce l'idea della dimostrazione, che consiste nello studio della funzione

$$F(s, t) = f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - f(x+s, y) + f(x, y)$$

in un intorno di $(0, 0)$.

Ricordiamo che per definizione f è differenziabile in un intorno di $\mathbf{x}$. In particolare la funzione di una variabile

$$t \mapsto g(s, t) := f(x+s, y+t) - f(x, y+t),$$

è continua e derivabile in un intorno di $(0, 0)$. Possiamo quindi applicare il teorema del valor medio, ovvero esiste $\theta = \theta(s, t) \in (0, 1)$ tale che

$$F(s, t) = g(s, t) - g(s, 0) = t(f_y(x+s, y+\theta t) - f_y(x, y+\theta t)).$$

Poiché f è due volte differenziabile in $\mathbf{x}$, f_y è differenziabile in $\mathbf{x}$; quindi

$$\begin{aligned} F(s, t) &= t\Big(f_y(\mathbf{x}) + f_{yx}(\mathbf{x})s + f_{yy}(\mathbf{x})\theta t + o\left(\sqrt{s^2 + \theta^2 t^2}\right) - f_y(\mathbf{x}) - f_{yy}(\mathbf{x})\theta t + o(\theta t)\Big) \\ &= f_{yx}(\mathbf{x})st + o\left(s^2 + t^2\right) \quad \text{per } (s, t) \to (0, 0). \end{aligned}$$

In particolare

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t, t)}{t^2} = f_{yx}(\mathbf{x}).$$

Ripetendo il ragionamento con la funzione di una variabile

$$s \mapsto h(s, t) := f(x+s, y+t) - f(x+s, y),$$

si ottiene

$$F(s, t) = h(s, t) - h(0, t) = f_{xy}(\mathbf{x})st + o\left(s^2 + t^2\right) \quad \text{per } (s, t) \to (0, 0),$$

da cui

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t, t)}{t^2} = f_{xy}(\mathbf{x}).$$

Perciò $f_{xy}(\mathbf{x}) = f_{yx}(\mathbf{x})$.

Dimostrazione del Teorema 11.14 (polinomio di Taylor di ordine m), pag. 345

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in X$ e $T_m(\mathbf{x})$ il polinomio di Taylor di ordine m centrato in $\mathbf{x}_0$:

$$T_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_k} - x_{0i_k})$$

Dobbiamo dimostrare che:

(i) se f è m volte differenziabile in $\mathbf{x}_0$, allora

$$f(\mathbf{x}) = T_m(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^m) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \tag{11.29}$$

e $T_m(\mathbf{x})$ è l'unico polinomio di grado $\leq m$ che verifica la (11.29);

(ii) se il segmento $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ è contenuto in X, f è di classe C^{m-1} in $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ ed è m volte differenziabile in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$, allora esiste $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = T_{m-1}(\mathbf{x}_0) + E_{m-1}(\mathbf{x})$$

dove il resto $E_{m-1}(\mathbf{x})$ è dato dalla formula

$$\frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}}(\boldsymbol{\xi})(x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_m} - x_{0i_m}) .$$

(i). Dimostriamo la (11.29). Se $m = 1$, la (11.29) è verificata per la definizione di differenziabilità di f in $\mathbf{x}$. Quindi, procedendo per induzione rispetto a m, sia $m \geq 2$ e supponiamo che per ogni funzione $g : X \to \mathbb{R}$ $(m-1)$ volte differenziabile in $\mathbf{x}_0$ risulti

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} g_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_k} - x_{0i_k}) \\ &\quad + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{m-1}) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{D11.1}$$

Sia ora f m volte differenziabile in $\mathbf{x}_0$. Posto

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - T_m(\mathbf{x}),$$

dobbiamo dimostrare che $h(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^m)$ per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

Si noti che h è $m-1$ volte differenziabile in un intorno di $\mathbf{x}_0$, h e le sue derivate parziali di ordine $\leq m$ si annullano in $\mathbf{x}_0$, e h_{x_i} è $m-1$ volte differenziabile in $\mathbf{x}_0$. Quindi, per la (D11.1),

$$h_{x_i}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{m-1}) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \tag{D11.2}$$

e, per il teorema del valor medio (Teorema 11.8), esiste $\theta = \theta(\mathbf{x}) \in (0, 1)$ tale che

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} h_{x_i}(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x_i - x_{0i}).$$

Perciò, per la (D11.2),

$$|h(\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^{n} |h_{x_i}(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x_i - x_{0i})| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^m) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0.$$

La dimostrazione dell'unicità del polinomio di Taylor è del tutto analoga a quella svolta nel caso di una variabile, $n = 1$, e la lasciamo per esercizio.

(ii). Siano

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \quad \varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \quad \text{per} \quad 0 \le t \le t_0 := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Allora φ è $m - 1$ volte derivabile in $[0, t_0]$ e m volte derivabile in $(0, t_0)$; inoltre per ogni $k = 1, \ldots, m - 1$ risulta

$$\varphi_{\mathbf{v}}^{(k)}(t) = D^k_{\mathbf{v}\ldots\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \quad \text{se} \quad 0 \le t \le t_0$$

e

$$\varphi_{\mathbf{v}}^{(m)}(t) = D^m_{\mathbf{v}\ldots\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \quad \text{se} \quad 0 < t < t_0.$$

Quindi, per la formula del resto di Lagrange (Teorema 7.36), esiste $0 < \theta < 1$ tale che

$$\varphi_{\mathbf{v}}(t_0) \quad = \quad \varphi_{\mathbf{v}}(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} D^k_{\mathbf{v}\ldots\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) t_0^k + \frac{1}{m!} D^m_{\mathbf{v}\ldots\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0 + \theta t_0 \mathbf{v}) t_0^m$$

Dalla (11.26) e dalla definizione di $\mathbf{v}$ e di t_0 risulta che, per $k = 1, \ldots, m - 1$,

$$\begin{aligned} t_0^k D^k_{\mathbf{v}\ldots\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)\, t_0^k\, v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k} \\ &= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{0i_1}) \ldots (x_{i_k} - x_{0i_k}). \end{aligned}$$

Analogamente, posto $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$,

$$D^m_{\mathbf{v}\ldots\mathbf{v}} f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) t_0^m = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(\boldsymbol{\xi})(x_{i_1} - x_{0i_1}) \ldots (x_{i_m} - x_{0i_m})$$

e abbiamo dimostrato la parte (*ii*).

Dimostrazione del Teorema 11.17, pag. 347

Dobbiamo dimostrare che se $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa in $A \subseteq \mathbb{R}^n$, con A convesso e aperto, allora:

(*i*) in ogni punto $\mathbf{x} \in A$ le derivate destre e sinistre esistono finite e $D^-_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}) \le D^+_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x})$ per ogni $i = 1, \ldots, n$;

(*ii*) f è continua in A.

(*iii*) se f è derivabile in $\mathbf{x}_0 \in A$, f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

Osserviamo preliminarmente che per ogni $\mathbf{x} \in A$ ed ogni versore $\mathbf{v}$ la funzione di una variabile

$$s \mapsto \varphi(s) := f(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) \ \text{ è convessa in } \ I = \{s \in \mathbb{R} : \mathbf{x} + s\mathbf{v} \in A\} \qquad \text{(D11.3)}$$

(I è un intervallo aperto e non vuoto poiché A è aperto e convesso). Infatti, per definizione di funzione convessa

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq t f(\mathbf{x}) + (1-t) f(\mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A,\ \forall\, t \in [0,1]. \tag{D11.4}$$

Ora, presi $s, s_1, s_2 \in I$ tali che $s_1 < s < s_2$ e posto $t = (s_2 - s)/(s_2 - s_1) \in (0,1)$, si ha

$$1 - t = \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}, \quad \mathbf{x} + s\mathbf{v} = t(\mathbf{x} + s_1\mathbf{v}) + (1-t)(\mathbf{x} + s_2\mathbf{v})$$

da cui per la (D11.4)

$$\varphi(s) = \varphi(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) \leq \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1}\varphi(s_1) + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}\varphi(s_2) = \varphi(s_1) + \frac{\varphi(s_2) - \varphi(s_1)}{s_2 - s_1}(s - s_1)$$

che prova la convessità di φ in I.

(***i***). Segue immediatamente dalle parti (i) e (ii) del Teorema 7.28 applicato alle funzioni di una variabile $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$, che per la (D11.3) sono convesse.

(***ii***). Diamo la dimostrazione della (ii) solo per $n = 2$ (il caso generale può essere dimostrato procedendo per induzione sulla dimensione n dello spazio).

Sia dunque $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $r > 0$ tale che $R = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subset A$. Mostriamo anzitutto che in R la funzione è superiormente limitata dai valori che assume sui quattro vertici:

$$\sup_R f(x,y) \leq M := \max\{f(x_0 \pm r, y_0 \pm r)\}. \tag{D11.5}$$

Le funzioni di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 - r, y_0 + t),\ t \mapsto f(x_0 + r, y_0 + t),$$

sono convesse in $(-r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, e perciò per ogni $y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ si ha, scegliendo opportunamente $t \in [0,1]$,

$$f(x_0 - r, y) \leq t f(x_0 - r, y_0 - r) + (1-t) f(x_0 - r, y_0 + r) \leq M, \tag{D11.6}$$

$$f(x_0 + r, y) \leq t f(x_0 + r, y_0 - r) + (1-t) f(x_0 + r, y_0 + r) \leq M. \tag{D11.7}$$

D'altra parte, per ogni $y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ anche la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è convessa in $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$; quindi utilizzando le (D11.6), (D11.7) si ottiene

$$f(x,y) \leq t f(x_0 - r, y) + (1-t) f(x_0 + r, y) \leq M \quad \forall\,(x,y) \in R$$

che prova la (D11.5).

A questo punto possiamo dimostrare che, posto $\alpha = (M - f(\mathbf{x}_0))/r$, si ha

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad \text{se } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r, \tag{D11.8}$$

che implica immediatamente (ii). Per provare la (D11.8) studiamo la funzione di una variabile $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$, dove $\mathbf{v}$ è un versore e $t \leq r$: poiché

$$\frac{\varphi(-r) - \varphi(0)}{-r} = \frac{f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0 - r\mathbf{v})}{r} \geq -\alpha$$

e il rapporto incrementale è crescente, risulta

$$\varphi(t) \geq \varphi(0) - \alpha t \quad \forall\, t \in (0, r);$$

d'altra parte, poiché φ è convessa,

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + \frac{\varphi(r) - \varphi(0)}{r} t \leq \varphi(0) + \alpha t \quad \forall\, t \in (0, r);$$

quindi, combinando le due espressioni

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \alpha t \quad \forall\, t \in (0, r).$$

Ragionando allo stesso modo per $t < 0$ si ottiene la stessa stima: quindi

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \alpha t \quad \forall\, t \in (-r, r).$$

Scegliendo $\mathbf{v} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ e $t = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ si ottiene (D11.8).

(iii). Dimostriamo la (*iii*) per $n = 2$ (il caso generale si ottiene ragionando in modo analogo, oppure per induzione su n). A meno di una traslazione possiamo supporre che $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Sia

$$g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle.$$

Dimostreremo che

$$\frac{g(x, y)}{\|(x, y)\|} \leq o(1) \quad \text{per } (x, y) \to (0, 0) \tag{D11.9}$$

e che

$$g(x, y) \geq 0 \quad \forall\, (x, y) \in A. \tag{D11.10}$$

Combinando le due informazioni si ottiene la tesi:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Per ipotesi g è derivabile in $(0, 0)$, e per definizione $g(0, 0) = g_x(0, 0) = g_y(0, 0) = 0$. Inoltre anche g è convessa in A, in quanto $\langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle$ è lineare.

Proviamo prima la (D11.9). Sia $(x, y) \neq (0, 0)$; assumiamo che (x, y) appartenga al primo quadrante, ovvero che $x \geq 0$, $y \geq 0$ (gli altri tre casi sono analoghi). La retta per (x, y) parallela a alla retta di equazione $y = -x$ incontra gli assi in due punti, $(x + y, 0)$ e $(0, x + y)$. Scelto $t = x/(x + y)$, poiché g è convessa si ha

$$g(x, y) = g(t(x + y, 0) + (1 - t)(0, x + y)) \leq \frac{x}{x + y} g(x + y, 0) + \frac{y}{x + y} g(0, x + y).$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{g(x, y)}{\|(x, y)\|} &\leq \frac{x}{\|(x, y)\|} \frac{g(x + y, 0) - g(0, 0)}{x + y} + \frac{y}{\|(x, y)\|} \frac{g(0, x + y) - g(0, 0)}{x + y} \\
&\leq \left| \frac{g(x + y, 0) - g(0, 0)}{x + y} \right| + \left| \frac{g(0, x + y) - g(0, 0)}{x + y} \right|
\end{aligned}$$

e la (D11.9) segue passando al limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

Per provare la (D11.10) ragioniamo per assurdo. Sia dunque $(x, y) \in A$ tale che $g(x, y) < 0$. Posto $\mathbf{v} = (x, y)/\|(x, y)\|$, la funzione $t \mapsto \varphi(t) = g(t\mathbf{v})$ è convessa in un intervallo aperto $I \supset [0, 1]$ e soddisfa $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) < 0$. Per il Lemma 7.27, il rapporto incrementale $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ è crescente; quindi $\varphi'_-(0) \leq \varphi'_+(0) < 0$. D'altra parte

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{g(t\mathbf{v})}{|t|} = -\lim_{t\to 0^-} \frac{g(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|} \overset{\text{(D11.9)}}{\geq} 0,$$

e abbiamo ottenuto una contraddizione. Ciò prova la (D11.10) e conclude la dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 11.18, pag. 347

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e aperto. Dobbiamo dimostrare che se f è (strettamente) convessa in A, allora

$$f(\mathbf{x}) \overset{(>)}{\geq} f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in A, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0.$$

Consideriamo prima il caso $n = 1$, ovvero $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (il risultato non è contenuto nel Teorema 7.29 in quanto qui si richiede solo che f sia derivabile in x_0). Per $a < z < x_0 < y < x < b$, dal Lemma 7.27 segue che

$$P(x_0, z) \overset{(<)}{\leq} P(y, x_0) \overset{(<)}{\leq} P(x, x_0),$$

ovvero

$$\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \overset{(<)}{\leq} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \overset{(<)}{\leq} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Passando al limite per $z \to x_0^-$ si ottiene

$$f'(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \overset{(<)}{\leq} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che prova l'asserto se $x > x_0$. Se $x < x_0$ l'argomento è speculare e lo lasciamo per esercizio.

Sia ora $n \geq 1$. La funzione $t \mapsto \varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ è (strettamente) convessa per la (D11.3), quindi per il risultato appena ottenuto verifica

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(1) \overset{(>)}{\geq} \varphi(0) + \varphi'(0) = f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle.$$

Dimostrazione del Teorema 11.19, pag. 347

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile nell'insieme convesso e aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dobbiamo dimostrare che f è (strettamente) convessa in A se e solo se

$$f(\mathbf{x}) \overset{(>)}{\geq} f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \quad \text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0.$$

($\Rightarrow$). Segue immediatamente dal Teorema 11.18.

($\Leftarrow$). Ragioniamo in modo analogo al caso unidimensionale (Teorema 7.29, $(c) \Rightarrow (a)$). Per ogni $t \in (0, 1)$ si ottiene

$$f(\mathbf{x}) \overset{(>)}{\geq} f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), (1 - t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle,$$
$$f(\mathbf{x}_0) \overset{(>)}{\geq} f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), -t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle.$$

Moltiplicando la prima per t, la seconda per $(1 - t)$ e sommando, si ottiene

$$f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \overset{(<)}{\leq} t f(\mathbf{x}) + (1 - t) f(\mathbf{x}_0) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \forall\, t \in (0, 1),$$

che prova la (stretta) convessità di f.

Dimostrazione del Teorema 11.25 (convessità e natura dei punti critici), pag. 351

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $\mathbf{x} \in A$ un punto critico di f, ovvero f è differenziabile in $\mathbf{x}$ e $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$. È sufficiente provare le affermazioni (i), (iii), (v) e (vi), ovvero:

(i) se f è (strettamente) convessa in un intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{x}$, allora $\mathbf{x}$ è un punto di minimo (forte);

(iii) se f è due volte differenziabile in $\mathbf{x}$ e $D^2 f(\mathbf{x})$ è definita positiva, allora $\mathbf{x}$ è un punto di minimo forte;

(v) se f è due volte differenziabile in $\mathbf{x}$ e $D^2 f(\mathbf{x}_0)$ non è semi-definita positiva né semi-definita negativa, allora $\mathbf{x}$ è un punto di sella di f;

(vi) se $D^2 f$ è semi-definita positiva o semi-definita negativa, non si può concludere alcunché sulla natura di $\mathbf{x}$.

Infatti la (ii) e la (iv) seguono rispettivamente dalla (i) e dalla (iii) scambiando f con $-f$.

(*i*). Per il Teorema 11.18, se f è (strettamente) convessa nell'intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{x}$, risulta (poiché $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$)

$$f(\mathbf{y}) \overset{(>)}{\geq} f(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}\}$$

quindi $\mathbf{x}$ è un punto di minimo locale (forte).

(*iii*). Per il Teorema 11.12, risulta

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}), (\mathbf{y}-\mathbf{x})\rangle + o(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2) \\ &\geq f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\lambda\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2(1+o(1)) \quad \text{per } \mathbf{y} \to \mathbf{x}, \end{aligned}$$

dove $\lambda > 0$ è il più piccolo autovalore di $D^2 f(\mathbf{x})$ (si veda la (36) dell'Appendice di algebra lineare). Perciò $f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x})$ per $\mathbf{y}$ appartenente a un intorno sufficientemente piccolo di $\mathbf{x}$, ovvero $\mathbf{x}$ è un punto di minimo forte.

(*v*). Per ipotesi, esistono due versori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ tali che

$$\langle D^2 f(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle > 0 \quad \text{e} \quad \langle D^2 f(\mathbf{x})\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle < 0.$$

Per il Teorema 11.12, per $i = 1, 2$ risulta

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}t^2\langle D^2 f(\mathbf{x})\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle(1+o(1)) \quad \text{per } t \to 0\,;$$

quindi $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}_1) > f(\mathbf{x})$ e $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}_2) < f(\mathbf{x})$ definitivamente per $t \to 0$, ovvero $\mathbf{x}$ è un punto di sella.

(*vi*). Le funzioni $f_1(x,y) = x^4 + y^4$, $f_2(x,y) = x^4 - y^4$ e $f_3(x,y) = -x^4 - y^4$ hanno un punto critico di $(0,0)$ e la matrice hessiana di f_1, f_2 e f_3 in $(0,0)$ è $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'altra parte, $(0,0)$ è un punto di minimo di f_1, un punto di sella di f_2 e un punto di massimo di f_3.

Teorema 11.29 (regola della catena generale), pag. 356

Poiché una funzione $\mathbf{f} : B \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile se e solo se lo è ciascuna delle sue componenti, non è restrittivo supporre $k = 1$. Siano dunque $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti, $\mathbf{g} : A \to B$ differenziabile in $\mathbf{x} \in A$ ed $f : B \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Dobbiamo dimostrare che la funzione composta $f \circ \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}$ e

$$\nabla(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \big(f_{x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{x})), \ldots, f_{x_m}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\big) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}).$$

Svolgiamo la dimostrazione supponendo che $g(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x}_0)$ definitivamente per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$; il caso generale si tratta ricorrendo allo stesso artificio utilizzato nella dimostrazione del Teorema 7.13.

Osserviamo che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^T$. Per ipotesi,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) + J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^T + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{k}) &= f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) + \langle \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})), \mathbf{k} \rangle + o(\|\mathbf{k}\|) \\ &= \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{k}^T + o(\|\mathbf{k}\|) \quad \text{per } \mathbf{k} \to \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Poiché abbiamo ipotizzato che $\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \neq \mathbf{g}(\mathbf{x})$ definitivamente per $x \to x_0$, possiamo sostituire $\mathbf{k} = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h})) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) + \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T + o(\|\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Quindi

$$f(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h})) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) + \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot (J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h})^T + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}$$

che prova l'asserto in quanto

$$\nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot (J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^T)^T = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{h} \cdot (J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}))^T == ((\nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})))^T \cdot \mathbf{h} = (\nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{h}^T.$$

12 Dimostrazioni del Capitolo 12

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 12.8, pag. 363 . . . . **51**
Dimostrazione del Teorema 12.10 (lunghezza di una curva di classe C^1), pag. 365 . . . . **52**
Dimostrazione del Teorema 12.22 (integrali di forme differenziali chiuse su curve omotope), pag. 379 . . . . **53**
Dimostrazione della Proposizione 12.23, pag. 387 . . . . **54**

Dimostrazione del Teorema 12.8, pag. 363

Dobbiamo dimostrare che se $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è integrabile in $[a,b]$, allora $\|\mathbf{f}\| \in \mathcal{R}(a,b)$ e

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Data una qualunque funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (in particolare, limitata) in $[a,b]$ e un qualunque sottoinsieme X di $[a,b]$, valgono le uguaglianze

$$\sup_X g^2 = \left(\sup_X |g|\right)^2, \quad \inf_X g^2 = \left(\inf_X |g|\right)^2,$$
$$\sup_X \sqrt{|g|} = \sqrt{\sup_X |g|}, \quad \inf_X \sqrt{|g|} = \sqrt{\inf_X |g|},,$$

dalle quali segue l'integrabilità delle funzioni g^2 e $\sqrt{|g|}$ (lasciamo i dettagli per esercizio). Ricordando anche che la somma di funzioni integrabili è integrabile, si conclude che $t \mapsto \|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{f_1^2(t) + \cdots + f_n^2(t)}$ è integrabile in (a,b).

Dimostriamo ora che

$$\left\| \int_a^b (|f_1(t)|, \ldots, |f_n(t)|)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{D12.1}$$

da cui la disuguaglianza segue in modo elementare, osservando che $|\int_a^b f_k| \leq \int_a^b |f_k|$ per ogni $k = 1, \ldots, n$:

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \left\| \int_a^b (f_1(t), \ldots, f_n(t))\,\mathrm{d}t \right\| \leq \left\| \int_a^b (|f_1(t)|, \ldots, |f_n(t)|)\,\mathrm{d}t \right\|$$
$$\overset{(D12.1)}{\leq} \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Per provare (D12.1) non è restrittivo assumere che $f_i(t) \geq 0$ in (a,b) per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ricordiamo che per definizione

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \left\| \left(\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f_1), \ldots, \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f_n) \right) \right\|.$$

Siano quindi $\mathcal{D}_1, \dots \mathcal{D}_n$ suddivisioni di (a, b); poiché la suddivisione $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_n = \{x_k,\ k = 0, \dots, N\}$ è un raffinamento di ciascuna, e le f_i sono ipotizzate non negative, risulta

$$\begin{aligned} L &:= \|(s(\mathcal{D}_1, f_1), \dots, s(\mathcal{D}_n, f_n))\| \le \|(s(\mathcal{D}, f_1), \dots, s(\mathcal{D}, f_n))\| \\ &= \left\| \left(\sum_{k=1}^N |I_k| \inf_{I_k} f_1, \dots, \sum_{k=1}^N |I_k| \inf_{I_k} f_n \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^N |I_k| \left(\inf_{I_k} f_1, \dots, \inf_{I_k} f_n \right) \right\|. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza triangolare, si ottiene

$$L \le \sum_{k=1}^N |I_k| \left\| \left(\inf_{I_k} f_1, \dots, \inf_{I_k} f_n \right) \right\|.$$

Osserviamo ora che

$$\left\| \left(\inf_{I_k} f_1, \dots, \inf_{I_k} f_n \right) \right\|^2 = \inf_{I_k} f_1^2 + \cdots + \inf_{I_k} f_n^2 \le \inf_{I_k} \left(f_1^2 + \dots f_n^2 \right) = \inf_{I_k} \|\mathbf{f}\|^2.$$

Perciò

$$L \le \sum_{k=1}^N |I_k| \inf_{I_k} \|\mathbf{f}\| = s(\mathcal{D}, \|\mathbf{f}\|) \le \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

e per l'arbitrarietà delle suddivisioni $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema 12.10 (lunghezza di una curva di classe C^1), pag. 365

Dobbiamo dimostrare che se $\boldsymbol{\gamma} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, allora $\boldsymbol{\gamma}$ è rettificabile e

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Sia $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$; utilizzando la (12.5) e la (12.6), si ha

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\gamma}, \mathcal{D}) &:= \sum_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{\gamma}(t_{i+1}) - \boldsymbol{\gamma}(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{\gamma}'(t) \, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà della suddivisione, segue che $\boldsymbol{\gamma}$ è rettificabile e che $L(\boldsymbol{\gamma}) \le \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t$.

Per completare la dimostrazione si deve provare la disuguaglianza opposta, ovvero che $L(\boldsymbol{\gamma}) \ge \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t$. Osserviamo che, essendo $\boldsymbol{\gamma}' \in C([a, b])$, $\boldsymbol{\gamma}'$ e $\|\boldsymbol{\gamma}'\|$ sono uniformemente continue in $[a, b]$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$t', t'' \in [a, b],\ |t' - t''| < \delta \ \Rightarrow \ \big| \|\boldsymbol{\gamma}'(t')\| - \|\boldsymbol{\gamma}'(t'')\| \big| \le \|\boldsymbol{\gamma}'(t') - \boldsymbol{\gamma}'(t'')\| < \varepsilon.$$

Sia $\mathcal{D}$ una suddivisione di $[a, b]$ tale che $|\mathcal{D}| < \delta$; allora

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, \mathrm{d}t &\le \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|\boldsymbol{\gamma}'(t_i)\| + \varepsilon) \, \mathrm{d}t = (\|\boldsymbol{\gamma}'(t_i)\| + \varepsilon) \, (t_{i+1} - t_i) \\ &= \|\boldsymbol{\gamma}'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Osservando che

$$\boldsymbol{\gamma}'(t_i)(t_{i+1}-t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{\gamma}'(t_i)\,\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\boldsymbol{\gamma}'(t_i)-\boldsymbol{\gamma}'(t))\,\mathrm{d}t + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\boldsymbol{\gamma}'(t_i)-\boldsymbol{\gamma}'(t))\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\gamma}(t_{i+1}) - \boldsymbol{\gamma}(t_i))$$

risulta

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t_i)(t_{i+1}-t_i)\| \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\boldsymbol{\gamma}'(t_i)-\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\,\mathrm{d}t + \|\boldsymbol{\gamma}(t_{i+1})-\boldsymbol{\gamma}(t_i)\|,$$

da cui otteniamo

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\,\mathrm{d}t \le \|\boldsymbol{\gamma}(t_{i+1})-\boldsymbol{\gamma}(t_i)\| + 2\varepsilon(t_{i+1}-t_i).$$

Sommando rispetto a i, troviamo

$$\int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\,\mathrm{d}t \le L(\boldsymbol{\gamma},\mathcal{D}) + 2\varepsilon(b-a) \le L(\boldsymbol{\gamma}) + 2\varepsilon(b-a)$$

e per l'arbitrarietà di ε resta provata la tesi.

Dimostrazione del Teorema 12.22 (integrali di forme differenziali chiuse su curve omotope), pag. 379

Sia ω una forma differenziale chiusa in un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e siano $\boldsymbol{\gamma}^{(0)}$ e $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ due curve omotope contenute in E. Dobbiamo dimostrare che allora

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}^{(0)}} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}^{(1)}} \omega.$$

Consideriamo per semplicità solo il caso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ (il caso generale è del tutto analogo): $\omega = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$. Inoltre sotto le ipotesi del teorema è possibile dimostrare che esiste un'omotopia φ tra $\boldsymbol{\gamma}^{(0)}$ e $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ che è di classe C^2: anziché fornirne la dimostrazione, per semplicità supponiamo che tale proprietà di regolarità sia verificata.

L'omotopia $\varphi : [a,b]\times[0,1] \to E$ tra $\boldsymbol{\gamma}^{(0)}$ e $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ definisce per $\lambda \in [0,1]$ la famiglia di curve $\boldsymbol{\gamma}^{(\lambda)} \subset E$ date da

$$\boldsymbol{\gamma}^{(\lambda)}(t) := \varphi(t,\lambda) = (x(t,\lambda), y(t,\lambda)), \quad a \le t \le b,$$

aventi gli stessi punti iniziali e finali. Posto

$$\mathcal{I}(\lambda) := \int_{\boldsymbol{\gamma}^{(\lambda)}} \omega,$$

proviamo che $\mathcal{I}(\lambda)$ è costante in $[0,1]$: da ciò segue in particolare che $\int_{\boldsymbol{\gamma}^{(0)}} \omega = \mathcal{I}(0) = \mathcal{I}(1) = \int_{\boldsymbol{\gamma}^{(1)}} \omega$, ovvero la tesi.

Si ha, per definizione di integrale di una forma lungo una curva,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_a^b \left(F_1(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial t} + F_2(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial t} \right)\mathrm{d}t.$$

Dal Teorema di derivazione sotto integrale (Teorema 11.10) segue che

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F_1(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial t} + F_2(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial t}\right) dt.$$

Applicando la regola della catena e ricordando che ω è chiusa, ovvero che $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F_1(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F_1(x(t,\lambda),y(t,\lambda))\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial t}\right)\\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + F_1\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial t}\\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + F_1\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial t}\end{aligned}$$

e analogamente

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F_2(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + F_2\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\partial t}.$$

Sommando le due espressioni si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} &= \int_a^b \left[\frac{\partial x}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) + F_1\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial t}\right.\\ &\qquad \left. + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) + F_2\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\partial t}\right] dt\\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial F_1(\varphi(t,\lambda))}{\partial t} + F_1\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial t} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial F_2(\varphi(t,\lambda))}{\partial t} + F_2\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\partial t}\right] dt\end{aligned}$$

e poiché $\varphi \in C^2$, per il Teorema di Schwarz concludiamo che

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(F_1(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial\lambda} + F_2(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right) dt\\ &= \left(F_1(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial\lambda} + F_2(\varphi(t,\lambda))\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=b} = 0\end{aligned}$$

poiché $\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0$ per $t = a$ e $t = b$ (l'omotopia mantiene gli estremi fissati).

Dimostrazione della Proposizione 12.23, pag. 387

Dobbiamo dimostrare che se $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ è una curva regolare (si ricordi l'errata corrige) di classe $C^3(I)$ e $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(t(s))$ è la sua parametrizzazione mediante l'ascissa curvilinea, allora

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &:= \mathbf{T}(s(t)) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|},\\ \mathbf{B}(t) &:= \mathbf{B}(s(t)) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)\wedge\boldsymbol{\gamma}''(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\wedge\boldsymbol{\gamma}''(t)\|},\\ \mathbf{N}(t) &:= \mathbf{N}(s(t)) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \mathbf{B}(t)\wedge\mathbf{T}(t)\\ \kappa(t) &:= \kappa(s(t)) = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\wedge\boldsymbol{\gamma}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^3},\\ \tau(t) &:= \tau(s(t)) = \frac{\langle\boldsymbol{\gamma}'(t)\wedge\boldsymbol{\gamma}''(t), \gamma'''(t)\rangle}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\wedge\boldsymbol{\gamma}''(t)\|^2},\end{aligned}$$

dove $'$ indica la derivata rispetto a t.

Si ha $\boldsymbol{\gamma}(t) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s(t))$ e $s'(t) = \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| =: v$. Utilizzando la regola della catena, si ha

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}' &= \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathrm{d}s} s' = v \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathrm{d}s} = v\mathbf{T}, \\
\boldsymbol{\gamma}'' &= v'\mathbf{T} + v^2 \frac{\mathrm{d}^2\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathrm{d}s^2} = v'\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}, \\
\boldsymbol{\gamma}' \wedge \boldsymbol{\gamma}'' &= v^3\kappa\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = v^3\kappa\mathbf{B}. \qquad \text{(D12.2)}
\end{aligned}$$

Pertanto (ricordando che $\|\mathbf{B}\| = 1$)

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\gamma}'}{v}, \quad \mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\gamma}' \wedge \boldsymbol{\gamma}''}{\|\boldsymbol{\gamma}' \wedge \boldsymbol{\gamma}''\|} \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}' \wedge \boldsymbol{\gamma}''\|}{v^3}.$$

Le formule per $\mathbf{N}$ seguono immediatamente dalla (12.29) e dalla definizione di $\mathbf{B}$. Per ricavare il valore della torsione, si osserva anzitutto che

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{T}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \tau\mathbf{N} \wedge \mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \wedge \mathbf{N} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T} \qquad \text{(D12.3)}$$

(questa relazione è anche nota come una delle formule di Frenet-Serret). Si osserva inoltre che

$$\boldsymbol{\gamma}''' = v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(v'\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}\right).$$

Si vede facilmente che, in questa derivata, l'unico termine che contiene $\mathbf{B}$ proviene dalla derivata di $\mathbf{N}$ rispetto ad s. Quindi, segue dalla (D12.3) che

$$\boldsymbol{\gamma}''' = \lambda\mathbf{T} + \mu\mathbf{N} + v^3\kappa\tau\mathbf{B}$$

per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{B}$ e utilizzando la (D12.2) si ottiene la formula desiderata:

$$\tau = \frac{1}{v^3\kappa}\langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\gamma}''' \rangle = \frac{1}{v^6\kappa^2}\langle \boldsymbol{\gamma}' \wedge \boldsymbol{\gamma}'', \boldsymbol{\gamma}''' \rangle = \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}' \wedge \boldsymbol{\gamma}'', \boldsymbol{\gamma}''' \rangle}{\|\boldsymbol{\gamma}' \wedge \boldsymbol{\gamma}''\|^2}.$$

13 Dimostrazioni del Capitolo 13

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 13.3 (Teorema delle funzioni implicite o di Dini da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$), pag. 389 56

Dimostrazione del Teorema 13.3 (Teorema delle funzioni implicite o di Dini da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$), pag. 389

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f, f_x \in C(X)$ e $f_x(x_0, y_0) \neq 0$. Dobbiamo determinare un intorno $\mathcal{U} = (y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2)$ di y_0, un intorno $\mathcal{V} = (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ di x_0 e un'unica funzione $g : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, continua in $\mathcal{U}$, tali che $\mathcal{V} \times \mathcal{U} \subset X$ e

$$\{(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : f(x, y) = f(x_0, y_0)\} = \{(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : x = g(y)\}. \tag{13.16}$$

Se inoltre $f \in C^1(X)$ allora $g \in C^1(\mathcal{U})$ e $g'(y) = -\frac{f_y(g(y),y)}{f_x(g(y),y)}$ per $|y - y_0| < \varepsilon_2$.

Non è restrittivo supporre che $f_x(x_0, y_0) > 0$. Per la proprietà di permanenza del segno esistono $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ tali che

$$f_x > 0 \quad \text{in } [x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0] \subset X.$$

La funzione $x \mapsto f(x, y_0)$ è strettamente crescente in $[x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1]$ e si annulla in x_0, quindi

$$f(x_0 + \varepsilon_1, y_0) > 0 \quad \text{e} \quad f(x_0 - \varepsilon_1, y_0) < 0.$$

Ancora per la proprietà di permanenza del segno esiste $\varepsilon_2, \in (0, \varepsilon_0]$ tale che

$$g(x_0 + \varepsilon_1, y) > 0 \quad \text{e} \quad g(x_0 - \varepsilon_1, y) < 0 \quad \text{se} \quad y_0 - \varepsilon_2 \leq y \leq y_0 + \varepsilon_2.$$

Poiché per ogni $y \in [y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2]$ la funzione $x \mapsto g(x, y)$ è strettamente crescente e continua, per il teorema degli zeri esiste un unico valore

$$x^* \in (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1) \quad \text{in cui} \quad g(x^*, y) = 0.$$

Ovviamente x^* dipenderà da y; si definisce quindi $x^* = g(y)$. Per costruzione g soddisfa la (13.16) e g è unica.

Per provare la continuità di g, sia $\overline{y} \in \mathcal{U}$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $[g(\overline{y}) - \varepsilon, g(\overline{y}) + \varepsilon] \subset \mathcal{V}$. Per definizione $f(g(\overline{y}), \overline{y}) = 0$. Poiché $f_x > 0$ in $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$, si ha $f(g(\overline{y}) - \varepsilon, \overline{y}) < 0 < f(g(\overline{y}) + \varepsilon, \overline{y})$. Utilizzando ancora una volta la proprietà di permanenza del segno, si deduce l'esistenza di $\delta > 0$ tale che

$$f(g(\overline{y}) - \varepsilon, y) < 0 < f(g(\overline{y}) + \varepsilon, y) \quad \forall\, y \in [\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta].$$

D'altra parte, $f(g(y), y) = 0$ e tale $g(y)$ è unico. Perciò, sempre per la monotonia di $x \mapsto f(x, y)$,

$$g(\overline{y}) - \varepsilon < g(y) < g(\overline{y}) + \varepsilon \quad \forall\, y \in [\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta]$$

che prova la continuità di g.

Supponiamo ora che $f \in C^1(X)$, e siano $y \in \mathcal{U}$ e $h \neq 0$ tale che $y + h \in \mathcal{U}$. Per il teorema del valor medio esiste (ξ, η) sul segmento di estremi $(g(y), y)$ e $(g(y + h), y + h)$ tale che

$$0 = f(g(y + h), y + h) - f(g(y), y) = f_x(\xi, \eta)(g(y + h) - g(y)) + f_y(\xi, \eta)h.$$

Perciò

$$\frac{g(y + h) - g(y)}{h} = -\frac{f_y(\xi, \eta)}{f_x(\xi, \eta)}$$

(la divisione è lecita perché $f_x > 0$ in $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$). Passando al limite $h \to 0$ si ottiene la tesi.

14 Dimostrazioni del Capitolo 14

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 14.6 (formule di riduzione su rettangoli), pag. 415 . . . 58
Dimostrazione del Teorema 14.9 (misura della frontiera di insiemi misurabili), pag. 418 . . . 59
Dimostrazione del Teorema 14.10 (caratterizzazione degli insiemi di misura nulla), pag. 418 . . . 61
Dimostrazione del Teorema 14.12 (proprietà di insiemi misurabili), pag. 419 . . . 62
Dimostrazione del Teorema 14.14 (integrabilità di funzioni continue quasi ovunque), pag. 419 . . . 63
Dimostrazione del Corollario 14.20 (passaggio in coordinate polari), pag. 429 . . . 64

Dimostrazione del Teorema 14.6 (formule di riduzione su rettangoli), pag. 415

È sufficiente dimostrare la parte (*i*), ovvero che se $f \in \mathcal{R}([a,b] \times [c,d])$ e $x \mapsto f(x,y)$ è integrabile in $[a,b]$ per ogni $y \in [c,d]$, allora la funzione $g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ è integrabile in $[c,d]$ e risulta

$$\iint_Q f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{14.4}$$

Infatti la parte (*ii*) segue dalla (*i*) scambiando i ruoli di x e y.

Fissato $\varepsilon > 0$, per il Teorema 14.3 esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_{\varepsilon,1} \times \mathcal{D}_{\varepsilon,2}$ di $Q = [a,b] \times [c,d]$ tale che $S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$. Per fissare le idee, scriviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\varepsilon,1} &= \{x_i : i = 0, \ldots, n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \\ \mathcal{D}_{\varepsilon,2} &= \{y_j : j = 0, \ldots, m\}, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d, \end{aligned}$$

e

$$A_i = [x_{i-1}, x_i], \quad B_j = [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Si ha

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_{\varepsilon,2}, g) &= \sum_{j=1}^{m} |B_j| \sup_{y\in B_j} g = \sum_{j=1}^{m} |B_j| \sup_{y\in B_j} \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} |B_j| \sup_{y\in B_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \\ &\le \sum_{j=1}^{m} |B_j| \sup_{y\in B_j} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| \sup_{x\in A_i} f(x,y) \right) \\ &\le \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |B_j|\,|A_i| \sup_{y\in B_j} \left(\sup_{x\in A_i} f(x,y) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |A_i \times B_j| \sup_{A_i\times B_j} f(x,y) = S(\mathcal{D}_\varepsilon, f). \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene $s(\mathcal{D}_{\varepsilon,2}, g) \ge s(\mathcal{D}_\varepsilon, f)$, quindi $S(\mathcal{D}_{\varepsilon,2}, g) - s(\mathcal{D}_{\varepsilon,2}, g) < \varepsilon$ e g è integrabile. Inoltre

$$s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) \le s(\mathcal{D}_{\varepsilon,2}, g) \le \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \le S(\mathcal{D}_{\varepsilon,2}, g) \le S(\mathcal{D}_\varepsilon, f)$$

da cui segue (14.4).

Dimostrazione del Teorema 14.9 (misura della frontiera di insiemi misurabili), pag. 418

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Dobbiamo dimostrare che le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) Ω è misurabile;

(ii) $\partial\Omega$ è un insieme di misura nulla.

(i) ⇒ (ii). Utilizziamo il Teorema 14.10, la cui dimostrazione, data di seguito, non utilizza il risultato che stiamo per provare. Dobbiamo quindi dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono N_ε rettangoli, $\mathcal{R}_\varepsilon = \{Q_1, \dots, Q_{N_\varepsilon}\}$, tali che

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} Q_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |Q_k| < \varepsilon.$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo contenente Ω. Per il Teorema 14.3 esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ di Q tale che[2]

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Omega) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Omega) = \sum_{i,j} |Q_{ij}| \left(\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{D14.1}$$

[2]Nelle seguenti dimostrazioni del Capitolo 14, data una suddivisione $\mathcal{D}$ di un rettangolo Q, si indicano con Q_{ij} i rettangoli individuati dalla suddivisione: in altri termini, se

$$\mathcal{D} = \{(x_i, y_j) : \ 0 \le i \le n, \ 0 \le j \le m\},$$

allora

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m.$$

Si pone inoltre

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij},$$

Osserviamo che

$$\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{se } Q_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset \text{ e } Q_{ij} \cap \complement\Omega \neq \emptyset, \\ 0 & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Quindi

$$\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega = \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}'_\varepsilon}} |Q_{ij}|,$$

dove

$$\mathcal{R}'_\varepsilon = \left\{ Q_{ij} : \ Q_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset \text{ e } Q_{ij} \cap \complement\Omega \neq \emptyset \right\}$$

e per la (D14.1) risulta

$$\sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}'_\varepsilon}} |Q_{ij}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per costruire il "ricoprimento" $\mathcal{R}_\varepsilon$ selezioniamo anzitutto quei rettangoli di $\mathcal{D}_\varepsilon$ il cui interno ha intersezione non vuota con $\partial\Omega$:

$$\mathcal{R}^*_\varepsilon = \{ Q_{ij} : \overset{\circ}{Q}_{ij} \cap \partial\Omega \neq \emptyset \}.$$

Osservando che, per definizione di frontiera, ogni intorno di $x \in \partial\Omega$ contiene sia punti di Ω che punti di $\complement\Omega$, risulta che $\mathcal{R}^*_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}'_\varepsilon$. Perciò

$$\sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}^*_\varepsilon}} |Q_{ij}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Restano da "ricoprire" i punti di $\partial\Omega$ che intersecano la frontiera dei rettangoli Q_{ij}. Per far questo è sufficiente considerare i rettangoli

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\varepsilon,x} &= \{[x_i - \delta, x_i + \delta] \times [c, d], \ i = 0, \dots, n\}, \\ \mathcal{R}_{\varepsilon,y} &= \{[a, b] \times [y_j - \delta, y_j + \delta], \ j = 0, \dots, m\}, \end{aligned}$$

con δ così piccolo che l'area complessiva non superi $\varepsilon/2$:

$$2(n+1)\delta(d-c) + 2(m+1)\delta(b-a) < \varepsilon \iff \delta < \frac{\varepsilon}{2(n+1)(d-c) + 2(m+1)(b-a)}.$$

In tal modo l'insieme $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}_{\varepsilon,x} \cup \mathcal{R}_{\varepsilon,y} \cup \mathcal{R}^*_\varepsilon$ soddisfa le proprietà richieste.

(ii)* ⇒ *(i). Sia Q un rettangolo contenente Ω. Per il Teorema 14.3, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ di Q tale che $S(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_{\partial\Omega}) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_{\partial\Omega}) < \varepsilon$. Osserviamo che, come sopra,

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Omega) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Omega) = \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}'_\varepsilon}} |Q_{ij}|$$

dove

$$\mathcal{R}'_\varepsilon = \{ Q_{ij} : \ Q_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset \text{ e } Q_{ij} \cap \complement\Omega \neq \emptyset \}.$$

e, se $\mathcal{R}$ è un sottoinsieme di $\{Q_{ij} : \ i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m\}$, la scrittura $\sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}}} a_{ij}$ indica che la somma è ristretta alle coppie di indici (i, j) tali che $Q_{ij} \in \mathcal{R}$.

Ogni rettangolo di $\mathcal{R}'_\varepsilon$ contiene sia punti di Ω che punti del suo complementare; quindi contiene almeno un punto di $\partial\Omega$. D'altra parte deve contenere anche almeno un punto di $\complement(\partial\Omega)$ (altrimenti $\partial\Omega$ conterrebbe tutto il rettangolo e perciò avrebbe misura positiva). Quindi

$$\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{\partial\Omega} - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{\partial\Omega} = \sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{\Omega} - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{\Omega} = 1 \quad \text{per ogni } \ Q_{ij} \in \mathcal{R}'_\varepsilon,$$

da cui

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Omega) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Omega) &= \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij}\in\mathcal{R}'_\varepsilon}} |Q_{ij}| \left(\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Omega \right) \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij}\in\mathcal{R}'_\varepsilon}} |Q_{ij}| \left(\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{\partial\Omega} - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{\partial\Omega} \right) \\ &\leq S(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_{\partial\Omega}) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_{\partial\Omega}) < \varepsilon \end{aligned}$$

e (i) segue dal Teorema 14.3.

Dimostrazione del Teorema 14.10 (caratterizzazione degli insiemi di misura nulla), pag. 418

Dobbiamo dimostrare che un insieme limitato $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile e ha misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono N_ε rettangoli, $\mathcal{R}_\varepsilon = \{Q_1, \dots, Q_{N_\varepsilon}\}$, tali che

$$\Gamma \subseteq B := \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} Q_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |Q_k| < \varepsilon. \tag{D14.2}$$

Osserviamo preliminarmente che

$$\text{in } \mathbb{R}^2\text{, un segmento } S \text{ parallelo a un asse ha misura (bidimensionale) nulla.} \tag{D14.3}$$

Infatti, se per esempio $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \ y = y_0\}$, allora basta applicare il Teorema 14.3 con $Q = [a,b] \times [y_0 - \varepsilon/(b-a), y_0 + \varepsilon/(b-a)]$ e la suddivisione banale di Q. I casi in cui S contenga uno o entrambi gli estremi o sia parallelo all'asse y sono identici.

Sia $Q \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo tale che $B \subseteq Q$. Per definizione, Γ è misurabile e ha misura nulla se e solo se $\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_\Gamma) = 0$, ovvero se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ di Q tale che

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Gamma) < \varepsilon. \tag{D14.4}$$

Ciò premesso, se Γ è misurabile e ha misura nulla si pone

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \{Q_{ij} : Q_{ij} \cap \Gamma \neq \emptyset\}$$

cosicché

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{\substack{i,j \\ Q_{ij}\in\mathcal{R}_\varepsilon}} Q_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij}\in\mathcal{R}_\varepsilon}} |Q_{ij}| = \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij}\in\mathcal{R}_\varepsilon}} |Q_{ij}| \sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_\Gamma = S(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathbf{1}_\Gamma) < \varepsilon$$

che coincide con la (D14.2).

Viceversa supponiamo che valga la (D14.2); non è restrittivo assumere che i rettangoli Q_k non abbiano punti interni in comune (altrimenti, per la (D14.3), basta aumentare il loro numero). Prendendo su ciascun asse l'unione degli estremi di tutti i rettangoli Q_k si ottiene una suddivisione $\mathcal{D}$ di Q con la seguente proprietà: preso per ogni Q_k il sottoinsieme $\mathcal{R}_k = \{Q_{ij} : \ Q_{ij} \cap Q_k \neq \emptyset\}$, risulta

$$Q_k = \bigcup_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}_k}} Q_{ij}. \tag{D14.5}$$

Quindi

$$\Gamma \subseteq B = \bigcup_k \bigcup_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}_k}} Q_{ij} \tag{D14.6}$$

e per la (D14.3) e la (D14.5)

$$|Q_k| = \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}_k}} |Q_{ij}|. \tag{D14.7}$$

Perciò

$$S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_\Gamma) \overset{\text{(D14.6)}}{\leq} \sum_k \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}_k}} |Q_{ij}| \overset{\text{(D14.7)}}{=} \sum_k |Q_k| \overset{\text{(D14.2)}}{<} \varepsilon,$$

ovvero la (D14.4), e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema 14.12 (proprietà di insiemi misurabili), pag. 419

Dobbiamo dimostrare che:

(i) se Γ ha misura nulla e $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ allora Γ_0 ha misura nulla;

(ii) l'unione e l'intersezione di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile;

(iii) se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è limitato, $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ e $\Omega_1 \subseteq \Omega$ è misurabile, allora $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$.

(*i*). Segue immediatamente dal Teorema 14.10.

(*ii*). È sufficiente provare che se A_1 e A_2 sono insiemi misurabili allora $A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2$ sono misurabili (il caso generale segue dalla proprietà associativa dell'unione e dell'intersezione).

Sia quindi $A = A_1 \cup A_2$ oppure $A = A_1 \cap A_2$. Preso $\varepsilon > 0$ e Q tale che $A \subseteq Q$, per $k = 1, 2$ sia $\mathcal{D}_k$ una suddivisione di Q tale che $S(\mathcal{D}_k, \mathbf{1}_{A_k}) - s(\mathcal{D}_k, \mathbf{1}_{A_k}) < \varepsilon/2$; consideriamo la suddivisione $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Essendo $\mathcal{D}$ un raffinamento di $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, si ha $S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_{A_k}) - s(\mathcal{D}, \mathbf{1}_{A_k}) < \varepsilon/2$. Si osserva che

$$S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_A) - s(\mathcal{D}, \mathbf{1}_A) = \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{D}'}} |Q_{ij}| \left(\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_A - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_A \right) = \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}}} |Q_{ij}|,$$

dove

$$\mathcal{R} = \left\{ Q_{ij} : \ Q_{ij} \cap A \neq \emptyset \ \text{ e } \ Q_{ij} \cap \complement A \neq \emptyset \right\}.$$

Si distinguono i due casi.

(I) $A = A_1 \cup A_2$. Se $Q_{ij} \in \mathcal{R}$, allora $Q_{ij} \cap A_1 \neq \emptyset$ oppure $Q_{ij} \cap A_2 \neq \emptyset$; d'altra parte $Q_{ij} \cap \complement A_1 \neq \emptyset$ e $Q_{ij} \cap \complement A_2 \neq \emptyset$. Perciò in ogni caso

$$1 \leq \underbrace{\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_1} + \sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_2}}_{\geq 1} - \underbrace{\inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_1}}_{=0} - \underbrace{\inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_2}}_{=0}.$$

Sommando rispetto a i e j si conclude che

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_A) - s(\mathcal{D}, \mathbf{1}_A) &= \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}}} |Q_{ij}| \\ &\leq \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}}} |Q_{ij}| \left(\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_1} - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_1} + \sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_2} - \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_2} \right) \\ &\leq S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_{A_1}) - s(\mathcal{D}, \mathbf{1}_{A_1}) + S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_{A_2}) - s(\mathcal{D}, \mathbf{1}_{A_2}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

(II) $A = A_1 \cap A_2$. Se $Q_{ij} \in \mathcal{R}$, allora $Q_{ij} \cap A_1 \neq \emptyset$ e $Q_{ij} \cap A_2 \neq \emptyset$; d'altra parte $Q_{ij} \cap \complement A_1 \neq \emptyset$ oppure $Q_{ij} \cap \complement A_2 \neq \emptyset$. Perciò in ogni caso

$$1 \leq \underbrace{\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_1}}_{=1} + \underbrace{\sup_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_2}}_{=1} - \underbrace{\left(\inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_1} + \inf_{Q_{ij}} \mathbf{1}_{A_2} \right)}_{\leq 1}.$$

Sommando rispetto a i e j si conclude come sopra.

(iii). Segue immediatamente dal criterio di integrabilità (Teorema 14.3) utilizzando le seguenti proprietà degli estremi superiore e inferiore: se $\Omega_1 \subseteq \Omega$, allora

$$\sup_{\Omega_1} f \leq \sup_{\Omega} f \quad \text{e} \quad \inf_{\Omega} f \leq \inf_{\Omega_1} f.$$

Dimostrazione del Teorema 14.14 (integrabilità di funzioni continue quasi ovunque), pag. 419

Sia $f : Q = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua in $Q \setminus \Gamma$ con $|\Gamma| = 0$. Dobbiamo dimostrare che $f \in \mathcal{R}(Q)$.

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $|\Gamma| = 0$, per il Teorema 14.10 esiste un numero finito di rettangoli $\tilde{Q}_k$, $k = 1, \ldots, N_\varepsilon$, tali che

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} \tilde{Q}_k \subseteq Q \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |\tilde{Q}_k| < \varepsilon.$$

Consideriamo i rettangoli $Q_k = (2\tilde{Q}_k) \cap Q$, dove $2\tilde{Q}_k$ è il rettangolo che ha lo stesso centro di Q_k e lato pari al doppio di quello di Q_k. In tal modo

$$\Gamma \subseteq B := \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} Q_k \subseteq Q, \quad |B| \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |Q_k| < 4\varepsilon \quad \text{e} \quad \Gamma \cap \overline{Q \setminus B} = \emptyset. \tag{D14.8}$$

Poiché f è continua in $Q \setminus \Gamma$, per la (D14.8) f è uniformemente continua in $\overline{Q \setminus B}$ e quindi in $Q \setminus B$. Perciò esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $(x', y'), (x'', y'') \in Q \setminus B$ con $\|(x', y') - (x'', y'')\| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$.

Prendiamo la suddivisione $\mathcal{D}'$ di Q che si ottiene prendendo su ciascun asse gli estremi di tutti i rettangoli Q_k, e sia $\mathcal{D}_\varepsilon$ un suo raffinamento tale che ogni rettangolo corrispondente, Q_{ij}, verifica

$$|Q_{ij}| < \delta_\varepsilon \quad \text{per ogni} \quad i, j.$$

In tal modo resta individuato un "ricoprimento" di B: ricordando la (D14.3), si ha

$$\mathcal{R}_B := \{Q_{ij} : \ Q_{ij} \cap B \neq \emptyset\}, \quad |B| = \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}_B}} |Q_{ij}| \overset{\text{(D14.8)}}{<} 4\varepsilon.$$

Posto $M = \sup_Q |f|$, risulta allora

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) &= \sum_{i,j} (\sup_{Q_{ij}} f - \inf_{Q_{ij}} f)|Q_{ij}| \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \in \mathcal{R}_B}} (\sup_{Q_{ij}} f - \inf_{Q_{ij}} f)|Q_{ij}| + \sum_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \notin \mathcal{R}_B}} (\sup_{Q_{ij}} f - \inf_{Q_{ij}} f)|Q_{ij}| \\ &\leq 8M\varepsilon + \varepsilon|Q|, \end{aligned}$$

e la tesi segue dal Teorema 14.3.

Dimostrazione del Corollario 14.20 (passaggio in coordinate polari), pag. 429

A meno di una traslazione si può assumere $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Ricordando l'errata corrige, dobbiamo dimostrare che se ψ è definita dalle 14.18, $S \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ è misurabile e limitato ed f è continua e limitata in $\psi(S)$, allora

$$\iint_{\Omega=\psi(S)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi.$$

Consideriamo la restrizione di ψ a $D = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$. In tale insieme, ψ soddisfa le ipotesi del Teorema 14.19; inoltre $S \cap D$ è misurabile e limitato. Quindi

$$\iint_{\psi(S\cap D)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{S\cap D} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi.$$

D'altra parte,

$$S \setminus D \subset (\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup [0, R] \times \{0\},$$

dove R è tale che $S \subseteq B_R(0)$. Quindi $S \setminus D$ è contenuto nell'unione di due segmenti, ovvero ha misura nulla, perciò

$$\iint_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi = \iint_{S\cap D} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi.$$

Analogamente

$$\psi(S) \setminus \psi(S \cap D) \subset \{(x, 0) : \ 0 \leq x \leq R\}$$

ha misura nulla, quindi

$$\iint_{\psi(S\cap D)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{\psi(S)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

15 Dimostrazioni del Capitolo 15

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 15.4, pag. 457 65
Dimostrazione del Teorema 15.12 (bordo di una superficie composta orientabile), pag. 467 65
Dimostrazione del Teorema 15.13 (continuità della normale esterna), pag. 467 67

Dimostrazione del Teorema 15.4, pag. 457

Dobbiamo dimostrare che se Σ è una superficie elementare regolare in un punto $\mathbf{x}_0$ allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{x}_0$ tale che $\Sigma \cap \mathcal{U}$ è il grafico di una funzione differenziabile.

Per le definizioni 15.1 e 15.3 esiste un intorno $\mathcal{U}_0$ di $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e una funzione $\boldsymbol{\sigma} : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^0(\overline{D}) \cap C^1(D)$, iniettiva in D, tale che $\Sigma \cap \mathcal{U} = \boldsymbol{\sigma}(\overline{D})$ e che

$$\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}, \quad (u_0, v_0) = \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{x}_0).$$

Supponiamo per esempio che la terza componente sia non nulla. Denotando le componenti di σ con $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, ciò significa che

$$x_u y_v - y_u x_v = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{in } (u_0, v_0).$$

Perciò la funzione $f : D \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ soddisfa le ipotesi del Teorema 13.1 (di invertibilità locale). Quindi esiste un intorno $\mathcal{V}$ di (u_0, v_0) tale che $f^{-1} : f(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$ è ben definita e differenziabile in $f(\mathcal{V})$; inoltre $f(\mathcal{V})$ contiene un intorno di (x_0, y_0). Utilizzando la differenziabilità delle funzioni composte, si conclude che la funzione $F(x, y) = z(f^{-1}(x, y)) : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ è differenziabile e ha come grafico Σ in un opportuno intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione del Teorema 15.12 (bordo di una superficie composta orientabile), pag. 467

Sia $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_n$ una superficie composta orientabile. Dobbiamo dimostrare che il bordo $\partial\Sigma$ è il sostegno di N curve chiuse $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_N$ tali che il verso di percorrenza di $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i$ coincide con l'orientazione di $\partial\Sigma_j^+$ su $(\mathrm{im}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i) \cap \partial\Sigma_j$.

Data una curva $\boldsymbol{\gamma} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$, chiamiamo *punto iniziale*, rispettivamente *finale*, del suo sostegno i punti $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, rispettivamente $\boldsymbol{\gamma}(t_1)$. Utilizziamo le notazioni delle definizioni 15.10 e 15.11; in particolare, indichiamo con

$$\mathcal{G} = \{\Gamma_{i,p} : \ i = 1, \ldots, n, \ p = 1, \ldots, m_i\}, \tag{D15.1}$$

l'insieme dei sostegni della Definizione 15.10, ciascuno con il verso di percorrenza indotto dalla Definizione 15.11. Facciamo alcune osservazioni.

(1). *Ciascun $\partial\Sigma_i$ è il sostegno una curva semplice e chiusa.*

Ciò è diretta conseguenza del fatto che ciascun Σ_i è una superficie regolare e invertibile (perciò orientabile).

(2). *Se $\Gamma \in \mathcal{G}$ è tale che $\Gamma \subseteq \partial\Sigma$, allora il suo punto iniziale e il suo punto finale non coincidono.*

Altrimenti, per (1), $\partial\Sigma_i = \Gamma = \Gamma_{i,p} \subseteq \partial\Sigma$, mentre per ipotesi ogni superficie elementare Σ_i ha in comune almeno un sostegno con un'altra superficie.

(3). *Se $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{G}$ non coincidono ma hanno lo stesso punto iniziale o lo stesso punto finale, allora appartengono a due distinte superfici elementari.*

Ciò segue immediatamente da (1) e dalla Definizione 15.11.

(4). *Se $\Gamma \in \mathcal{G}$ è tale che $\Gamma \subset \partial\Sigma$ allora, detto $\mathbf{x}$ il suo punto finale, esiste $\Gamma' \in \mathcal{G}$, $\Gamma' \neq \Gamma$, tale che $\Gamma' \subset \partial\Sigma$ e $\mathbf{x}$ è il punto iniziale di Γ'.*

Si ha $\Gamma = \Gamma_{i,p}$ per qualche indice (i, p). Per (2) esiste $\Gamma_{i,q}$ $(q \neq p)$ tale che $\boldsymbol{\gamma}_{i,q}$ non è chiusa e ha $\mathbf{x}$ come punto iniziale. Poniamo $\overline{\Gamma}_0 = \Gamma_{i,q}$ e $\ell_0 = i$. Poniamo inoltre $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_0$.

(a) Distinguiamo due casi:

(a1) Se $\overline{\Gamma} \subset \partial\Sigma$, l'asserto è provato con $\Gamma' = \overline{\Gamma}$.

(a2) Altrimenti per la Definizione 15.10 esiste $\Gamma_{j,r}$ tale che $\Gamma_{j,r} = \overline{\Gamma}$. Per la Definizione 15.11 $\Gamma_{j,r}$ ha $\mathbf{x}$ come punto finale, quindi per (2) si ha $j \neq i$. Inoltre $\boldsymbol{\gamma}_{j,r}$ non è chiusa perché non lo è la parametrizzazione di Γ, mentre $\partial\Sigma_j$ lo è per (1). Perciò esiste $\boldsymbol{\gamma}_{j,s}$ $(s \neq r)$ che ha $\mathbf{x}$ come punto iniziale.

Nel caso (a2) si pone $\overline{\Gamma}_1 = \Gamma_{j,s}$, $\ell_1 = j$ e si torna al passo (a) con $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_1$. Così procedendo restano definite le sequenze $\overline{\Gamma}_\alpha$ e ℓ_α per ogni $\alpha = 1, \ldots, \alpha_0$, dove $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ è tale che $\overline{\Gamma}_\alpha \not\subset \partial\Sigma$ se $0 \leq \alpha < \alpha_0$. Come osservato in (a2),

$$\ell_\alpha \neq \ell_0 = i \text{ per ogni } 1 \leq \alpha \leq \alpha_0 \quad \text{ed} \quad \ell_\alpha \neq \ell_{\alpha-1} \text{ per ogni } 2 \leq \alpha \leq \alpha_0. \tag{D15.2}$$

Proviamo per induzione che

$$\text{se } 2 \leq \alpha \leq \alpha_0, \text{ allora } \ell_\alpha \neq \ell_\beta \text{ per ogni } 1 \leq \beta < \alpha, \tag{D15.3}$$

ovvero che ogni passo seleziona un sostegno che appartiene ad una superficie elementare diversa dalle precedenti. Per $\alpha = 2$ l'affermazione segue immediatamente da (D15.2). Se $\alpha \geq 3$, $\ell_1, \ldots \ell_{\alpha-1}$ sono distinti e per assurdo $\ell_\alpha = \ell_\beta$ per qualche $\beta \in [1, \alpha - 2]$, allora $\overline{\Gamma}_\beta$ appartiene alle tre superfici elementari distinte (per (D15.2)) ℓ_α, $\ell_{\alpha-1}$ ed $\ell_{\beta-1}$. Ciò contraddice la Definizione 15.10 e prova (D15.3).

Da (D15.2) e (D15.3) segue che in al più n passi (n é il numero di superfici elementari) si giunge a verificare il caso (a1), e (4) è dimostrato.

Siamo ora in grado di concludere la dimostrazione. Consideriamo un qualunque sostegno $\Gamma_{i,p} \subset \partial\Sigma$ e sia $\mathbf{x}_0$ il suo punto iniziale. Posto $\Psi_{1,1} = \boldsymbol{\gamma}_{i,p}$, vogliamo costruire una curva chiusa

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1 = \Psi_{1,1} \cup \cdots \cup \Psi_{1,s_1}$$

che soddisfi le proprietà richieste. Applicando (4) con $\Gamma = \mathrm{im}(\Psi_1)$ si ottiene $\Gamma' = \Gamma_{j,s} \in \partial\Sigma$, $\Gamma' \neq \Gamma$, e si pone $\Psi_{1,2} = \boldsymbol{\gamma}_{j,s}$; si applica poi (4) con $\Gamma = \mathrm{im}(\Psi_{1,2})$ ottenendo $\Psi_{1,3}$, e così via. Se $\mathrm{im}(\Psi_{1,k})$ ha $\mathbf{x}_0$ come punto finale abbiamo finito. Altrimenti osserviamo che

$$\Psi_{1,k} \neq \Psi_{1,\ell} \quad \text{per ogni } \ell = 1, \ldots, k - 1. \tag{D15.4}$$

Infatti, se per assurdo $\Psi_{1,k} = \Psi_{1,\ell}$ allora per (3) le due curve parametrizzerebbero due distinte superfici elementari, che è impossibile visto che $\mathrm{im}(\Psi_{1,k}) \subset \partial\Sigma$. Poiché il numero di curve è finito, in un numero di passi si ottiene $\mathbf{x}_0$ come punto finale.

Se $\mathrm{im}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1) = \partial\Sigma$ abbiamo finito. Altrimenti esiste $\Gamma_{i,p} \subset \partial\Sigma \backslash \mathrm{im}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1)$. Poniamo $\Psi_{2,1} = \boldsymbol{\gamma}_{i,p}$ e ripetiamo la costruzione ottenendo $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_2 = \Psi_{2,1} \cup \cdots \cup \Psi_{2,s_2}$. Ragionando come sopra, (3) implica che

$$\Psi_{2,k} \neq \Psi_{1,\ell} \quad \text{per ogni } k = 1, \ldots, s_1 \text{ e ogni } \ell = 1, \ldots, s_2.$$

Quindi ad ogni passo si selezionano sostegni diversi. Poiché essi sono un numero finito, la dimostrazione è conclusa.

Dimostrazione del Teorema 15.13 (continuità della normale esterna), pag. 467

Dobbiamo dimostrare che se $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ è una superficie composta regolare e orientabile, allora è possibile estendere per continuità la funzione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{n}^+(\mathbf{x})$ a Σ'.

Sappiamo già che $\mathbf{n}^+(\mathbf{x})$ è ben definita e continua in Σ_i' per ogni i. Resta perciò da considerare il caso in cui $\mathbf{x} \in \partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j \cap \Sigma'$ per qualche coppia i, j. Poiché $\mathbf{x} \in \Sigma'$ e Σ è regolare, esistono una parametrizzazione regolare $\boldsymbol{\sigma} : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ e un intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{x}$ tali che $\mathbf{x} \in D$ e $\boldsymbol{\sigma}(D) = \Sigma \cap \mathcal{U}$. Sono quindi definiti e continui in $\Sigma \cap \mathcal{U}$ i versori normali $\pm\mathbf{n}_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$. Se per assurdo $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n}^+$ su $\Sigma_i' \cap \mathcal{U}$ e $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{n}^+$ su $\Sigma_j \cap \mathcal{U}$ (o viceversa), allora le porzioni di bordo $\partial\Sigma_i \cap \mathcal{U}$ e $\partial\Sigma_j \cap \mathcal{U}$ sarebbero orientate in modo concorde (poiché una tiene l'interno a sinistra e l'altra a destra). Ciò contraddice la Definizione 15.11 e conclude la dimostrazione.

16 Dimostrazioni del Capitolo 16

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 16.9 (del rotore o di Stokes nello spazio), pag. 480 . . . . **68**

Dimostrazione del Teorema 16.9 (del rotore o di Stokes nello spazio), pag. 480

Proviamo il risultato nel caso più semplice. Anzitutto, supponiamo che

- Σ è una superficie elementare regolare e invertibile.

Sia quindi $\boldsymbol{\sigma} : D \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di Σ. Supponiamo inoltre che:

- $\overline{D}$ è un dominio di Green e $\boldsymbol{\sigma} \in C^2(\overline{D})$.

Dobbiamo dimostrare che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto tale che $\Sigma \subset \Omega$ e $\mathbf{v} = (A, B, C) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^1 in Ω, allora

$$\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle \, \mathrm{d}S = \int_{\partial\Sigma^+} (A \, \mathrm{d}x + B \, \mathrm{d}y + C \, \mathrm{d}z).$$

Per ipotesi $\boldsymbol{\sigma}$ è iniettiva in $\overline{D}$ e tale che

$$\mathbf{n}^+(u, v) = \frac{\boldsymbol{\sigma}_u(u, v) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u, v)}{\|\boldsymbol{\sigma}_u(u, v) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u, v)\|} \neq \mathbf{0} \quad \text{per ogni } \ (u, v) \in D.$$

Per definizione di integrale di superficie (si veda la (15.9))

$$\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle \, \mathrm{d}S = \iint_D \langle \mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \circ \boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma}_u \wedge \boldsymbol{\sigma}_v \rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Osserviamo che

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \Big(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y\Big),$$

e che, posto

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

si ha

$$\boldsymbol{\sigma}_u \wedge \boldsymbol{\sigma}_v = (y_u z_v - y_v z_u, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u).$$

Perciò

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_u \wedge \boldsymbol{\sigma}_v \rangle \quad &= \quad (C_y - B_z)(y_u z_v - y_v z_u) \\
&\quad\; +(A_z - C_x)(z_u x_v - x_u z_v) \\
&\quad\; +(B_x - A_y)(x_u y_v - x_v y_u).
\end{aligned}$$

Consideriamo ad esempio i termini che dipendono C. Si ha

$$\begin{aligned}
N &= C_y(y_u z_v - y_v z_u) - C_x(z_u x_v - x_u z_v) \\
&= -z_u(C_x x_v + C_y y_v) + z_v(C_x x_u + C_y y_u).
\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo $C_z z_u z_v$ si ottiene

$$N = -z_u\,(C \circ \boldsymbol{\sigma})_v + z_v\,(C \circ \boldsymbol{\sigma})_u$$

ovvero, ponendo $\tilde{C} = C \circ \boldsymbol{\sigma}$,

$$N = -z_u \tilde{C}_v + z_v \tilde{C}_u.$$

Aggiungendo e togliendo $\tilde{C} z_{uv}$ si ottiene

$$N = \left(\tilde{C} z_v\right)_u - \left(\tilde{C} z_u\right)_v.$$

Perciò, applicando il Teorema della divergenza si ottiene

$$\iint_D N\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\partial D^+} \tilde{C}(z_u\,\mathrm{d}u + z_v\,\mathrm{d}v) = \int_{\partial \Sigma^+} C\,\mathrm{d}z.$$

Procedendo allo stesso modo per le altre due componenti si conclude la dimostrazione.

17 Dimostrazioni del Capitolo 17

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 17.4 (di Cauchy per edo), pag. 492 . . . . . **70**
Dimostrazione del Teorema 17.5 (esistenza globale), pag. 494 . . . . . . **73**
Dimostrazione del Teorema 17.16 (stabilità per equazioni autonome), pag. 521 . . . . **73**

Dimostrazione del Teorema 17.4 (di Cauchy per edo), pag. 492

Sia $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e localmente lipschitziana rispetto alla secondo variabile y: per ogni rettangolo chiuso e limitato $\mathcal{R} \subset (a,b) \times (c,d)$ esiste $L_{\mathcal{R}}$ tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L_{\mathcal{R}}|y_1 - y_2| \quad \text{se } (x,y_1),(x,y_2) \in \mathcal{R}. \tag{D17.1}$$

Siano $x_0 \in (a,b)$ e $y_0 \in (c,d)$. Dobbiamo dimostrare che esiste un intervallo aperto $I = (a_0, b_0) \subseteq (a,b)$ tale che:

(i) $x_0 \in I$ ed esiste una soluzione $y \in C^1(I)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0; \end{cases} \tag{D17.2}$$

(ii) risulta $y(x) \to c$ oppure $y(x) \to d$ $\begin{cases} \text{per } x \to a_0^+ \text{ se } a_0 > a \\ \text{per } x \to b_0^- \text{ se } b_0 < b; \end{cases}$

(iii) il problema di Cauchy (D17.2) non ha altre soluzioni in I.

Proviamo anzitutto la seguente affermazione:

$$\begin{gathered} \text{esistono } \xi > 0 \text{ e una funzione } y \in C^1([x_0 - \xi, x_0 + \xi]) \\ \text{che verifica (D17.2) in } I = (x_0 - \xi, x_0 + \xi). \end{gathered} \tag{D17.3}$$

Siano $\xi_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ fissati tali che $R_0 = I_0 \times J_0 = [x_0 - \xi_0, x_0 + \xi_0] \times [y_0 - \eta_0, y_0 + \eta_0] \subset (a,b) \times (c,d)$, e siano $M = \max_{R_0} |f|$, $L_0 = L_{R_0}$. Sia inoltre

$$\xi < \min\left\{\varepsilon_0, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L_0}\right\} \tag{D17.4}$$

e $I = [x_0 - \xi, x_0 + \xi]$. Per ogni funzione continua $g : I \to J_0$, la funzione

$$G(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, g(s))\, \mathrm{d}s, \quad x \in I$$

è a sua volta continua in I e verifica

$$|G(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le M\xi \overset{\text{(D17.4)}}{<} \eta_0 \quad \forall x \in I, \tag{D17.5}$$

ovvero $G : I \to J_0$. Perciò, posto $y_0(x) = y_0$, sono ben definite per ricorrenza le funzioni $y_n : I \to J_0$ date da

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s, \quad x \in I. \tag{D17.6}$$

Si ha, per $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
|y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))|\,\mathrm{d}s \\
&\overset{(D17.1)}{\leq} L_0 \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leq L_0\xi\left(\sup_I |y_{n-1} - y_{n-2}|\right) \\
&\overset{(D17.4)}{<} \frac{1}{2}\left(\sup_I |y_{n-1} - y_{n-2}|\right)
\end{aligned}$$

per ogni $x \in I$. Perciò

$$\sup_I |y_n - y_{n-1}| < \frac{1}{2}\sup_I |y_{n-1} - y_{n-2}| < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\sup_I |y_1 - y_0| \overset{(D17.5)}{\leq} \frac{\eta_0}{2^{n-1}}$$

per ogni $n \geq 2$. Da ciò segue che per ogni $x \in I$ la successione $\{y_n(x)\}$ è di Cauchy, quindi convergente: infatti

$$\begin{aligned}
|y_m(x) - y_n(x)| &\leq |y_m(x) - y_{m-1}(x)| + \cdots + |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \\
&< \frac{\eta_0}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{\eta_0}{2^n} < \frac{\eta_0}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{\eta_0}{2^n} \quad \text{per ogni } m > n,\ x \in I.
\end{aligned}$$

Quindi

$$y_n(x) \to y(x) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Inoltre, passando al limite $m \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente risulta

$$\sup_I |y(x) - y_n(x)| \leq \frac{\eta_0}{2^n} \quad \text{per ogni } n,\ x \in I, \tag{D17.7}$$

da cui segue che $y \in C(I)$: infatti, presi $x, x_0 \in I$ e $\varepsilon > 0$, sia n (indipendente da x e x_0!) tale che $\eta_0 2^{-n} < \varepsilon$; allora

$$\begin{aligned}
|y(x) - y(x_0)| &\leq |y(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_n(x_0)| + |y_n(x_0) - y(x_0)| \\
&\overset{(D17.7)}{<} 2\varepsilon + |y_n(x) - y_n(x_0)|
\end{aligned}$$

e la continuità di y in x_0 segue dalla continuità di y_n.

Proviamo ora che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s,$$

(l'integrale a destra è ben definito in quanto $y \in C(I)$). Infatti

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s - \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s\right| &\overset{(D17.1)}{\leq} |x - x_0| L_0 \sup_I |y(x) - y_n(x)| \\
&\overset{(D17.7)}{=} o(1) \quad \text{per } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Passando al limite $n \to +\infty$ nella (D17.6) si conclude che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \quad x \in I$$

da cui segue la (D17.3) per il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Per la (D17.3), sono ben definiti

$$a_0 = \inf\{x \in (a, x_0) : \text{ esiste una soluzione di (D17.2) in } [x, x_0]\} < x_0,$$
$$b_0 = \sup\{x \in (x_0, b) : \text{ esiste una soluzione di(D17.2) in } [x_0, x]\} > x_0.$$

Proviamo la caratterizzazione (*ii*) di b_0 (quella di a_0 è analoga) se $b_0 < b$ (altrimenti non c'è niente da dimostrare). Anzitutto si osserva che

$$\exists \lim_{x \to b_0^-} y(x) = \ell. \tag{D17.8}$$

Se per assurdo ciò è falso, allora per il Teorema ponte esistono due successioni $x'_n \to b_0^-$ e $x''_n \to b_0^-$ tali che $y(x'_n) \to \ell' \in [c, d]$ e $y(x''_n) \to \ell'' \in [c, d]$, $\ell'' > \ell'$. Siano $\ell' < \eta' < \eta'' < \ell''$. Poiché y è continua, per il Teorema dei valori intermedi esistono due successioni $\xi'_n \to b_0^-$ e $\xi''_n \to b_0^-$ con le seguenti proprietà: per ogni $n \geq 1$,

$$\xi'_n < \xi''_n < \xi'_{n+1}, \quad y(\xi'_n) = \eta', \quad y(\xi''_n) = \eta'', \quad y(x) \in [\eta', \eta''] \ \forall\, x \in (\xi'_n, \xi''_n).$$

Posto quindi $M = \sup_{[\xi'_1, b_0]\times[\eta', \eta'']} |f|$, risulta

$$\begin{aligned} +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} (\eta'' - \eta') &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\xi'_n}^{\xi''_n} y'(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\xi'_n}^{\xi''_n} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} M(\xi''_n - \xi'_n) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} (\xi'_{n+1} - \xi'_n) = M(b - \xi'_1) \end{aligned}$$

che è assurdo. Perciò la (D17.8) è vera. Per completare la dimostrazione resta da stabilire che $\ell = c$ o $\ell = d$. Se ciò non è, applicando la (D17.3) si ottiene una soluzione $\tilde{y}$ di (D17.2) con $x_0 = b_0$ e $y_0 = \ell$ definita in $[b_0, b_0 + \delta)$. A questo punto la funzione

$$\bar{y}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} y(x) & x \in (x_0, b_0) \\ \tilde{y}(x) & x \in [b_0, b_0 + \delta) \end{array} \right\}$$

è anch'essa soluzione di (D17.2), in contraddizione con la definizione di b_0.

Resta da dimostrare la parte (*iii*), ovvero l'unicità della soluzione. Siano y_1 e y_2 due soluzioni e siano $\xi > 0$ ed $\eta > 0$ così piccoli che $(x, y_i(x)) \in R = [x_0 - \xi, x_0 + \xi] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subset (a, b) \times (c, d)$. Allora per il Teorema fondamentale del calcolo integrale risulta

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(x, y_2(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leq L_R |x - x_0| \sup_{[x_0 - \xi, x_0 + \xi]} |y_1(x) - y_2(x)| \quad \forall\, x \in [x_0 - \xi, x_0 + \xi], \end{aligned}$$

che per $|x_0 - x|$ sufficientemente piccolo è possibile solo se $y_1 = y_2$. Perciò le due soluzioni coincidono in un intorno di x_0; ripetendo il ragionamento in ogni punto si conclude che y_1 coincide con y_2.

Dimostrazione del Teorema 17.5 (esistenza globale), pag. 494

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e $f : (a,b) \times \mathbb{R}$ che soddisfi le ipotesi del Teorema 17.4. Dobbiamo dimostrare che se esiste $K \in C((a,b))$ tale che

$$|f(x,y)| \le K(x)(1+|y|) \quad \text{per ogni } (x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R},$$

allora l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy (D17.2) è (a,b).

Sia $(a',b') \subseteq (a,b)$ l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Per $x \in J$, sia

$$w(x) = \frac{1}{2} y^2(x).$$

Si ha

$$w'(x) = y(x)y'(x) = yf(x,y(x)),$$

quindi

$$|w'| \le |y|K(1+|y|) = K(|y|+y^2).$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|y| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y^2,$$

quindi

$$|w'| \le K\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2\right) = K\left(\frac{1}{2} + 3w\right) \le 3K(1+w).$$

Da ciò segue che

$$\left|\frac{d}{dx}\log(1+w)\right| = \left|\frac{w'}{1+w}\right| \le 3K.$$

Posto $w_0 = w(x_0) = y_0^2/2$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\left|\log\left(\frac{1+w(x)}{1+w_0}\right)\right| = |\log(1+w(x)) - \log(1+w(x_0))| = \left|\int_{x_0}^{x} \frac{w'(s)}{1+w(s)}\,ds\right|.$$

Se per assurdo $(a',b') \subset (a,b)$, per esempio $b' < b$, per la parte (ii) del Teorema 17.4 si deve avere $|y(x)| \to +\infty$ per $x \to (b')^-$, ovvero $w(x) \to +\infty$ per $x \to (b')^-$. D'altra parte, per la disuguaglianza precedente si ha che per ogni $x_0 < x < b'$

$$\left|\log\left(\frac{1+w(x)}{1+w_0}\right)\right| \le 3(x-x_0)\left(\sup_{(x_0,x)} K(s)\right) \le 3(b'-x_0)\left(\sup_{(x_0,b')} K(s)\right) < +\infty,$$

una contraddizione. Perciò $J = (a,b)$.

Dimostrazione del Teorema 17.16 (stabilità per equazioni autonome), pag. 521

Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $f \in C^1(J)$ e $a \in J$ tale che $f(a) = 0$. Dobbiamo dimostrare che:

(*i*) se esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $f \ge 0$ in $[a-\varepsilon_0, a)$ e $f \le 0$ in $(a, a+\varepsilon_0]$ allora $y = a$ è stabile;

$(i)'$ se esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $f > 0$ in $[a-\varepsilon_0, a)$ e $f < 0$ in $(a, a+\varepsilon_0]$ allora $y = a$ è asintoticamente stabile;

(ii) se esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $f < 0$ in $[a-\varepsilon_0, a)$ oppure $f > 0$ in $(a, a+\varepsilon_0]$, allora $y = a$ è instabile.

Sia $y(t)$ l'unica soluzione di $y' = f(y)$ con dato iniziale $y_0 \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\}$, dove $\delta_0 = \varepsilon_0/2$, e sia $[0, T)$ l'intervallo massimale di esistenza. Per simmetria, è sufficiente provare gli enunciati per $y_0 < a$.

(i). Estendiamo f con continuità a tutto $\mathbb{R}$:

$$f(y) := \begin{cases} f(a-\varepsilon_0) & y < a-\varepsilon_0 \\ f(y) & a-\varepsilon_0 \le y \le a+\varepsilon_0 \\ f(a+\varepsilon_0) & y \ge a+\varepsilon_0 \end{cases}$$

Preso $\varepsilon > 0$, sia $\delta = \min\{\delta_0, \varepsilon\}$ e $y_0 \in (a-\delta, a)$. Poiché $y_0 \in (a-\varepsilon_0, a)$, $y'_+(0) = f(y_0) \ge 0$ e quindi la soluzione è inizialmente crescente. Finché $y(t) \le a$ si ha $y'(t) \ge 0$ e quindi $y(t) \ge y_0 > a-\delta$. Proviamo che $y(t) < a$ per ogni $t \in [0, T)$ supponendo per assurdo che esista $t_0 \in (0, T)$ tale che $y(t_0) = a$. In tal caso, poiché il problema di Cauchy $y' = f(y)$ con dato iniziale $y(t_0) = a$ ammette come unica soluzione globale $\tilde{y} = a$, si ha $y(t) = \tilde{y}(t) = a$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, in contraddizione con $y(0) = y_0 < a$. Perciò $a-\delta < y(t) < a$, ovvero $|y(t)-a| < \delta \le \varepsilon$, per ogni $t \in (0, T)$. Per il Teorema 17.5 di esistenza globale, ciò implica che $T = +\infty$ e prova (i).

(i)'. Se inoltre $f(y) > 0$ in $[a-\varepsilon_0, a)$, allora y è strettamente crescente, perciò $y(t) \to b^-$, $b \in (a-\varepsilon_0, a]$ per $t \to +\infty$. Se per assurdo $b < a$ allora $y'(t) \ge \min_{[a-\varepsilon_0, b]} f > 0$ per ogni $t \in [0, +\infty)$, una contraddizione. Perciò $b = a$ e abbiamo dimostrato $(i)'$.

(ii). Segue dalla Definizione 17.15 che $y = a$ è linearmente instabile se esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $y_{0\delta} \in (a-\delta, a+\delta)$ e $t \in (0, T_{y_{0\delta}})$ tali che $|y(t; y_{0\delta}) - a| = \varepsilon$.

Si ha $y'_+(0) = f(y_0) < 0$, quindi la soluzione è inizialmente decrescente. Perciò $y' \le \min_{[a-\varepsilon_0, y_0]} f < 0$ finché $y(t) \in [a-\varepsilon_0, y_0]$. Quindi esiste $t \in (0, T)$ tale che $y(t) = a-\varepsilon_0$. Poiché ciò vale per qualunque $y_0 \in [a-\delta_0, a)$, la tesi segue scegliendo $\varepsilon = \varepsilon_0$.

18 Dimostrazioni del Capitolo 18

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 18.7 (integrabilità di funzioni complesse continue), pag. 534 75
Dimostrazione del Teorema 18.11 (formula per $f^{(n)}(z)$), pag. 540 76
Dimostrazione del Teorema 18.12 (teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni complesse), pag. 541 78
Dimostrazione del Teorema 18.14 (caratterizzazione integrale delle funzioni olomorfe), pag. 542 79
Dimostrazione del Teorema 18.15 (integrale e derivata di serie di potenze), pag. 543 80
Dimostrazione del Teorema 18.16 (convergenza delle serie di Taylor), pag. 544 81
Dimostrazione del Teorema 18.17 (sviluppo in serie di Laurent), pag. 546 82
Dimostrazione del Teorema 18.20 (Teorema dei residui), pag. 549 84
Dimostrazione del Teorema 18.21 (Lemma di Jordan), pag. 552 85

Dimostrazione del Teorema 18.7 (integrabilità di funzioni complesse continue), pag. 534

Utilizziamo le notazioni del paragrafo 18.3. Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \to \mathbb{C}$ continua e $\boldsymbol{\gamma}$ una curva contenuta in A di classe C^1. Dobbiamo dimostrare che il numero complesso

$$Z = \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(\boldsymbol{\gamma}(t)\boldsymbol{\gamma}'(t))\ \mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}'(t))\ \mathrm{d}t,$$

ha la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione $\mathcal{D} = \{t_0, \dots, t_n\}$ di ampiezza minore di δ e per ogni scelta dei punti $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ risulta

$$|S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) - Z| < \varepsilon,$$

dove

$$S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) := \sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{\gamma}(\tau_i))(\boldsymbol{\gamma}(t_i) - \boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})).$$

Scriviamo $f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = f_1(t) + if_2(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Si ha quindi

$$Z = \underbrace{\int_a^b f_1(t)\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t}_{=Z_1} - \underbrace{\int_a^b f_2(t)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t}_{=Z_2} + i\underbrace{\int_a^b f_1(t)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t}_{=Z_3} + i\underbrace{\int_a^b f_2(t)\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t}_{=Z_4}$$

e

$$S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) = \underbrace{\sum_{i=1}^n f_1(\tau_i)(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))}_{=S_1(\mathcal{D},\{\tau_i\},f)} - \underbrace{\sum_{i=1}^n f_2(\tau_i)(\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))}_{=S_2(\mathcal{D},\{\tau_i\},f)}$$
$$+ i\underbrace{\sum_{i=1}^n f_1(\tau_i)(\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))}_{=S_3(\mathcal{D},\{\tau_i\},f)} + i\underbrace{\sum_{i=1}^n f_2(\tau_i)(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))}_{=S_4(\mathcal{D},\{\tau_i\},f)}.$$

Perciò è sufficiente dimostrare che $|Z_j - S_j(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f)| < \varepsilon/4$ per ogni $j = 1, \dots, 4$. Proviamo solo il caso $j = 1$ (gli altri si trattano allo stesso modo).

Sia $C > 0$ una costante che specificheremo successivamente. Poiché sia f_1 che γ_1' sono continue in $[a, b]$, sono uniformemente continue: quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f_1(t) - f_1(s)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\gamma_1'(t) - \gamma_1'(s)| < C\varepsilon \quad \text{per ogni } t, s \in [a, b] \text{ tali che } |t - s| < \delta.$$

Per il Teorema del valor medio, per ogni i esiste $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tale che

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = \gamma_1'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Perciò

$$|S_1(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) - Z_1| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f_1(\tau_i)\gamma_1'(\xi_i) - f_1(t)\gamma_1'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Sommando e sottraendo $f_1(\tau_i)\gamma_1'(t)$, si ottiene per ogni $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned} |f_1(\tau_i)\gamma_1'(\xi_i) - f_1(t)\gamma_1'(t)| &\le \left(\sup_{[a,b]} |f_1|\right) |\gamma_1'(\xi_i) - \gamma_1'(t)| + \left(\sup_{[a,b]} |\gamma_1'|\right) |f_1(\tau_i) - f_1(t)| \\ &\le \varepsilon \left(\sup_{[a,b]} |f_1| + \sup_{[a,b]} |\gamma_1'|\right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$|S_1(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) - Z_1| \le \varepsilon \left(\sup_{[a,b]} f_1 + \sup_{[a,b]} \gamma_1\right)(b - a).$$

da cui segue la tesi scegliendo $C = \left(4\varepsilon \left(\sup_{[a,b]} |f_1| + \sup_{[a,b]} |\gamma_1'|\right)\right)^{-1}$.

Dimostrazione del Teorema 18.11 (formula per $f^{(n)}(z)$), pag. 540

Sia f olomorfa in A semplicemente connesso. Dobbiamo dimostrare che f è derivabile infinite volte in A e che se $z \in A$ e $\boldsymbol{\gamma}$ è un cammino in A intorno a z orientato positivamente, allora per ogni n risulta

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}w. \tag{D18.1}$$

È sufficiente dimostrare il seguente risultato:

Lemma. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $\boldsymbol{\gamma} \subset A$ una curva di Jordan di classe C^1 orientata positivamente e sia $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua, dove Γ è il supporto di $\boldsymbol{\gamma}$. Allora la funzione $g : A \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$, definita da

$$g(z) = \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^n}\, \mathrm{d}w \quad \text{per} \quad z \in A \setminus \Gamma, \tag{D18.2}$$

è olomorfa in $A \setminus \Gamma$ e

$$g'(z) = n \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}w.$$

Infatti, se f è olomorfa in A allora è continua in Γ e si può scegliere $\varphi = f/(2\pi i)$ e $n = 1$ nella (D18.2). Per la formula integrale di Cauchy $g = f$. Pertanto, applicando il Lemma con $n = 1$ risulta che $f' = g'$ è olomorfa in $A \setminus \Gamma$ e vale la (D18.1) con $n = 1$. Iterando l'applicazione del Lemma rispetto ad n si ottiene che f è derivabile infinite volte in $A \setminus \Gamma$ e vale la (D18.1) per ogni n e ogni $z \in A \setminus \Gamma$. La conclusione segue dall'arbitrarietà della curva.

Nel seguito diamo la dimostrazione del Lemma. Preso $z \in A \setminus \Gamma$, sia $\{z_k\} \subset A \setminus \Gamma$ una successione convergente a z. Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{g(z_k) - g(z)}{z_k - z} = \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\varphi(w)}{z_k - z}\left(\frac{1}{(w - z_k)^n} - \frac{1}{(w - z)^n}\right) \mathrm{d}w.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} I_k &:= \frac{g(z_k) - g(z)}{z_k - z} - n \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}} \mathrm{d}w \\ &= \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \varphi(w) \left[\frac{1}{z_k - z}\left(\frac{1}{(w - z_k)^n} - \frac{1}{(w - z)^n}\right) - \frac{n}{(w - z)^{n+1}}\right] \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Per passare al limite ci si basa su una identità algebrica relativa alla funzione razionale che compare nell'integrale. Ponendo $x = w - z_k$, $y = w - z$ e osservando che $y - x = z_k - z$, si ha

$$\frac{1}{y - x}\left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{y^n}\right) = \frac{y^n - x^n}{(y - x)x^n y^n} = \frac{1}{x^n y^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} y^{n-j} x^j.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \frac{1}{y - x}\left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{y^n}\right) - \frac{n}{y^{n+1}} &= \frac{1}{x^n y^{n+1}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-j} x^j - n x^n\right) \\ &= \frac{1}{x^n y^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} x^j (y^{n-j} - x^{n-j}) \\ &= \frac{1}{x^n y^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} x^j (y - x) \sum_{i=0}^{n-j-1} y^{n-j-1-i} x^i \\ &= (y - x) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} y^{-j-2-i} x^{i+j-n}. \end{aligned}$$

Sostituendo, si trova

$$|I_k| \le |z_k - z| \oint_{\boldsymbol{\gamma}} |\varphi(w)| \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} |w - z|^{-j-2-i} |w - z_k|^{i+j-n} \,\mathrm{d}w.$$

Posti

$$M := \sup_{w \in \boldsymbol{\gamma}} |\varphi(w)| < +\infty, \quad d := \text{distanza}\,(z, \Gamma) = \inf_{w \in \Gamma} |z - w| > 0$$

($d > 0$ poiché Γ è compatto) e scegliendo k tale che $|z - z_k| < \frac{1}{2} d$, si ottiene

$$|w - z| \ge d \quad \text{e} \quad |w - z_k| \ge |w - z| - |z_k - z| > \frac{1}{2} d \quad \text{per ogni} \;\; w \in \Gamma.$$

Di conseguenza, per una opportuna costante $C > 0$ si ha

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-j-1} |w-z|^{-j-2-i}|w-z_k|^{i+j-n} \le Cd^{-n-2}$$

e quindi $|I_k| \le Cd^{-n-2}|z_k - z| \to 0$ per $k \to +\infty$, che conclude la dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 18.12 (teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni complesse), pag. 541

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f : A \to \mathbb{C}$ continua, $z_0 \in A$ e $\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}$ una curva semplice di classe C^1 a tratti con sostegno contenuto in A, con punto iniziale z_0 e punto finale z.

(i) Se per ogni $z \in A$ l'integrale

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w$$

dipende solo da z_0 e z, la funzione

$$F(z) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w$$

è primitiva di f in A.

(ii) Se G è una funzione primitiva di f in A, allora

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w = G(z) - G(z_0).$$

(*i*). Siano $z \in A$ e $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$. Per $|h|$ sufficientemente piccolo il segmento $[z, z+h]$ appartiene ad A, quindi

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_0^1 f(z+ht)h\,\mathrm{d}t$$

dove $w(t) = z + ht$, $0 \le t \le 1$, è una parametrizzazione del segmento tra z e $z+h$ e $w'(t) = h$. Allora

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+ht)h\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z+ht)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (f(z+ht)-f(z))\,\mathrm{d}t\\
&= f(z) + \int_0^1 (f(z+ht)-f(z))\,\mathrm{d}t \to f(z) \quad \text{per} \quad h \to 0
\end{aligned}$$

se

$$\int_0^1 (f(z+ht)-f(z))\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{per} \quad h \to 0.$$

Per la (12.6),

$$\left|\int_0^1 (f(z+ht)-f(z))\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{0\le t\le 1}|f(z+ht)-f(z)| \to 0 \quad \text{per} \quad h\to 0,$$

essendo f continua in z.

(ii). Trattiamo prima il caso particolare in cui A è semplicemente connesso. Poiché G è olomorfa in A, per il Teorema 18.11 anche la sua derivata $f = G'$ lo è. Quindi si può applicare la prima parte del teorema e la funzione

$$z \mapsto F(z) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w$$

è primitiva di f in A. Allora la funzione $h(z) = F(z) - G(z)$ ha derivata h' identicamente nulla in A, da cui segue che h è costante in A (infatti si dimostra facilmente che le parti reale e immaginaria di h, come funzioni di x e y, hanno derivate parziali nulle, quindi sono costanti in A). Allora

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w = F(z) = F(z) - F(z_0) = G(z) - G(z_0).$$

Se A non è semplicemente connesso si può ripetere questo ragionamento se si dimostra che

$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

per ogni curva chiusa e regolare $\boldsymbol{\gamma} \subset A$. Per provare questa affermazione, è sufficiente "tagliare" da $\boldsymbol{\gamma}$ un piccolo arco di curva, diciamo l'arco $\boldsymbol{\gamma}_{z_1,z_2}$, e applicare (*ii*): nel limite $z_2 \to z_1$ si ottiene che

$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(w)\,\mathrm{d}w = \left(\lim_{z_2\to z_1} G(z_2)\right) - G(z_1) = G(z_1) - G(z_1) = 0.$$

Dimostrazione del Teorema 18.14 (caratterizzazione integrale delle funzioni olomorfe), pag. 542

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f : A \to \mathbb{C}$ continua in A. Dobbiamo dimostrare che f è olomorfa in A se e solo se per ogni $z_0 \in A$ esiste un intorno $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ di z_0 tale che

$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

per ogni curva di Jordan di classe C^1 a tratti $\boldsymbol{\gamma}$ con sostegno contenuto in $B_r(z_0)$.

Sia f olomorfa in A, $z_0 \in A$ e $B_r(z_0)$ un intorno di z_0 contenuto in A. Per il Corollario 18.13 applicato in $B_r(z_0)$, f ammette una primitiva F in $B_r(z_0)$; perciò $\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f = 0$ per la parte (*ii*) del Teorema 18.12.

Viceversa, Sia $z_0 \in A$, e sia $B_r(z_0)$ tale che $B_r(z_0) \subset A$ un intorno tale che $\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f = 0$ per ogni curva semplice, chiusa e regolare $\boldsymbol{\gamma} \subset B_r(z_0)$. Ne segue che, per ogni curva $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ contenuta in $B_r(z_0)$, $\int_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} f$ dipende solo dai punti iniziale e finale della curva $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$. Quindi, per la parte (*i*) del Teorema 18.12, f ammette una primitiva F in $B_r(z_0)$. In particolare F è olomorfa in $B_r(z_0)$ e, di conseguenza, anche $f = F'$ lo è. Per l'arbitrarietà di z_0 la tesi è provata.

Dimostrazione del Teorema 18.15 (integrale e derivata di serie di potenze), pag. 543

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{se } |z-z_0| < r.$$

Dobbiamo dimostrare che:

(i) f è continua in $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$;

(ii) per ogni curva semplice di classe C^1 a tratti $\boldsymbol{\gamma}$ con sostegno contenuto in $B_r(z_0)$, risulta

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_{\boldsymbol{\gamma}} (z-z_0)^n\ \mathrm{d}z \right);$$

(iii) f è olomorfa in $B_r(z_0)$ e per ogni $k = 1, 2, \ldots$ la derivata $f^{(k)}(z)$ è somma della serie delle derivate di $a_n(z-z_0)^n$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \quad se\ |z-z_0| < r\,. \tag{D18.3}$$

(*i*). Analoga alla dimostrazione del Teorema 9.19.

(*ii*). Il sostegno Γ di $\boldsymbol{\gamma}$ è un insieme chiuso, quindi esiste $r_1 \in (0, r)$ tale che

$$|z-z_0| \le r_1 \quad \text{per ogni} \quad z \in \Gamma.$$

Perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r_1^n < \varepsilon \quad \text{per ogni } N > N_\varepsilon,\ z \in \Gamma.$$

Allora

$$\left| \int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\boldsymbol{\gamma}} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n \right) \mathrm{d}z \right| = \left| \int_{\boldsymbol{\gamma}} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \right) \mathrm{d}z \right| < \varepsilon L(\boldsymbol{\gamma})$$

per ogni $N > N_\varepsilon$, che è quanto dovevamo dimostrare.

(*iii*). Per la (ii), $\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ su ogni curva chiusa $\boldsymbol{\gamma}$, quindi per la (i) e per il Teorema 18.14, f è olomorfa. La serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

ha anch'essa raggio di convergenza r (il ragionamento è identico a quello svolto nella dimostrazione del Teorema 9.10). Proviamo l'asserto per $n = 1$, ovvero proviamo che $f' = g$. Ripetendo il procedimento k volte si ottiene la formula per $f^{(k)}(t)$.

Sia $\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}(t) = z_0 + t(z-z_0)$, il cui sostegno è il segmento da z_0 a z. Allora applicando (ii) a g risulta

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1} \right) \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) - f(z_0);$$

perciò, per il teorema fondamentale, $f(z)$ è una primitiva di g, ovvero $f' = g$.

Dimostrazione del Teorema 18.16 (convergenza delle serie di Taylor), pag. 544

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $z_0 \in A$ e f olomorfa in A. Dobbiamo dimostrare che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{per ogni } z \in B_r(z_0) \text{ se } B_r(z_0) \subseteq A$$

e che se in un intorno di z_0 risulta $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, allora $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

Sia $0 < \rho < r$, dove r è la distanza tra z_0 e ∂A ($r = +\infty$ se $A = \mathbb{C}$) e sia $\boldsymbol{\gamma}_\rho$ una parametrizzazione regolare della frontiera $\partial B_\rho(z_0)$ del cerchio di centro z_0 e raggio ρ, orientata positivamente. Allora, per la formula integrale di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\gamma}_\rho} \frac{f(w)}{w - z}\, dz \quad \text{per ogni } z \in B_\rho(z_0).$$

Scrivendo

$$\frac{f(w)}{w - z} = f(w) \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{w - z_0}}$$

ed essendo $|z - z_0| < \rho$ e $|w - z_0| = \rho$ per $w \in \Gamma_\rho$, risulta

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1 \quad \text{per ogni } z \in B_\rho(z_0) \text{ e } w \in \partial B_\rho(z_0)$$

e si può applicare la formula per la somma della serie geometrica di ragione $\frac{z - z_0}{w - z_0}$:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n \quad \text{per ogni } z \in B_\rho(z_0) \text{ e } w \in \partial B_\rho(z_0).$$

Allora, supponendo per un momento che si possano scambiare l'integrale e la sommatoria, risulta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\gamma}_\rho} \left(\frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n \right) dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\gamma}_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \end{aligned} \tag{D18.4}$$

e per la formula (18.26) per le derivate di f si conclude che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Infine, se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

per z appartenente a un intorno di z_0, segue dalla parte (*iii*) del Teorema 18.15 che

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)(z - z_0)^{n-k}$$

e perciò
$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k.$$

Resta da giustificare lo scambio di integrale e sommatoria in (D18.4) (non si può utilizzare direttamente il Teorema 18.15 poiché l'integranda non è una serie di potenze, ma il ragionamento è analogo). Per $z \in B_\rho(z_0)$ fissato e $w \in \partial B_\rho(z_0)$,

$$\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n + E_N(w),$$

dove
$$|E_N(w)| = \left|\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\right| \le \frac{1}{\rho}\left(\sup_{\partial B_\rho(z_0)} f\right)\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n\right)$$

quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che
$$|E_N| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad N \ge N_\varepsilon.$$

In conclusione, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che
$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{N}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{\gamma}_\rho}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{\gamma}_\rho} E_N(w)\,\mathrm{d}w\right| \le \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

per ogni $N > N_\varepsilon$; ciò dimostra la (D18.4).

Dimostrazione del Teorema 18.17 (sviluppo in serie di Laurent), pag. 546

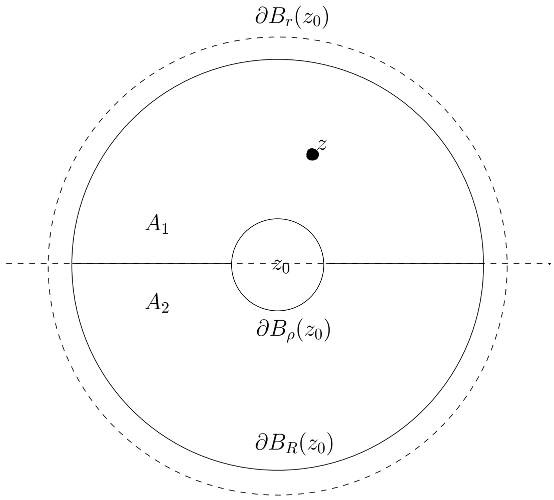
Sia f olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dobbiamo dimostrare che:

a) se $0 < |z - z_0| < r$ e $\boldsymbol{\gamma}$ è un qualunque cammino in $B_r(z_0)$ che circonda z_0, allora
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n := \frac{1}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\gamma}}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w;$$

b) se
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(z-z_0)^n \quad \textit{per } 0 < |z-z_0| < r, \tag{D18.5}$$
allora $d_n = c_n$.

a) Dato $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ e un cammino $\boldsymbol{\gamma}$ in $B_r(z_0)$ intorno a z_0, siano $0 < \rho < R < r$ tali che $z \in A = \{\rho < |z - z_0| < R\}$. Segue dalla (18.23) che
$$\oint_{\partial B_R(z_0)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}dz = \oint_{\partial B_\rho(z_0)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}dz = \oint_{\boldsymbol{\gamma}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}dz. \tag{D18.6}$$

Si "taglia" A con la retta **r** come in Figura.



Applicando la formula integrale di Cauchy (Teorema 18.10) in A_1 si ottiene

$$2\pi i f(z) = \oint_{\partial A_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e applicando il Teorema integrale di Cauchy (Teorema 18.9) in A_2 si ottiene

$$0 = \oint_{\partial A_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Sommando le due espressioni, gli integrali su **r** si cancellano e si ottiene

$$\oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z). \tag{D18.7}$$

Valutiamo i due integrali. Per $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n,$$

dove abbiamo tenuto conto che $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$ su $\partial B_R(z_0)$. Pertanto, ricordando i caratteri di convergenza della serie geometrica e il Teorema 18.15,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\right) (z - z_0)^n . \end{aligned} \tag{D18.8}$$

Se $\zeta \in \partial B_\rho(z_0)$ si procede allo stesso modo tenendo conto che in questo caso si ha $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| <$ 1: pertanto

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n,$$

da cui

$$-\oint_{\partial B_\rho(z_0)} g(\zeta)d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n}}d\zeta\right)(z-z_0)^{-n-1} \tag{D18.9}$$
$$= \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^{n}.$$

In conclusione, combinando le (D18.6)–(D18.9) si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}dz\right)(z-z_0)^{n},$$

che per l'arbitrarietà di z dimostra la rappresentazione in serie di Laurent di f.

b) Osserviamo preliminarmente che

$$\oint_{\partial B_\rho(z_0)} (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0 \text{ se } m \neq -1 \\ 2\pi i \text{ se } m = -1. \end{cases}$$

Infatti, posto $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$

$$\oint_{\partial B_\rho(z_0)} (z-z_0)^m dz = i\rho^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\theta}d\theta$$

da cui le tesi per la periodicità dell'esponenziale. Sia ora $f(z)$ come nella (D18.5). Presa una circonferenza $\partial B_\rho(z_0)$, $0 < \rho < r$, si ha (usando ancora il Teorema 8.15)

$$\oint_{\partial B_\rho(r_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \oint_{\partial B_\rho(z_0)} (\zeta-z_0)^{k-n-1}d\zeta = 2\pi i d_n.$$

Per la (18.23) e il Teorema 18.11

$$\oint_{\partial B_\rho(r_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

ovvero $d_n = c_n$.

Dimostrazione del Teorema 18.20 (Teorema dei residui), pag. 549

Sia f olomorfa nell'insieme aperto e semplicemente connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ con l'eccezione delle singolarità isolate $z_1, \ldots, z_n$. Sia $\boldsymbol{\gamma}$ un cammino in A intorno a $\{z_1, \ldots, z_n\}$ orientato positivamente. Dobbiamo dimostrare che

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f|_{z=z_k}.$$

Sia Γ il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ e sia B l'interno di $\boldsymbol{\gamma}$. Poniamo

$$\begin{aligned} r_1 &= \min\{|z_i - z_j| : i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j\}, \\ r_2 &= \min\{d(z_i, \Gamma) :\ i, 1, \ldots, n\}, \\ r &= \min\{r_1, r_2\}. \end{aligned}$$

In tal modo, per ogni $\rho \in (0, r)$ le curve $\boldsymbol{\gamma}_{\rho,k}(t) = z_k + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ hanno le seguenti proprietà:

(a) $\boldsymbol{\gamma}_{\rho,k}$ è un cammino in B intorno a z_k;

(b) $\overline{B}_\rho(z_i) \cap \overline{B}_\rho(z_j) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

Sia $\Omega = B \setminus \left(\overline{B_\rho(z_1)} \cup \cdots \cup \overline{B_\rho(z_j)}\right)$ e $f = u + iv$. Per le formule di Cauchy-Riemann

$$\iint_\Omega \operatorname{div}(u, -v)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_\Omega (u_x - v_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$$

e

$$\iint_\Omega \operatorname{div}(v, u)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_\Omega (v_x + u_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0.$$

Quindi, per il Teorema della divergenza (Teorema 16.5),

$$\int_{\partial\Omega^+} u\, \mathrm{d}y + v\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Omega^+} v\, \mathrm{d}y - u\, \mathrm{d}x = 0$$

ovvero, ricordando la formula esplicita (18.16) per l'integrale curvilineo,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \int_{\boldsymbol{\gamma}_{\rho,k}} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

e la tesi segue dalla definizione di residuo.

Dimostrazione del Teorema 18.21 (Lemma di Jordan), pag. 552

Siano $a \in \mathbb{R}$, $R_0 > 0$,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0,\ \operatorname{Im} z > -a\}$$

e sia $f : A \to \mathbb{C}$ continua in A tale che

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in A}} f(z) = 0\,.$$

Per $R > R_0$, sia $\boldsymbol{\gamma}_R$ una parametrizzazione regolare dell'arco di cerchio di raggio R contenuto in $\overline{A}$ (si veda Figura 18.12 (a)). Dobbiamo dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ risulta

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z) e^{i\lambda z}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

Siano $R > R_0$ e $A_R := \{z \in A : |z| \geq R\}$. Dalle ipotesi su f segue immediatamente che

$$M_R := \max_{z\in A_R} |f(z)| \to 0 \quad \text{per } R \to +\infty.$$

Posto $\alpha_R := \arcsin(\frac{a}{R})$, la curva $\boldsymbol{\gamma}_R$ è parametrizzata da

$$\boldsymbol{\gamma}_R = Re^{i\varphi} = R\cos\varphi + iR\sin\varphi, \quad -\alpha_R < \varphi < \alpha_R + \pi.$$

Lungo $\boldsymbol{\gamma}_R$ risulta $|e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda R\cos\varphi}||e^{-\lambda R\sin\varphi}| = |e^{-\lambda R\sin\varphi}|$ e $|\boldsymbol{\gamma}'_R(z)| = R$. Perciò, utilizzando la simmetria della funzione $\sin\varphi$ rispetto a $\frac{\pi}{2}$ risulta

$$\begin{aligned}\left|\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)e^{i\lambda z}\, \mathrm{d}z\right| &\leq M_R \int_{-\alpha_R}^{\alpha_R+\pi} e^{-\lambda R\sin\varphi} R\, \mathrm{d}\varphi = 2M_R \int_{-\alpha_R}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\varphi} R\, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2M_R\left(\int_{-\alpha_R}^{0} e^{-\lambda R\sin\varphi} R\, \mathrm{d}\varphi + \int_{-\alpha_R}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\varphi} R\, \mathrm{d}\varphi\right).\end{aligned}$$

Osservando che

$$\sin\varphi \geq \varphi \ \text{ se } \ \varphi \leq 0 \quad \text{e} \quad \sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi \ \text{ se } \ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z\right| &\leq 2M_R\left(\int_{-\alpha_R}^{0} e^{-\lambda R\varphi}R\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\frac{2}{\pi}\varphi}R\,\mathrm{d}\varphi\right)\\
&\leq 2M_R\left(\left[-\frac{e^{-\lambda R\varphi}}{\lambda}\right]_{-\alpha_R}^{0} + \left[-\frac{\pi e^{-\lambda R\frac{2}{\pi}\varphi}}{2\lambda}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&\leq 2M_R\left(\frac{e^{\lambda R\arcsin\frac{a}{R}}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{\pi e^{-\lambda R}}{2\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Poiché $R\arcsin\frac{a}{R}$ è limitato per $R \to +\infty$, la quantità in parentesi è limitata per $R \to +\infty$ e il lemma di Jordan è dimostrato. Si noti che se $\alpha_R < 0$ (ovvero se $a < 0$) la stima dell'integrale nell'intervallo $[0, -\alpha_R]$ diviene superflua.

19 Dimostrazioni del Capitolo 19

Ultimo aggiornamento: settembre 2011

Indice

Dimostrazione del Teorema 19.2 (olomorfia della trasformata di Laplace), pag. 558 . . . . **87**
Dimostrazione del Teorema 19.3 (antitrasformata di Laplace), pag. 559 **88**
Dimostrazione del Teorema 19.7 (originale di una serie di Laurent), pag. 571 . . . . **89**

Dimostrazione del Teorema 19.2 (olomorfia della trasformata di Laplace), pag. 558

Dobbiamo dimostrare che la trasformata di Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f]$ di f con ascissa di convergenza $a < +\infty$ è olomorfa nel semipiano $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a\}$ e

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} xe^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fissato p, verifichiamo che

$$\begin{aligned} I(h) &:= \frac{F(p+h)-F(p)}{h} + \int_0^{+\infty} xe^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-hx}-1}{hx} + 1\right) xe^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{per } h \to 0 \ (h \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Osserviamo preliminarmente che, poiché $\operatorname{Re} p > a$, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $p' = p - 2\delta > a$. Non è restrittivo supporre nel seguito che $|h| < \delta$. Infine, poniamo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{e^{-z}-1}{z} + 1 & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Ricordando che $(e^z - 1)/z \to 1$ per $z \to 0$, risulta $g \in C(\mathbb{C})$ e $I(h)$ si riscrive come

$$I(h) = \int_0^{+\infty} g(hx) xe^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proviamo anzitutto che, detta C una opportuna costante che specificheremo in seguito, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K > 0$ tale che

$$\left| \int_K^{+\infty} g(hx) xe^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq C\varepsilon \quad \text{per ogni } |h| < \delta. \tag{D19.1}$$

Si ha

$$|g(hx)| \leq \begin{cases} M := \sup\limits_{|z|<1} |g(z)| & \text{se } |hx| < 1 \\ 1 + \frac{|e^{-hx}-1|}{|hx|} \leq 2 + e^{|hx|} & \text{se } |hx| \geq 1. \end{cases}$$

Perciò in ogni caso

$$|g(z)| \leq M + 2 + e^{|hx|} \leq (M+2)e^{|hx|} \leq (M+2)e^{\delta x}$$

e quindi

$$\left| \int_K^{+\infty} g(hx) x e^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le (M+2) \left(\sup_{x\in(K,+\infty)} x e^{-\delta x} \right) \int_K^{+\infty} |e^{-(p-2\delta)x} f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\le C\varepsilon,$$

avendo scelto $C = (M+2)\int_0^{+\infty} |e^{-p'x} f(x)|\,\mathrm{d}x$ e K tale che $\sup_{x\in(K,+\infty)} x e^{-\delta x} < \varepsilon$. Ciò prova la (D19.1). D'altra parte, per ogni $K > 0$ esiste $h_0 > 0$ tale che

$$\left| \int_0^K g(hx) x e^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon. \tag{D19.2}$$

Infatti la funzione integranda è continua rispetto ad $(h, x) \in [-\delta, \delta] \times [0, K]$, quindi ragionando come nella dimostrazione del Teorema 11.9 si può passare al limite sotto integrale:

$$\lim_{h\to 0} \int_0^K g(hx) x e^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^K \left(\lim_{h\to 0} g(hx) \right) x e^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

da cui segue la (D19.2) per definizione di limite.

Combinando la (D19.1) e la (D19.2) si conclude che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_\varepsilon = \min\{h_0, \delta\}$ tale che $|I(h)| < 2\varepsilon$ per ogni $|h| < h_\varepsilon$, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema 19.3 (antitrasformata di Laplace), pag. 559

Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, localmente integrabile in $[0, +\infty)$, tale che

$$|f(x)| \le M e^{s_0 x} \quad \text{se } x \ge 0\,. \tag{D19.3}$$

Siano $a_0 > s_0$ e $F(p) = \mathcal{L}[f]$ se $\mathrm{Re}\, p > s_0$. Dobbiamo dimostrare che

$$\text{v.p.}\ \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} F(p) e^{px}\,\mathrm{d}p = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \text{ e } f \text{ è continua in } x \\ 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases} \tag{D19.4}$$

Estendiamo f a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(x) = 0$ se $x < 0$. Dobbiamo calcolare, fissato $x \ne 0$ tale che f è continua in x,

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} F(a+it) e^{(a+it)x}\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} e^{(a+it)x} \lim_{M\to+\infty} \left(\int_0^M e^{-(a+it)s} f(s) \right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 11.9, è possibile dimostrare che si possono scambiare tra loro le operazioni di limite e di integrale. Perciò

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} F(a+it) e^{(a+it)x}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \int_0^M e^{(a+it)(x-s)} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Si ha

$$\begin{aligned} I(b,M) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} e^{(a+it)x}\int_{0}^{M} e^{(a+it)(x-s)} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{M} f(s)\int_{-b}^{b} e^{(a+it)(x-s)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{M} f(s)e^{a(x-s)}\left.\frac{e^{it(x-s)}}{i(x-s)}\right|_{t=-b}^{t=b}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{M}\frac{1}{x-s}f(s)e^{a(x-s)}\sin(b(x-s))\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Ponendo $y = -b(x-s)$ si ottiene

$$I(b,M) = \frac{1}{\pi}\int_{-bx}^{b(x+M)} f\left(x+\frac{y}{b}\right)e^{-\frac{ay}{b}}\frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Passando al limite per $M \to +\infty$ si ottiene

$$I(b) := \lim_{M\to+\infty} I(b,M) = \frac{1}{\pi}\int_{-bx}^{+\infty} f\left(x+\frac{y}{b}\right)e^{-\frac{ay}{b}}\frac{\sin y}{y}\,dy,$$

che è ben definita per l'ipotesi di crescita su f. Passando al limite in modo formale per $b \to +\infty$ si ottiene

$$\lim_{b\to+\infty} I(b) = \begin{cases} f(x)\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ovvero, ricordando l'Esempio 18.19,

$$\lim_{b\to+\infty} I(b) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \tag{D19.5}$$

da cui la tesi. Per giustificare rigorosamente il limite (D19.5) si procede come nell'Esempio 18.19, utilizzando il Lemma di Jordan e il Teorema dei residui; omettiamo i dettagli.

Dimostrazione del Teorema 19.7 (originale di una serie di Laurent), pag. 571

Sia $F(p)$ una funzione olomorfa per $|p| > R$ con uno sviluppo in serie di Laurent del tipo

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p^{-k} \quad \text{per} \quad |p| > R. \tag{D19.6}$$

Dobbiamo dimostrare che la funzione

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}z^{k-1}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$ e che $\mathcal{L}[Hf] = F(p)$.

Posto $q = \frac{1}{p}$ e

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k \quad \text{se} \quad |q| < \frac{1}{R},$$

si ha che G è olomorfa per $|q| < 1/R$. Siano $\rho > R$ e $M = \max\{|G(q)| : \ |q| = \frac{1}{\rho}\}$. Poiché la serie è assolutamente convergente per $q = 1/\rho$, si ha in particolare

$$|c_k| \leq M\rho^k.$$

Di conseguenza

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{|z|^{k-1}}{(k-1)!} \leq M\rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho|z|)^{k-1}}{(k-1)!} = M\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho|z|)^n}{n!} = M\rho e^{\rho|z|}.$$

Ciò prova che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k z^{k-1}}{(k-1)!}$ converge assolutamente in $\mathbb{C}$ e la sua somma, $f(z)$, è una funzione olomorfa. Inoltre, poiché $|f(x)| \leq M\rho e^{\rho x}$ per $x \geq 0$, $H(x)f(x)$ è originale per la trasformata di Laplace. Infine, per Re p sufficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-px} \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \left(\int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-px}\,\mathrm{d}x \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{p^k} = Y(p)
\end{aligned}$$

(lo scambio tra serie e integrale improprio può essere giustificato rigorosamente, ma omettiamo i dettagli).