Esercizi di Analisi Matematica 2

Lucio Demeio
Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche
Università Politecnica delle Marche

1. Usando le trasformata di Laplace, calcolare il valore degli integrali:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}\,x} \, \sin^2 x \, \cos x \, dx$$

$$\text{(b)} \int_0^{+\infty} e^{-2\,x} \, \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\text{(c)} \int_0^{+\infty} t \, e^{-4t} \, \sin t \, dt$$

$$\text{(d)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1-\cos t}{t} \, dt$$

Soluzione. (a) Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}\,x} \, \sin^2 x \, \cos x \, dx = \mathcal{L}\left[\sin^2 x \, \cos x\right](\sqrt{3}).$$

Notiamo innanzitutto che

$$\sin^2 x \, \cos x = \frac{1}{4}\left(\cos x - \cos 3x\right)$$

e quindi

$$\mathcal{L}\left[\sin^2 x \, \cos x\right](s) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{L}\left[\cos x\right](s) - \mathcal{L}\left[\cos 3x\right](s)\right\} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+9}\right)$$

Sostituendo otteniamo

$$\mathcal{L}\left[\sin^2 x \, \cos x\right](\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8\sqrt{3}}$$

(b) Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\,x} \, \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx = \mathcal{L}\left[\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)\right](2).$$

Notiamo innanzitutto che

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}$$

e quindi

$$\mathcal{L}\left[\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right](s) = \frac{1}{2}\,\{\mathcal{L}\,[\,1\,](s) - \mathcal{L}\,[\,\cos x\,](s)\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

Sostituendo otteniamo

$$\mathcal{L}\left[\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right](2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{20}$$

(c) Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-4t}\,\sin t\,dt = \mathcal{L}\,[\,t\,\sin t\,](4).$$

Ricordiamo innanzitutto che

$$\mathcal{L}\,[\,t\,f(t)\,](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\,[\,f(t)\,](s)$$

e quindi

$$\mathcal{L}\,[\,t\,\sin t\,](s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,[\,\sin t\,](s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,[\,\sin t\,](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \left(\frac{2\,s}{(s^2+1)^2}\right)$$

Sostituendo otteniamo

$$\mathcal{L}\,[\,t\,\sin t\,](4) = \frac{8}{(17)^2} = \frac{8}{289}$$

(d) Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1-\cos t}{t}\,dt = \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right](1).$$

Ricordiamo innanzitutto che

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty}\mathcal{L}\,[\,f(t)\,](\xi)\,d\xi$$

e quindi

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty}\mathcal{L}\,[\,1-\cos t\,](\xi)\,d\xi = \int_s^{+\infty}(\mathcal{L}\,[\,1\,] - \mathcal{L}\,[\,\cos t\,])(\xi)\,d\xi$$
$$= \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{\xi^2+1}\right) = \lim_{b\to\infty}\int_s^b\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{\xi^2+1}\right)\,d\xi = \frac{1}{2}\,\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$$

Sostituendo otteniamo

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right](1) = \frac{1}{2}\,\ln 2$$

2. Determinare la trasformata di Laplace delle funzioni

$$f(t) = t\,\sin t$$
$$f(t) = (e^2+\cos t)^2$$
$$f(t) = e^{-t/2}\,\cosh 3t$$

3. Determinare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = \begin{cases} (1+t)^2, & 0 < t < 1 \\ 1+t^2, & t \geq 1 \end{cases}$$

e determinare per quali valori di s è definita.

4. Verificare che

$$\int_0^{2\pi} e^{-s\,t} \sin t dt = (1 - e^{-2\pi s})\, \mathcal{L}[\sin t](s)$$

5. Determinare le antitrasformate di Laplace delle funzioni

$$\tilde{f}(s) = \frac{3\,s+7}{s^2 - 2\,s - 3}$$
$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$$
$$\tilde{f}(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$
$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s\,(s^2+4)}$$
$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

6. Usando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 2\,y'(t) - 8\,y(t) = f(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(t) - 2\,y'(t) + 5\,y(t) = f(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

con *(i)* $f(t) = t^2 + t - 1$; *(ii)* $f(t) = 2\,\cos t - 3\sin t$; *(iii)* $f(t) = e^t - 2e^{-2t}$