Esercizi di Analisi Complessa con Soluzioni

Flavia Lanzara

Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"
Sapienza Università di Roma

A.A. 2008-2009

Indice

1 Gli Esercizi **3**
1.1 Numeri Complessi e Funzioni Olomorfe 3
1.1.1 3
1.1.2 3
1.1.3 3
1.1.4 3
1.1.5 3
1.1.6 3
1.1.7 3
1.1.8 4
1.1.9 4
1.1.10 4
1.1.11 4
1.1.12 4
1.1.13 4
1.1.14 4
1.2 Campo di olomorfia e integrali curvilinei 4
1.2.1 4
1.2.2 4
1.2.3 5
1.2.4 5
1.2.5 5
1.2.6 5
1.2.7 5
1.2.8 5
1.2.9 6
1.2.10 6
1.3 Teoremi di Cauchy 6
1.3.1 6
1.3.2 6
1.3.3 7
1.3.4 7
1.3.5 7
1.3.6 7
1.3.7 8
1.3.8 8
1.4 Integrali 8
1.4.1 8
1.4.2 8

1.4.3 8
1.4.4 9
1.4.5 9
1.4.6 9
1.4.7 9
1.4.8 9
1.4.9 10
1.5 Serie 10
1.5.1 10
1.5.2 10
1.5.3 10
1.5.4 11
1.5.5 11
1.5.6 11
1.5.7 11
1.5.8 11
1.5.9 12
1.5.10 12
1.6 Singolarità isolate 12
1.6.1 12
1.6.2 12
1.6.3 12
1.6.4 12
1.6.5 13
1.6.6 13
1.6.7 13
1.6.8 13
1.6.9 13
1.6.10 13
1.6.11 14
1.7 Singolarità isolate 2 14
1.7.1 14
1.7.2 14
1.7.3 14
1.7.4 15
1.7.5 15
1.8 Teorema dei Residui 15
1.8.1 15
1.8.2 16
1.8.3 16
1.8.4 16

1.8.5 16
1.8.6 17
1.8.7 17
1.8.8 17
1.8.9 17
1.9 Ancora Integrali 17
1.9.1 17
1.9.2 17
1.9.3 18
1.9.4 18
1.9.5 18
1.9.6 18
1.9.7 18
1.9.8 18
1.9.9 19
1.9.10 19
1.9.11 19
1.9.12 19
1.9.13 19
1.10 Prodotti infiniti 20
1.10.1 20
1.10.2 20
1.10.3 20
1.10.4 20
1.10.5 21

2 Le Soluzioni **22**
2.1 Numeri Complessi e Funzioni Olomorfe 22
2.1.1 22
2.1.2 22
2.1.3 22
2.1.4 23
2.1.5 23
2.1.6 23
2.1.7 26
2.1.8 26
2.1.9 26
2.1.10 27
2.1.11 27
2.1.12 27
2.1.13 28

2.1.14 28
2.2 Campi di olomorfia e integrali curvilinei 28
2.2.1 28
2.2.2 29
2.2.3 29
2.2.4 30
2.2.5 31
2.2.6 31
2.2.7 32
2.2.8 33
2.2.9 34
2.2.10 34
2.3 Teoremi di Cauchy 35
2.3.1 35
2.3.2 36
2.3.3 37
2.3.4 37
2.3.5 39
2.3.6 39
2.3.7 41
2.3.8 42
2.4 Integrali 42
2.4.1 42
2.4.2 43
2.4.3 44
2.4.4 46
2.4.5 47
2.4.6 47
2.4.7 48
2.4.8 48
2.4.9 49
2.5 Serie 49
2.5.1 49
2.5.2 54
2.5.3 58
2.5.4 59
2.5.5 60
2.5.6 61
2.5.7 63
2.5.8 64
2.5.9 65

2.5.10 65
2.6 Singolarità isolate 66
2.6.1 66
2.6.2 67
2.6.3 67
2.6.4 68
2.6.5 69
2.6.6 69
2.6.7 71
2.6.8 72
2.6.9 73
2.6.10 74
2.6.11 74
2.7 Singolarità isolate 2 75
2.7.1 75
2.7.2 76
2.7.3 77
2.7.4 82
2.7.5 84
2.8 Teorema dei Residui 85
2.8.1 85
2.8.2 88
2.8.3 89
2.8.4 90
2.8.5 91
2.8.6 92
2.8.7 93
2.8.8 93
2.8.9 94
2.9 Ancora Integrali 95
2.9.1 95
2.9.2 95
2.9.3 95
2.9.4 96
2.9.5 97
2.9.6 98
2.9.7 99
2.9.8 100
2.9.9 102
2.9.10 104
2.9.11 106

2.9.12 . . . 107
2.9.13 . . . 107
2.10 Prodotti Infiniti . . . 108
2.10.1 . . . 108
2.10.2 . . . 110
2.10.3 . . . 113
2.10.4 . . . 114
2.10.5 . . . 115

1 Gli Esercizi

1.1 Numeri Complessi e Funzioni Olomorfe

1.1.1

Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana:

$$(1+i)^8, \quad (2+3\,i)^3$$

1.1.2

Calcolare $\sqrt[4]{-1}$.

1.1.3

Calcolare le radici seste dell'unità.

1.1.4

Calcolare $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)\right)^{40}$

1.1.5

Determinare le soluzioni delle equazioni $\bar{z}^{n+1} = 2^{n-1}\,z$.

1.1.6

Determinare l'insieme dei punti del piano complesso definiti dalle relazioni:

$$|z-3i|<2; \qquad \mathrm{Re}\frac{z+i}{z-i}=0; \qquad \mathrm{Im}\frac{z+i}{z-i}=0;$$

$$|z-1|+|z+1|=4; \quad ||z-1|-|z+1||=4; \quad \pi/6<\arg(z-i)<\pi/4;$$

$$|z|-\mathrm{Re}(z)=3; \qquad |z|<\arg z+\pi; \qquad \mathrm{Re}z<\mathrm{Im}z.$$

1.1.7

Stabilire il comportamento delle successioni

$$\frac{i^n}{n}; \quad \frac{(-1)^n n}{n+i}; \quad \frac{n^2+i\,n}{n^2+1}.$$

1.1.8

Verificare che le seguenti funzioni non soddisfano la condizione di Cauchy-Riemann:

$$f(z) = \overline{z}; \quad f(z) = \Im(z); \quad f(z) = \Re(z).$$

1.1.9

Verificare se le seguenti funzioni soddisfano la condizione di Cauchy-Riemann: $f(z) = z^3 + i\bar{z}; \quad g(z) = \overline{z^2 + 5z}; \quad h(z) = \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{\bar{z}}$.

1.1.10

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un campo connesso e sia f olomorfa in A. Dimostrare che se f assume solo valori reali allora f è costante.

1.1.11

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un campo connesso e sia f olomorfa in A. Dimostrare che se f ha modulo costante in A allora f è costante.

1.1.12

Dimostrare che se $f(z) \in H(A)$, con $A \subset \mathbb{C}$ aperto connesso, e $f'(z) = 0$ identicamente in A allora $f(z)$ è costante.

1.1.13

Dimostrare che $f(z) = |z^2|$ non è olomorfa in $\mathbb{C}$.

1.1.14

Dimostrare che se $f(z) \in H(\mathbb{C})$ allora $\overline{f(\bar{z})} \in H(\mathbb{C})$.

1.2 Campo di olomorfia e integrali curvilinei

1.2.1

Dimostrare che

$$\frac{1}{2}|\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}| \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2}|e^y + \mathrm{e}^{-y}|$$

1.2.2

Determinare $|\sin z|^2$.

1.2.3

Determinare insieme di definizione, insieme di continuità e campo di olomorfia delle seguenti funzioni:

$$\frac{\sin(z)+1}{i+3z}; \qquad \frac{1}{\cosh(z)+\mathrm{e}^z}; \qquad \frac{1}{1+\mathrm{e}^z}; \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{iz}+\cos z}; \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}}.$$

1.2.4

Determinare tutti i valori di

$$2\,\mathrm{Log}\,(1-i);\ \mathrm{Log}\,(\sqrt{3}+i);\ \mathrm{Log}\,(4\,i);\ \mathrm{Log}\,(4-4i);\ \mathrm{Log}\,(5).$$

1.2.5

Determinare tutti i possibili valori che la potenza $(-1)^{-i}$ può assumere al variare della determinazione dell'argomento.

1.2.6

Determinare il valore di $\arctan(2-i)$.

1.2.7

Determinare il campo di olomorfia delle seguenti funzioni:

$$\log z^4; \qquad \sqrt{z^2-4}; \qquad i\sqrt{4-z^2}; \quad \log\left(\frac{1+2iz}{1-2iz}\right);$$

$$\log\left(\frac{2-z}{2+z}\right); \quad \sqrt{1+2z^2}; \quad \sqrt[3]{1+\frac{z-i}{z+i}}; \qquad \log(-1+\sqrt{1+z^3})$$

dove si è scelta la determinazione principale del logaritmo e della radice.

1.2.8

Calcolare, applicando la definizione,

$$\int_{+\gamma} \bar{z}\,dz$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa nel verso antiorario.

1.2.9

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z}{\bar{z}}\, dz$$

dove γ è costituita dalla semicirconferenza $|z| = 1$ con $\mathrm{Im} z > 0$ e dal segmento dell'asse x compreso tra -1 e 1, percorsa in verso antiorario.

1.2.10

Calcolare

$$\int_{+\gamma} (z - \bar{z})^2\, dz$$

dove γ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ percorso nel verso antiorario.

1.3 Teoremi di Cauchy

1.3.1

Calcolare, con i teoremi integrali di Cauchy, i seguenti integrali:

$$\int_{+\partial D} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z - \pi i/2}\, \mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad D = \{z \in \mathbb{C} :\ |\mathrm{Re}(z)| \leq 3;\ |\mathrm{Im}(z)| \leq 3\};$$

$$\int_{+\partial D} \frac{\cos(z)}{z(z^2 + 8)}\, \mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad D = \{z \in \mathbb{C} :\ |\mathrm{Re}(z)| \leq 2;\ |\mathrm{Im}(z)| \leq 2\};$$

$$\int_{+\partial D} \frac{z}{2z + 1}\, \mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}.$$

Il verso positivo di percorrenza è quello antiorario.

1.3.2

Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$. Calcolare

$$\int_{+\partial D} \frac{\cosh(z)}{z^4}\, dz.$$

Il verso positivo di percorrenza è quello antiorario.

1.3.3

Sia f una funzione olomorfa in un aperto connesso A, tale che

$$|f^2 - 1| < 1.$$

Dimostrare che $\mathrm{Re}(f)$ ha segno costante in A.

1.3.4

Calcolare, con i teoremi integrali di Cauchy, i seguenti integrali:

$$\int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z(z+1)}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z-1| = 3/2;$$

$$\int_{+\gamma} \frac{\sin(\pi\, z)}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z-1| = 1;$$

$$\int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{z^4}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z| = 1;$$

$$\int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^{z}}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z+1| = 3.$$

Il verso positivo di percorrenza è quello antiorario.

1.3.5

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_{+\gamma} \frac{\cos^n z}{z - 2\,\pi}\,dz, \ n = 0, 1, 2, ...$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 8, percorsa nel verso antiorario.

1.3.6

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\,dz$$

dove γ è la ciconferenza, percorsa nel verso antiorario, di centro $(3, 0)$ e raggio

a) 1; **b**) 4; **c**) 6.

1.3.7

Calcolare
$$\int_{+\gamma} \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}\,dz$$
dove γ è la circonferenza $|z|=3$, percorsa nel verso antiorario.

1.3.8

Dati $A, B, C \in \mathbb{C}$, calcolare i seguenti integrali:
$$\int_{+\gamma} \frac{A+Bz+Cz^2}{z^n}\,dz, \qquad n=0,1,2...$$
dove γ è la circonferenza $|z|=\rho>0$, percorsa nel verso antiorario.

1.4 Integrali

1.4.1

Calcolare il seguente integrale:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\cos(bx)dx,\ a>0,\ b>0.$$
Suggerimento: Integrare la funzione $\exp(-az^2)$ lungo la frontiera del rettangolo
$$D=\{z\in\mathbb{C}: \qquad -R\le \mathrm{Re}(z)\le R, \quad 0\le \mathrm{Im}(z)\le \frac{b}{2a}\}.$$

1.4.2

Per $\xi\in\mathbb{R}$, calcolare
$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2}dx.$$
Suggerimento: Integrare la funzione $\exp(-z^2)$ lungo la frontiera del rettangolo di vertici $-R$, R, $R+i\xi$, $-R+i\xi$.

1.4.3

Calcolare i seguenti integrali:
$$I_1(\alpha)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2\cos(2\alpha)}\cos(x^2\sin(2\alpha))dx;$$

$$I_2(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2\cos(2\alpha)} \sin(x^2 \sin(2\alpha))dx, \;\; 0 < \alpha < \pi/4.$$

Suggerimento: Integrare la funzione e^{-z^2} lungo il contorno di un settore circolare di ampiezza α e centro 0, situato nel primo quadrante.

1.4.4

Determinare tutte le funzioni $g(x)$ tali che $u(x,y) = g(x)e^y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$. In corrispondenza di una scelta di $g(x)$, determinare $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re} f = u$.

1.4.5

Sia $u(x,y) = e^{2y}(2\sin^2 x - 1)$. Verificare che u è armonica in $\mathbb{R}^2$ e determinare una funzione v armonica coniugata di u.

1.4.6

Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \cos x\,(e^{ay} + e^{-y})$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Trovare tali funzioni f.

1.4.7

Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = e^{ax} \cos y \, \sin y$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Trovare tali funzioni f.

1.4.8

Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = a\,x^2 + y^2$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Determinare tali funzioni.

1.4.9

Calcolare l'integrale
$$\int_\gamma (6z^5 + 7z^6)\, dz$$
con γ una curva regolare del piano complesso di punto iniziale $1+i$ e punto finale $2-i$.

1.5 Serie

1.5.1

Studiare il comportamento delle seguenti serie di potenze nella chiusura del loro campo di convergenza:

$$\text{a)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{2^k}; \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k; \qquad \text{c)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+3)^k}{(k+1)2^k};$$

$$\text{d)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{\sqrt{k}} z^k}{k}; \qquad \text{e)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} z^{2k}}{2k}; \qquad \text{f)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k! z^k}{k^k};$$

$$\text{g)}\ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(k-2)! z^k}{k^k}; \quad \text{h)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} [1-(-2)^k] z^k; \quad \text{i)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k^2} z^k,\ 0<a<1.$$

1.5.2

Studiare il comportamento delle seguenti serie di potenze nella chiusura del loro campo di convergenza:

$$a) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{1 - \cos\left[\frac{\pi}{2(k+1)}\right]\right\} z^{2k}; \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[(k+1)(2z+i)]^k}{k^{k+2}};$$

$$c) \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k^\alpha \log(k)}; \qquad d) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{4k}}{3k^\alpha + 2},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.5.3

Determinare l'insieme di convergenza e la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+z^2}\right)^k.$$

1.5.4

Sia
$$f(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k+1)z^k.$$
Determinare il campo di olomorfia di f. Determinare $f(i/2)$.

1.5.5

Dimostrare che la serie geometrica
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$
converge a $\frac{1}{1-z}$ per ogni $z \in B = \{z : |z| < 1\}$; converge uniformemente in $D_r = \{z : |z| \leq r < 1\}$ ma non converge uniformemente in B.

1.5.6

Prevedere i valori dei raggi di convergenza dello sviluppo in serie di Taylor di f di centro z_0, nei seguenti casi:

$i) \quad f(z) = \dfrac{1}{1-z}\,, \quad z_0 = 3;$ $\qquad ii) \quad f(z) = \dfrac{1}{2-z^2}\,, \quad z_0 = 0;$

$iii) \quad f(z) = \dfrac{1}{z}\,, \quad z_0 = 1;$ $\qquad iv) \quad f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}\,, \quad z_0 = 0;$

$v) \quad f(z) = \dfrac{2z+3}{z+1}\,, \quad z_0 = 3;$ $\qquad vi) \quad f(z) = \dfrac{z}{(z^{+}1)(z-i)}\,, \quad z_0 = 0;$

$vii) \quad f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}\,, \quad z_0 = 0.$

Trovare effettivamente gli sviluppi in serie e confermare le previsioni fatte.

1.5.7

Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z) = \mathrm{e}^z \cos z$ intorno al punto $z_0 = 0$.

1.5.8

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z) = \log z$ (determinazione principale) in un intorno del punto $z = -3 + i$. Determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

1.5.9

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z) = \sqrt{z+1}$ (determinazione principale) in un intorno del punto $z = 0$. Determinare il raggio di convergenza della serie.

1.5.10

Determinare il campo di olomorfia della funzione $f(z) = \log \frac{1-z}{1+z}$ (determinazione principale). Sviluppare$f(z)$ in serie di Taylor di centro 0. Determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

1.6 Singolarità isolate

1.6.1

Sviluppare in serie di Laurent di punto iniziale $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$$

in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ e in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

1.6.2

Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{2z - z^2}$$

a) intorno al punto $z_0 = 0$
b) intorno al punto $z_0 = 2$.

1.6.3

Sia

$$f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Determinare il modulo di f e determinare per quali z tale modulo vale 1.

1.6.4

Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$$

intorno al punto $z_0 = -1$. Che tipo di singolarità è il punto $z_0 = -1$?

1.6.5

Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{4+z}{z^3 + 3\,z^2}$$

a) nell'insieme $0 < |z| < 3$;
b) nell'insieme $3 < |z| < \infty$.

1.6.6

Classificare l'origine come singolarità, sia calcolando lo sviluppo di Laurent, sia utilizzando la via più breve, nei seguenti casi:

$$\frac{\sin(z^4)}{z}\,, \quad \frac{1-\exp(-z)}{z}\,, \quad \frac{\exp(-1/z^2)}{z}\,, \quad z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

1.6.7

Determinare e classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

$$\frac{\exp(z)-1}{z}\,, \quad \frac{1}{z^4}\,, \quad \exp\!\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \frac{z}{\sin(z)}$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad z\sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \tanh(z)\,, \quad \frac{1-\cos(z)}{\exp(2iz)-1}$$

1.6.8

Se $f(z)$ e $g(z)$ hanno entrambe un polo per $z = z_0$, segue, in generale, che $f(z)g(z)$ ha un polo nel punto $z = z_0$? Cosa si può dire della funzione $f(z)/g(z)$?

1.6.9

Se $f(z)$ e $g(z)$ hanno entrambe una singolarità essenziale per $z = z_0$, segue, in generale, che $f(z)g(z)$ ha una singolarità essenziale in $z = z_0$?

1.6.10

Sia

$$d(w) = \inf_{0<|z|<1} |\exp(1/z) - w|.$$

Dimostrare che $d(w)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$.

1.6.11

Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni intere, non identicamente nulle, tali che

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Cosa si può dire della funzione $f(z)/g(z)$?

1.7 Singolarità isolate 2

1.7.1

Siano $f(z)$ e $g(z)$ olomorfe in A e sia $z_0 \in A$, con $g(z) \not\equiv 0$. Dimostrare che la funzione razionale $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ha in z_0 un polo oppure una singolarità eliminabile.

1.7.2

Dimostrare che se $f(z)$ ha in $z = z_0$ un polo, allora la funzione $\mathrm{e}^{f(z)}$ ha in z_0 una singolarità essenziale.

1.7.3

Studiare il tipo di singolarità delle seguenti funzioni e, nel caso di singolarità isolate, calcolarne i residui:

$i)\ f(z) = \dfrac{1}{z^2}\,;$ $\qquad ii)\ f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}\,;$

$iii)\ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\,;$ $\qquad iv)\ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^3}\,;$

$v)\ f(z) = \dfrac{1}{z\sin(z)}\,;$ $\qquad vi)\ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{1+\mathrm{e}^z}\,, \alpha \in \mathbb{R};$

$vii)\ f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4}\,;$ $\qquad viii)\ f(z) = \dfrac{(\log(z))^4}{1+z^2}\,;$

$ix)\ f(z) = \dfrac{z}{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}\,;$ $\qquad x)\ f(z) = \mathrm{cotg}(z) - \dfrac{1}{z}\,;$

$xi)\ f(z) = \dfrac{1}{z(\mathrm{e}^z - 1)}\,;$ $\qquad xii)\ f(z) = z\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$

$xiii)\ f(z) = \dfrac{z^2}{\sin^2 \frac{1}{z+1}}\,;$ $\qquad xiv)\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{z-2}.$

1.7.4

Calcolare, con il metodo dei residui, i seguenti integrali:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \int_{+\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=2;\\
&b) \quad \int_{+\gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}\mathrm{d}z\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=3;\\
&c) \quad \int_{+\gamma} \frac{\sin(z+1)}{z(z+1)}\mathrm{d}z\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=3;\\
&d) \quad \int_{+\gamma} \frac{z(z+1)}{\sin(z+1)}\mathrm{d}z\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=3;\\
&e) \quad \int_{+\gamma} \frac{z^2}{(5+z)(z+i)}\mathrm{d}z\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=2;\\
&f) \quad \int_{+\gamma} \frac{z^2}{(5+z^2)(z-3i)}\mathrm{d}z\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=2;\\
&g) \quad \int_{+\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z+1}\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z-2i|=2;\\
&h) \quad \int_{+\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{\sinh(2z)}\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=2;\\
&i) \quad \int_{+\gamma} \mathrm{tg}(z)\mathrm{d}z\,, \quad \text{dove} \quad \gamma:\ |z|=2.
\end{aligned}
$$

1.7.5

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{+\partial Q} \frac{\exp(z)}{z^k}\mathrm{d}z$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$, essendo $Q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$;

$$\int_{+\partial Q} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^k}\mathrm{d}z$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$, essendo $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 4;\ |\Im(z)| \leq 4\}$.

1.8 Teorema dei Residui

1.8.1

Studiare che tipo di singolarità è il punto $z = \infty$ nei seguenti casi

$$a)\quad \frac{z}{z^2+1}, \qquad b)\quad 1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3},\; c)\quad z^2 e^{1/z},$$
$$d)\quad \frac{1}{z^2+1}, \qquad e)\quad \frac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)},\; f)\quad \frac{1}{\sin 1/z}.$$

1.8.2

Calcolare
$$\int_{+\gamma} \frac{3z+1}{z(z-1)^3}\, dz,$$
con $\gamma : |z| = 2$ orientata nel verso antiorario,
a) applicando il teorema dei residui in domini limitati ;
b) applicando il teorema dei residui in domini illimitati.

1.8.3

Calcolare
$$\int_{+\gamma} \frac{z^3}{z^4+1}\, dz,$$
con $\gamma : |z| = 1$ orientata nel verso antiorario,
a) applicando il teorema dei residui in domini limitati ;
b) applicando il teorema dei residui in domini illimitati.

1.8.4

Calcolare
$$\int_{+\gamma} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\, dz,$$
con $\gamma : |z| = 4$ orientata nel verso antiorario,
a) applicando il teorema dei residui in domini limitati ;
b) applicando il teorema dei residui in domini illimitati.

1.8.5

Calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2} dx\,;\;\; a,b \geq 0.$$

1.8.6

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

1.8.7

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx.$$

1.8.8

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

1.8.9

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

1.9 Ancora Integrali

1.9.1

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{4\cos\theta+5}.$$

1.9.2

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(\cos\theta+2)^2}.$$

1.9.3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^2} dx.$$

1.9.4

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

1.9.5

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \sin(2x) dx.$$

1.9.6

Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2+1} dx.$$

1.9.7

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1+x)^2}\, dx, \quad -1 < \alpha < 1 \text{ (Trasformata di Mellin)}$$

1.9.8

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\, dx, \quad 0 < \alpha < 4 \text{ (Trasformata di Mellin)}$$

1.9.9

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}\log x}{1+x^2}\,dx.$$

(Suggerimento: Si consideri $f(z) = \dfrac{z^{-1/2}\,\mathrm{Log} z}{1+z^2}$ e si assuma la determinazione del logaritmo e della radice tale che $0 \leq \mathrm{Argz} < 2\pi$. Si integri come nella trasformata di Mellin......

1.9.10

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{a^2+x^2}\,dx, \quad a > 0.$$

1.9.11

Determinare il numero di radici dell'equazione $z^7 + 5z^6 - 3z^5 + 11z^2 + 1 = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1.9.12

Fissato $n \in \mathbb{N}$, determinare il numero di radici dell'equazione $\mathrm{e}^z + 3z^n = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1.9.13

Sia f olomorfa in un aperto A contenente $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e sia $|f(z)| \leq 1,\ \forall z : |z| = 1$. Determinare il numero di radici dell'equazione

$$f(z) + 8z^2 - 2 = 0$$

in $D - \partial D$.

1.10 Prodotti infiniti

1.10.1

Dire se i seguenti prodotti infiniti convergono assolutamente:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^3}\right);\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right);\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\cos(k\pi)}{k^2}\right);$$
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sin^2 k}{k^4}\right);\prod_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k\,\log k}\right);\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

1.10.2

Dire se i seguenti prodotti infiniti convergono assolutamente e, in caso affermativo, calcolarne il prodotto:

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right);\quad \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+k^{-1})^2}{1+2k^{-1}};\quad \prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^3+2k}{k^2+3k+2};$$
$$\prod_{k=3}^{\infty}\frac{k^2-4}{k^2-1};\quad \prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^2+k-2}{k+k^2};\quad \prod_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+1)+(1+i)}{k(k+1)+(1-i)}.$$

1.10.3

Discutere in quali insiemi di $\mathbb{C}$ i seguenti prodotti infiniti convergono assolutamente

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^k);\quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^k}{k!}\right);\quad \prod_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{2z}{k}\right)$$

1.10.4

Dimostrare che, se $|z|<1$, il prodotto infinito

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{2^k})$$

converge assolutamente. Dimostrare che il prodotto è $\dfrac{1}{1-z}$.

1.10.5

Dimostrare che il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)$$

converge assolutamente in tutto il piano complesso. Determinare il prodotto $f(z)$.

2 Le Soluzioni

2.1 Numeri Complessi e Funzioni Olomorfe

2.1.1

Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana: $(1+i)^8$, $(2+3\,i)^3$.

Soluzione.

i) Posto $z = 1+i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, si ha $\rho = |z| = \sqrt{2}$ e $\theta = \arg z = \pi/4$. Quindi $|z^8| = |z|^8 = (\sqrt{2})^8 = 16$ e $\operatorname{Arg} z^8 = \frac{\pi}{4}\cdot 8 + 2k\pi = 2\pi(k+1)$. Si ottiene

$$(1+i)^8 = 16(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 16.$$

ii) Da un calcolo diretto si trova $(2+3i)^3 = -46+9i$.

2.1.2

Calcolare $\sqrt[4]{-1}$.

Soluzione. Dalla rappresentazione trigonometrica

$$-1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

si trovano le seguenti radici quarte di -1:

$$\sqrt[4]{-1} = \{\cos(\frac{\pi + 2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi + 2k\pi}{4}), k = 0,1,2,3\}$$

$$= \{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\}.$$

2.1.3

Calcolare le radici seste dell'unità.

Soluzione. Dalla rappresentazione trigonometrica

$$1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

si trovano le seguenti radici seste di 1:

$$\sqrt[6]{1} = \{\cos(\frac{2k\pi}{6}) + i\sin(\frac{2k\pi}{6}), k = 0,1,2,3,4,5\}$$

$$= \{1,\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ -(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}.$$

2.1.4

Calcolare $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^{40}$

Soluzione. Il numero complesso $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ammette la rappresentazione trigonometrica

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Quindi, per la formula di De Moivre,

$$z^{40} = (\cos(40\frac{\pi}{4}) + i\sin(40\frac{\pi}{4})) = 1.$$

2.1.5

Determinare le soluzioni delle equazioni $\bar{z}^{n+1} = 2^{n-1}\, z$, $n = 1, 2, ...$

Soluzione. $z = 0$ è soluzione dell'equazione. Sia $z \neq 0$. Moltiplicando entrambi i termini dell'equazione per $\bar{z}$ si trova $\bar{z}^{n+2} = 2^{n-1}\,|z|^2$. Dalla rappresentazione trigonometrica di $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si trova che

$$\rho^{n+2} = \rho^2 2^{n-1} \longrightarrow \rho = 2^{\frac{n-1}{n}};$$

$$\cos((n+2)\theta) - i\sin((n+2)\theta) = 1 \longrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n+2}, k = 0, ..., n+1.$$

2.1.6

Determinare l'insieme dei punti del piano complesso definiti dalle relazioni:

i) $|z - 3i| < 2$; **ii)** $\mathrm{Re}\frac{z+i}{z-i} = 0$; **iii)** $\mathrm{Im}\frac{z+i}{z-i} = 0$;

iv) $|z-1| + |z+1| = 4$; **v)** $||z-1| - |z+1|| = 4$; **vi)** $\pi/6 < \arg(z-i) < \pi/4$;

vii) $|z| - \mathrm{Re}(z) = 3$; **viii)** $|z| < \arg z + \pi$; **ix)** $\mathrm{Re}z < \mathrm{Im}z$.

Soluzione.

i) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| < 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + (y-3)^2} < 4\}$ è il campo circolare di centro $(0, 3)$ e raggio 2.

ii) Si ha

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$$

L'insieme richiesto è

$$\{z \in \mathbb{C} - \{i\} : \mathrm{Re}\frac{z+i}{z-i} = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,1) : x^2 + y^2 = 1\}$$

che corrisponde al cerchio di centro l'origine e raggio 1, privato del punto $(0,1)$.

iii) Dall' esercizio **ii)** segue che

$$\{z \in \mathbb{C} - \{i\} : \mathrm{Im}\frac{z+i}{z-i} = 0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,1) : x = 0\}$$

cioè l'asse delle y privato del punto $(0,1)$.

iv) I punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l' equazione $||z+c| + |z-c|| = 2\,a$ con $a, c \in \mathbb{R}$ e $a > c > 0$, costituiscono i punti di un'ellisse con i fuochi nei punti $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, di semiasse maggiore a. Con le opportune manipolazioni si ottiene l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Quindi

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+1| = 4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1\}.$$

v) I punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $||z-c| - |z+c|| = 2\,a$ con $a, c \in \mathbb{R}$ e $c > a > 0$ costituiscono i punti di un'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

In questo esempio però $c = 1 < 2 = a$. Dimostriamo che l'insieme è vuoto. Dalla disuguaglianza

$$||\zeta| - |w|| \leq |\zeta - w|$$

si ottiene

$$||z-1| - |z+1|| \leq |z - 1 - (z+1)| = 2 < 4.$$

Quindi

$$\{z \in \mathbb{C} : ||z-1| - |z+1|| = 4\} = \emptyset.$$

vi) Si ha $z - i = x + i(y-1)$. Quindi

$$x = |z-i| \cos \arg(z-i); \quad y-1 = |z-i| \sin \arg(z-i) \to \tan \arg(z-i) = \frac{y-1}{x}.$$

Dato che la tangente è monotona, crescente e invertibile nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ si ottiene

$$\pi/6 < \arg(z-i) < \pi/4 \iff \pi/6 < \arctan\frac{y-1}{x} < \pi/4 \iff \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{y-1}{x} < 1.$$

Quindi l'insieme cercato è

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \frac{x}{\sqrt{3}} < y - 1 < x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, x < y-1 < \frac{x}{\sqrt{3}}\}.$$

vii) Posto $z = x + iy$ si ha

$$|z| - \mathrm{Re}(z) = 3 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 3 + x \iff x = \frac{1}{6}(y^2 + 2y - 9)$$

che rappresenta un parabola con asse parallelo all'asse x, vertice in $(-5/3, -1)$, che incontra l'asse y nei punti $-1 \pm \sqrt{10}$.

viii) Se $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, si ha

$$|z| < \arg z + \pi \iff \rho < \theta + \pi.$$

Studiamo l'equazione $\rho = \theta + \pi$. Al variare di $\theta \in (-\pi, \pi)$, ρ cresce da 0 a 2π descrivendo una spirale che interseca l'asse x nei punti $(\pi, 0)$ e $(2\pi, 0)$ e interseca l'asse y nei punti $(0, \pi/2)$ e $(0, 3\pi/2)$ (vedi figura 1). L'insieme cercato è la parte di piano interna alla spirale.

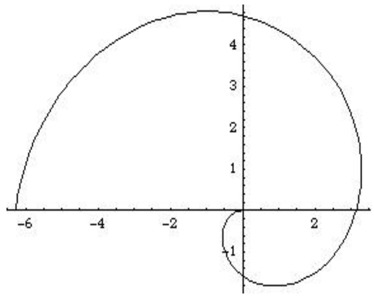

Figura 1: Grafico di $\rho = \pi + \theta$, $\theta \in (-\pi, \pi]$.

ix) Se $z = x + iy$, l'insieme cercato è

$$\mathrm{Re}z < \mathrm{Im}z \iff x < y.$$

2.1.7

Stabilire il comportamento delle successioni

$$\frac{i^n}{n};\quad \frac{(-1)^n n}{n+i};\quad \frac{n^2+i\,n}{n^2+1}.$$

Soluzione. La successione $\{\frac{i^n}{n}\}$ è infinitesima dato che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

La successione $\{\frac{(-1)^n n}{n+i}\}$ oscilla e non converge. Infatti

$$\mathrm{Re}\frac{(-1)^n n}{n+i} = (-1)^n\frac{n^2}{n^2+1} = (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

che non ammette limite, mentre

$$\mathrm{Im}\frac{(-1)^n n}{n+i} = -\frac{(-1)^n n}{n^2+1} \longrightarrow 0.$$

La successione $\{\frac{n^2+i\,n}{n^2+1}\}$ converge a $z_0 = 1$. Infatti

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+i\,n}{n^2+1}-1\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2+1}+i\frac{n}{n^2+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^{1/2} = 0.$$

2.1.8

Verificare che le seguenti funzioni non soddisfano la condizione di Cauchy-Riemann:

$$f(z)=\overline{z};\quad f(z)=\Im(z);\quad f(z)=\Re(z).$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(z)=\overline{z}=x-iy &\quad\rightarrow\quad & f_x+if_y = 1+i(-i)=2\neq 0\\ f(z)=\Im(z)=y &\quad\rightarrow\quad & f_x+if_y = i\neq 0\\ f(z)=\Re(z)=x &\quad\rightarrow\quad & f_x+if_y = 1\neq 0. \end{aligned}$$

2.1.9

Verificare se le seguenti funzioni soddisfano la condizione di Cauchy-Riemann: $f(z)=z^3+i\bar{z};\quad g(z)=\overline{z^2+5z};\quad h(z)=\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{\bar{z}}.$

Soluzione. Nessuna delle tre funzioni soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann. Infatti

$$f(x,y) = (x+iy)^3 + i(x-iy) \to f_x + if_y = 2i;$$

$$g(x,y) = (x-iy)^2 + 5(x-iy) \to g_x + ig_y = 10 + 4x - 4iy;$$

$$h(x,y) = 2\mathrm{e}^x \cos y \to h_x + ih_y = 2\mathrm{e}^{\bar{z}}$$

2.1.10

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un campo connesso e sia f olomorfa in A. Dimostrare che se f assume solo valori reali allora f è costante.

Soluzione. Se $f(z) = u(x,y) \in H(A)$ allora il sistema di Cauchy-Riemann diventa

$$u_x = u_y = 0 \quad \text{in} \quad A \quad \to \quad u(x,y) = \mathit{costante}.$$

2.1.11

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un campo connesso e sia f olomorfa in A. Dimostrare che se f ha modulo costante in A allora f è costante.

Soluzione. Sia $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$. Se $|f| = 0$ è banale. Sia $|f|^2 = u^2 + v^2 = m > 0$. Si ottiene:

$$u\,u_x + v\,v_x = 0; \quad u\,u_y + v\,v_y = 0$$

cioè, per il sistema di Cauchy-Riemann,

$$u\,u_x - v\,u_y = 0; \quad u\,u_y + v\,u_x = 0.$$

Dato che $u^2 + v^2 = m > 0$, le due equazioni sono tra loro compatibili se e solo se $u_x = u_y = 0$ da cui segue $v_x = v_y = 0$. Essendo A connesso ne segue che u e v sono costanti.

2.1.12

Dimostrare che se $f(z) \in H(A)$, con $A \subset \mathbb{C}$ aperto connesso, e $f'(z) = 0$ identicamente in A allora $f(z)$ è costante.

Soluzione. Dato che $f'(z) = f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z) = 0$ si ha $u_x(z) = v_x(z) = 0$. Dal sistema di Cauchy-Riemann si ha anche $u_y(z) = v_y(z) = 0$. Poichè le funzioni reali u e v sono entrambi costanti e quindi anche $f = u+iv$ è costante.

2.1.13

Dimostrare che $f(z) = |z^2|$ non è olomorfa in $\mathbb{C}$.

Soluzione. Si ha $f(x,y) = x^2 + y^2$. Non è verificata la condizione di Cauchy-Riemann poichè

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y; \quad f_x + i f_y = 2z = 0 \iff z = 0.$$

2.1.14

Dimostrare che se $f(z) \in H(\mathbb{C})$ allora $\overline{f(\bar{z})} \in H(\mathbb{C})$.

Soluzione. Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ allora

$$f(\overline{z}) = u(x,y) + iv(x,y); \quad \overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y) = U(x,y) + iV(x,y).$$

$U(x,y)$ e $V(x,y)$ sono differenziabili in $\mathbb{C}$ perchè lo sono $u(x,y)$ e $v(x,y)$. Inoltre, per l'olomorfia di $f(z)$,

$$U_x(x,y) = u_x(x,-y) = v_y(x,-y) = V_y(x,y);$$
$$U_y(x,y) = -u_y(x,-y) = v_x(x,-y) = -V_x(x,y)$$

cioè U e V soddisfano il sistema di Cauchy-Riemann.

2.2 Campi di olomorfia e integrali curvilinei

2.2.1

Dimostrare che
$$\frac{1}{2}|\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}| \le |\sin z| \le \frac{1}{2}|\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}|$$

Soluzione. Combinando la definizione
$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}$$
e la disuguaglianza triangolare
$$||w| - |\zeta|| \le |w - \zeta| \le |w| + |\zeta| \quad \forall \quad w, \zeta \in \mathbb{C}$$
si trova
$$\frac{1}{2}\left||\mathrm{e}^{iz}| - |\mathrm{e}^{-iz}|\right| \le |\sin z| \le \frac{1}{2}\left||\mathrm{e}^{iz}| + |\mathrm{e}^{-iz}|\right|.$$
Dato che $|\mathrm{e}^{iz}| = \mathrm{e}^{-y}$ e $|\mathrm{e}^{-iy}| = \mathrm{e}^{y}$ si ha la disuguaglianza cercata.

Quindi
$$|\sin z| \sim \frac{\mathrm{e}^{|y|}}{2} \qquad \text{per } y \to \pm\infty$$
cioè $\sin z$ è illimitato in $\mathbb{C}$.

2.2.2

Determinare $|\sin z|^2$.

Soluzione. Dalla definizione

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e da

$$e^{iz} = e^{ix}e^{-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x); \quad e^{-iz} = e^{-ix}e^{y} = e^{y}(\cos x - i \sin x)$$

si trova

$$\sin z = \cos x \,\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} + i \sin x \,\frac{e^{-y} + e^{y}}{2i} = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Quindi

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Questa formula implica che

$$\sin z = 0 \iff \sin x = 0; \sinh y = 0 \iff y = 0; x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2.2.3

Determinare insieme di definizione, insieme di continuità e campo di olomorfia delle seguenti funzioni:

$$\frac{\sin z + 1}{i + 3z}; \quad \frac{1}{\cosh z + e^z}; \quad \frac{1}{1 + e^z}; \quad \frac{1}{e^{iz} + \cos z}; \quad \frac{1}{e^z - e}.$$

Soluzione. Detti I_{def} l'insieme di definizione, I_{cont} l'insieme di continuità e O il campo di olomorfia di f, risulta:

$$f(z) = \frac{\sin z + 1}{i + 3z} : \qquad I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z = -i/3\}$$

$$f(z) = \frac{1}{\cosh z + e^z} : \qquad I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = -\log\left(\sqrt{3}\right) + i(\frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^z} : \qquad I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = i(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} + \cos z} : \qquad I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = (\frac{\pi}{2} + k\pi) + i \log \sqrt{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(z) = \frac{1}{e^z - e} : \qquad I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = 2\,k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

2.2.4

Determinare tutti i valori di

$$2\,\mathrm{Log}\,(1-i);\ \mathrm{Log}\,(\sqrt{3}+i);\ \mathrm{Log}\,(4\,i);\ \mathrm{Log}\,(4-4i);\ \mathrm{Log}\,5.$$

Soluzione.

- $z = 1 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$; $\quad \mathrm{Arg}\, z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{4}$.
  Quindi
  $$2\,\mathrm{Log}\,(1-i) = 2(\log\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)) = \log 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 4k\pi) \quad k \in \mathbb{Z};$$
  $$2\,\log(1-i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2} \text{ determinazione principale.}$$
  Calcolando, invece
  $$z^2 = (1-i)^2 = -2i \Rightarrow |z| = 2; \quad \mathrm{Arg}\, z^2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{2}$$
  si trova
  $$\mathrm{Log}\,(1-i)^2 = \log 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z};$$
  $$\log(1-i)^2 = \log 2 - i\frac{\pi}{2} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = 2$; $\quad \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = \frac{\pi}{6}$.
  Quindi
  $$\mathrm{Log}\,(\sqrt{3}+i) = \mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \log 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z};$$
  $$\log(\sqrt{3}+i) = \log z = \log 2 + i\frac{\pi}{6} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = 4\,i \Rightarrow |z| = 4$; $\quad \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = \frac{\pi}{2}$.
  Quindi
  $$\mathrm{Log}\,(4\,i) = \log 4 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z};$$
  $$\log(4\,i) = \log 4 + i\frac{\pi}{2} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = 4 - 4i \Rightarrow |z| = 4\sqrt{2}$; $\quad \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{4}$.

  Quindi

$$\operatorname{Log}(4-4i) = \log(4\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\log(4-4i) = \log(4\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = 5 \Rightarrow |z| = 5$; $\quad \operatorname{Arg} z = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = 0$.

  Quindi

$$\operatorname{Log} 5 = \log 5 + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{Log} 5 = \log 5 \text{ determinazione principale.}$$

2.2.5

Determinare tutti i possibili valori che la potenza $(-1)^{-i}$ può assumere al variare della determinazione dell'argomento.

Soluzione. Per definizione si ha

$$(-1)^{-i} = \mathrm{e}^{-i\operatorname{Log}(-1)}.$$

Dato che

$$\operatorname{Log}(-1) = \log 1 + i\operatorname{Arg}(-1) = i(\pi + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

si ottiene

$$(-1)^{-i} = \mathrm{e}^{(\pi+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La determinazione principale della potenza si ottiene scegliendo la determinazione principale del logaritmo. Quindi

$$\log(-1) = i\arg(-1) = i\pi \Rightarrow (-1)^{-i} = \mathrm{e}^{\pi} \qquad \text{determinazione principale.}$$

2.2.6

Determinare il valore di $\arctan(2-i)$.

Soluzione. Le funzioni inverse della funzione $\tan z$ sono le seguenti:

$$\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{1+iz}{1-iz}, \qquad z \neq \pm i.$$

Si assume come principale, e si indica con $\arctan z$, quella che corrisponde alla determinazione principale del logaritmo cioè

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}, \qquad z \neq \pm i.$$

Quindi

$$\arctan(2-i) = \frac{1}{2i} \log \frac{1+i(2-i)}{1-i(2-i)} = \frac{1}{2i} \log(-1+i).$$

Dato che $\log(-1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{3}{4}\pi$ si trova

$$\arctan(2-i) = \frac{1}{2i}(\log\sqrt{2} + i\frac{3}{4}\pi) = \frac{3\pi}{8} - i\log\sqrt[4]{2}.$$

2.2.7

Determinare il campo di olomorfia delle seguenti funzioni:

$$\log z^4; \qquad \sqrt{z^2-4}; \qquad i\sqrt{4-z^2}; \quad \log\left(\frac{1+2iz}{1-2iz}\right);$$

$$\log\left(\frac{2-z}{2+z}\right); \quad \sqrt{1+2z^2}; \quad \sqrt[3]{1+\frac{z-i}{z+i}}; \qquad \log(-1+\sqrt{1+z^3})$$

dove si è scelta la determinazione principale del logaritmo e della radice.

Soluzione. Detti I_{def} l'insieme di definizione, I_{cont} l'insieme di continuità e O il campo di olomorfia di f, risulta:

- $f(z) = \log z^4$:

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = 0\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : |\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|\}$$

- $f(z) = \sqrt{z^2-4}$:

$$I_{def} = \mathbb{C}; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{\{z : \mathrm{Re}(z) = 0\} \cup \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, |\mathrm{Re}(z)| < 2\}\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{\{z : \mathrm{Re}(z) = 0\} \cup \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, |\mathrm{Re}(z)| \leq 2\}\};$$

- $f(z) = i\sqrt{4-z^2}$:

$$I_{def} = \mathbb{C}; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, |\mathrm{Re}(z)| > 2\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0; |\mathrm{Re}(z)| \geq 2\}.$$

- $f(z) = \log\left(\frac{1+2iz}{1-2iz}\right)$:

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = \pm\frac{i}{2}\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| \geq \frac{1}{2}\}$$

- $f(z) = \log\left(\frac{2-z}{2+z}\right)$:

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = \pm 2\}\ ; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, |\mathrm{Re}(z)| \geq 2\}$$

- $f(z) = \sqrt{1+2z^2}$:

$$I_{def} = \mathbb{C}\ ; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| > \frac{1}{\sqrt{2}}\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

- $f(z) = \sqrt[3]{1 + \frac{z-i}{z+i}}$:

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = -i\}\ ; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, -1 \leq \mathrm{Im}(z) < 0\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, -1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$$

- $f(z) = \log(-1 + \sqrt{1+z^3})$:
  Studiamo inizialmente la funzione $g(w) = \log(-1 + \sqrt{w})$. Si ha per la $g(w)$:

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{w = 1\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{w : \mathrm{Im}(w) = 0,\ \mathrm{Re}(w) \leq 0\}.$$

  Quindi per la funzione $\log(-1 + \sqrt{1+z^3})$ si ottiene:

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = 0\}; \qquad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(1+z^3) = 0,\ \mathrm{Re}(1+z^3) \leq 0\} =$$
$$= \mathbb{C} - \{\{z : \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\} \cup \{z : \mathrm{Re}(z) \geq 0, \sqrt{3}\mathrm{Re}(z) = |\mathrm{Im}(z)|\}\}$$

2.2.8

Calcolare, applicando la definizione,

$$\int_{+\gamma} \bar{z}\, dz$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa nel verso antiorario.

Soluzione. Usando la definizione di integrale curvilineo complesso si ha

$$\int_{+\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt, \qquad +\gamma = \{z = z(t),\ a \le t \le b\}.$$

In questo caso $f(z) = \bar{z}$ e $+\gamma = \{z = 2\,\mathrm{e}^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi\}$. Applicando la definizione si ottiene $8\pi i$.

2.2.9

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z}{\bar{z}}\,dz$$

dove $+\gamma$ è costituita dalla semicirconferenza $|z| = 1$ con $\mathrm{Im}z > 0$ e dal segmento dell'asse x compreso tra -1 e 1, percorsa in verso antiorario.

Soluzione. Sia $+\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 =& \{z = \mathrm{e}^{it}, \quad 0 \le t \le \pi\} && \text{semicirconferenza} \\ \gamma_2 =& \{z = t, \quad -1 \le t \le 1\} && \text{segmento } (-1,0) \to (1,0). \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{z}{\bar{z}}\,dz =& i\int_0^\pi \mathrm{e}^{3it}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{3\pi i} - 1}{3} = -\frac{2}{3}; \\ \int_{\gamma_2} \frac{z}{\bar{z}}\,dz =& \int_{-1}^1 dt = 2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{+\gamma} \frac{z}{\bar{z}}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{z}{\bar{z}}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z}{\bar{z}}\,dz = \frac{4}{3}.$$

2.2.10

Calcolare

$$\int_{+\gamma} (z - \bar{z})^2\,dz$$

dove γ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ percorso nel verso antiorario.

Soluzione. Sia $+\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 =& \{z = t, \quad 0 \le t \le 1\} && \text{segmento } (0,0) \to (1,0) \\ \gamma_2 =& \{z = (1-t) + it, \quad 0 \le t \le 1\} && \text{segmento } (1,0) \to (0,1) \\ \gamma_3 =& \{z = i(1-t), \quad 0 \le t \le 1\} && \text{segmento } (0,1) \to (0,0) \end{aligned}$$

Dato che $(z-\bar{z})^2 = (2\,i\,\mathrm{Im}z)^2 = -4\,\mathrm{Im}^2 z$ si ha

$$\int_{\gamma_1} (z-\bar{z})^2\,dz = 0 \text{ dato che } z=\bar{z} \text{ su } \gamma_1;$$
$$\int_{\gamma_2} (z-\bar{z})^2\,dz = -\,4(-1+i)\int_0^1 t^2 dt = \frac{4}{3}(1-i);$$
$$\int_{\gamma_3} (z-\bar{z})^2\,dz = -\,4(-i)\int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{4}{3}i.$$

Quindi

$$\int_{+\gamma} (z-\bar{z})^2\,dz = \int_{\gamma_1} (z-\bar{z})^2\,dz + \int_{\gamma_2} (z-\bar{z})^2\,dz + \int_{\gamma_3} (z-\bar{z})^2\,dz = \frac{4}{3}.$$

2.3 Teoremi di Cauchy

2.3.1

Calcolare, con i teoremi integrali di Cauchy, i seguenti integrali:

i) $\displaystyle\int_{+\partial D} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z-\pi i/2}\,\mathrm{d}z,$ dove $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \le 3;\ |\mathrm{Im}(z)| \le 3\};$

ii) $\displaystyle\int_{+\partial D} \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\,\mathrm{d}z,$ dove $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \le 2;\ |\mathrm{Im}(z)| \le 2\};$

iii) $\displaystyle\int_{+\partial D} \frac{z}{2z+1}\,\mathrm{d}z,$ dove $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 2\}.$

Il verso positivo di percorrenza è quello antiorario.

Soluzione.

i) Si applica il secondo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = \mathrm{e}^{-z}$, olomorfa in $\mathbb{C}$, nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \le 3;\ |\mathrm{Im}(z)| \le 3\}$:

$$\mathrm{e}^{-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z-\zeta}\,dz, \quad \zeta \in D - \partial D.$$

Per $\zeta = \pi i/2$ si trova che

$$\int_{+\partial D} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z-\pi i/2}\,dz = 2\pi.$$

ii) Siano

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2+8} \in H(\mathbb{C} - \pm 2\sqrt{2}i)\,;\, D = \{z \in \mathbb{C} : \, |\mathrm{Re}(z)| \leq 2;\, |\mathrm{Im}(z)| \leq 2\}.$$

Dato che $f \in C^0(D) \cap H(D \setminus \partial D)$, possiamo applicare il secondo teorema integrale di Cauchy nel dominio regolare D:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz, \quad \zeta \in D - \partial D.$$

Assumendo $\zeta = 0$ si trova che

$$\int_{+\partial D} \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\, \mathrm{d}z = \frac{i\pi}{4}.$$

iii) Siano $f(z) = z/2$, olomorfa in $\mathbb{C}$, e $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$. Possiamo applicare il secondo teorema integrale di Cauchy alla funzione f nel dominio regolare D:

$$\frac{\zeta}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{z/2}{z-\zeta}\, dz, \quad \zeta \in D - \partial D.$$

Assumendo $\zeta = -1/2$ si ottiene che

$$\int_{+\partial D} \frac{z}{2z+1}\, \mathrm{d}z = -\frac{\pi i}{2}.$$

2.3.2

Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$. Calcolare

$$\int_{+\partial D} \frac{\cosh(z)}{z^4}\, dz.$$

Il verso positivo di percorrenza è quello antiorario.

Soluzione. Si applica la formula integrale di Cauchy per le derivate alla funzione $f(z) = \cosh(z)$, olomorfa in $\mathbb{C}$, nel dominio D:

$$f^{(3)}(\zeta) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^4}\, dz, \quad \zeta \in D - \partial D.$$

Per $\zeta = 0$ si trova che

$$\int_{+\partial D} \frac{\cosh(z)}{z^4}\, dz = 0.$$

2.3.3

Sia f una funzione olomorfa in un aperto connesso A, tale che

$$|f^2 - 1| < 1.$$

Dimostrare che $\mathrm{Re}(f)$ ha segno costante in A.

Soluzione. Siano $u(z) = \mathrm{Re}f(z)$ e $v(z) = \mathrm{Im}f(z)$. Supponiamo, per assurdo, che esistano $z_1, z_2 \in A$ tali che $u(z_1) > 0$, $u(z_2) < 0$. Poichè A è connesso, $\exists\, z_0 \in A : u(z_0) = 0$ cioè $f(z_0) = iv(z_0)$. Per ipotesi deve essere $|f^2(z_0) - 1| = |v^2(z_0) + 1| < 1$. Assurdo.

2.3.4

Calcolare, con i teoremi integrali di Cauchy, i seguenti integrali:

$$\textbf{i)} \qquad \int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z(z+1)}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z-1| = 3/2;$$

$$\textbf{ii)} \qquad \int_{+\gamma} \frac{\sin(\pi\, z)}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z-1| = 1;$$

$$\textbf{iii)} \qquad \int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{z^4}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z| = 1;$$

$$\textbf{iv)} \qquad \int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^{z}}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z, \quad \text{dove} \quad \gamma : \ |z+1| = 3.$$

Il verso positivo di percorrenza è quello antiorario.

Soluzione.

i) Siano $f(z) = \mathrm{e}^{z^2}/(z+1)$ e $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 3/2\}$. Dato che -1 non appartiene a D, possiamo applicare il secondo teorema integrale di Cauchy a f nel dominio regolare D ($f \in C^0(D) \cap H(D \setminus \partial D)$):

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz, \quad \zeta \in D \setminus \partial D.$$

Assumendo $\zeta = 0$ si trova

$$\int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z(z+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

ii) Si applica la formula integrale di Cauchy per le derivate alla funzione $f(z) = \sin(\pi z)/(z+1)^2$ nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$, dato che -1 non appartiene a D e $f \in C^0(D) \cap H(D \setminus \partial D)$:

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2} dz, \quad \zeta \in D \setminus \partial D.$$

Per $\zeta = 1$ si ottiene

$$\int_{+\gamma} \frac{\sin(\pi\, z)}{(z^2-1)^2}\, \mathrm{d}z = -\frac{\pi^2 i}{2}.$$

iii) Si applica la formula integrale di Cauchy per le derivate alla funzione $f(z) = \mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z} = 2\sinh(z)$, olomorfa in $\mathbb{C}$, nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$:

$$f^{(3)}(\zeta) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^4} dz, \quad \zeta \in D \setminus \partial D.$$

Assumendo $\zeta = 0$ si trova

$$\int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{z^4}\, \mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi\, i.$$

iv) Siano $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq \epsilon\}$; $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+3| \leq \epsilon\}$, $0 < \epsilon < 1$ e $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq 3\}$. Applichiamo il primo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = \mathrm{e}^z/((z+3)^2(z-1))$ nel dominio $D = \overline{D_0 - (D_1 \cup D_2)}$ (D non include i punti -3 e 1):

$$\int_{+\partial D} \frac{\mathrm{e}^z\, dz}{(z+3)^2(z-1)} = \int_{+\partial D_1} \frac{\mathrm{e}^z\, dz}{(z+3)^2(z-1)} + \int_{+\partial D_2} \frac{\mathrm{e}^z\, dz}{(z+3)^2(z-1)}$$

dove l'orientamento positivo su ∂D_1 e ∂D_2 è quello antiorario.

Successivamente applichiamo il secondo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f_1(z) = \mathrm{e}^z/(z+3)^2$ nel dominio D_1 (D_1 non include il punto -3):

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_1} \frac{f_1(z)}{(z-\zeta)}\, dz, \quad \zeta \in D_1 \setminus \partial D_1\,.$$

Per $\zeta = 1$

$$\int_{+\partial D_1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+3)^2(z-1)}\, dz = 2\pi i f_1(1) = \frac{\pi i \mathrm{e}}{8}.$$

Applichiamo la formula integrale di Cauchy per le derivate alla funzione $f_2(z) = \mathrm{e}^z/(z-1)$ nel dominio D_2 (D_2 non include il punto 1):

$$f_2'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} \frac{f_2(z)}{(z-\zeta)^2}\, dz, \quad \zeta \in D_2 \setminus \partial D_2.$$

Per $\zeta = -3$

$$\int_{+\partial D_2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+3)^2(z-1)}\, dz = 2\pi i f_2'(-3) = -\frac{5\pi i}{8\mathrm{e}^3}.$$

Concludiamo che il valore dell'integrale iniziale è

$$\int_{+\gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}\, \mathrm{d}z = \frac{\pi\, i}{8}\Big(\mathrm{e} - \frac{5}{e^3}\Big).$$

2.3.5

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_{+\gamma} \frac{\cos^n z}{z - 2\,\pi}\, dz,\ n = 0, 1, 2, ...$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 8, percorsa nel verso antiorario.

Soluzione. Applichiamo il primo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = \cos^n z$, olomorfa in $\mathbb{C}$, nel dominio regolare $D = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 8\}$. Quindi, $\gamma = \partial D$ e

$$f(2\,\pi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma} \frac{f(z)}{z - 2\,\pi}\, dz \quad \Rightarrow \quad \int_{+\gamma} \frac{\cos^n z}{z - 2\,\pi}\, dz = 2\pi i,\ n = 0, 1, 2...$$

2.3.6

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz$$

dove γ è la circonferenza, percorsa nel verso antiorario, di centro $(3, 0)$ e raggio

a) 1; **b**) 4; **c**) 6.

Soluzione. La funzione $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-8)}$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \{z = 0, z = 8\}$.

a) Sia $D_1 = \{z : |z-3| \le 1\}$. Dato che $f \in C^0(D_1) \cap H(D_1 \setminus \partial D_1)$, per il primo teorema integrale di Cauchy:

$$\int_{+\partial D_1} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz = 0.$$

b) Sia $D_2 = \{z : |z-3| \le 4\}$. D_2 include $z = 0$ ma non $z = 8$. Quindi, per il secondo teorema integrale di Cauchy applicato alla funzione $g(z) = \frac{z^2+1}{(z-8)}$ ($g \in C^0(D_2) \cap H(D_2 \setminus \partial D_2)$), si trova

$$\int_{+\gamma} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz = \int_{+\partial D_2} \frac{g(z)}{z}\, dz = 2\,\pi i g(0) = -\frac{\pi\, i}{4}.$$

c) Sia $D_3 = \{z : |z-3| \le 6\}$. D_3 include $z = 0$ e $z = 8$. Siano

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \epsilon\};\ D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-8| \le \epsilon\},\ 0 < \epsilon < 1.$$

Applichiamo il primo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = (z^2+1)/(z(z-8))$ nel dominio $D = \overline{D_3 - (D_1 \cup D_2)}$ (D_3 non include i punti 0 e 8):

$$\int_{+\partial D_3} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz = \int_{+\partial D_1} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz + \int_{+\partial D_2} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz$$

dove l'orientamento positivo è quello antiorario.

Successivamente applichiamo il secondo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f_1(z) = (z^2+1)/(z-8)$ nel dominio D_1 (D_1 non include il punto 8):

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_1} \frac{f_1(z)}{(z-\zeta)}\, dz, \qquad \zeta \in D_1 \setminus \partial D_1.$$

Per $\zeta = 0$

$$\int_{+\partial D_1} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz = 2\pi i f_1(0) = -\frac{\pi\, i}{4}.$$

Poi applichiamo il secondo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f_2(z) = (z^2+1)/z$ nel dominio D_2 (D_2 non include il punto 0):

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_2} \frac{f_2(z)}{(z-\zeta)}\, dz, \qquad \zeta \in D_2 \setminus \partial D_2.$$

Per $\zeta = 8$

$$\int_{+\partial D_2} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz = 2\pi i f_2(8) = \frac{17}{4}\pi\, i.$$

Concludiamo che

$$\int_{+\partial D_3} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz = 4\pi\, i.$$

2.3.7

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}\,dz$$

dove γ è la circonferenza $|z|=3$, percorsa nel verso antiorario.

Soluzione. La funzione $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \{\pm 1\}$. Fissato $0 < \epsilon < 1$, definiamo

$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\}, D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq \epsilon\}, D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq \epsilon\}.$

Applichiamo il primo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z)$ nel dominio $D = \overline{D_0 - (D_1 \cup D_2)}$ (D non include i punti ± 1):

$$\int_{+\partial D} \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}dz = \int_{+\partial D_1} \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}\,dz + \int_{+\partial D_2} \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}\,dz$$

dove l'orientamento positivo sulla frontiera di D_1 e D_2 è quello antiorario. Successivamente applichiamo il secondo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f_1(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)^3}$ nel dominio D_1 (D_1 non include il punto 1 e $f_1 \in C^0(D_1) \cap H(D_1 \setminus \partial D_1)$):

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_1} \frac{f_1(z)}{(z-\zeta)}\,dz, \quad \zeta \in D_1 \setminus \partial D_1$$

Per $\zeta = -1$

$$\int_{+\partial D_1} \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}\,dz = 2\pi i f_1(1) = -\frac{\pi\,i}{2}.$$

Poi applichiamo la formula integrale di Cauchy per le derivate alla funzione $f_2(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$ nel dominio D_2 (D_2 non include il punto -1 e $f_2 \in C^0(D_2) \cap H(D_2 \setminus \partial D_2)$):

$$f_2^{(2)}(\zeta) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{+\partial D_2} \frac{f_2(z)}{(z-\zeta)^3}\,dz, \quad \zeta \in D_2 \setminus \partial D_2.$$

Per $\zeta = 1$

$$\int_{+\partial D_2} \frac{z^2+1}{(z-1)^3\,(z+1)}\,dz = 2\pi i f_2^{(2)}(1) = \frac{\pi\,i}{2}.$$

Concludiamo che il valore dell'integrale iniziale è 0.

2.3.8

Dati $A, B, C \in \mathbb{C}$, calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{+\gamma} \frac{A + Bz + Cz^2}{z^n}\, dz, \qquad n = 0, 1, 2...$$

dove γ è la circonferenza $|z| = \rho > 0$, percorsa nel verso antiorario.

Soluzione. Sia $n = 0$. La funzione integranda $f(z) = A + Bz + Cz^2$ è olomorfa in $\mathbb{C}$. Per il primo teorema integrale di Cauchy

$$\int_{+\gamma} (A + Bz + Cz^2)\, dz = 0.$$

Sia $n \geq 1$. Per la formula integrale di Cauchy per le derivate, applicata alla funzione intera $f(z) = A + Bz + Cz^2$ in $D = \{z : |z| \leq \rho\}$ si ottiene

$$\int_{+\gamma} \frac{A + Bz + Cz^2}{z^n}\, dz = 2\pi\, i \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} = \begin{cases} 2\pi\, iA & \text{se } n = 1 \\ 2\pi\, iB & \text{se } n = 2 \\ 2\pi\, iC & \text{se } n = 3 \\ 0 & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

2.4 Integrali

2.4.1

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\cos(bx)dx, \; a > 0, \; b > 0.$$

Suggerimento: Integrare la funzione $\exp(-az^2)$ lungo la frontiera del rettangolo

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \qquad -R \leq \mathrm{Re}(z) \leq R, \quad 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \frac{b}{2a}\}.$$

Soluzione. Applicando il primo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = \mathrm{e}^{-az^2}$ nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \mathrm{Re}(z) \leq R; 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq b/(2a)\}$ si ottiene:

$$\int_{+\partial D} \mathrm{e}^{-az^2} = \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-ax^2} dx + i \int_0^{b/(2a)} \mathrm{e}^{-a(R+iy)^2} dy +$$

$$-\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-a[x+ib/(2a)]^2}dx - i\int_0^{b/(2a)} \mathrm{e}^{-a[-R+iy]^2}dy = 0$$

ovvero

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-ax^2}dx + 2\int_0^{b/(2a)} \mathrm{e}^{-aR^2}\mathrm{e}^{ay^2}\sin(2aRy)dy = \mathrm{e}^{b^2/4a}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-ibx}dx \quad (1)$$

Si ha:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{b/(2a)} \mathrm{e}^{-aR^2}\mathrm{e}^{ay^2}\sin(2aRy)dy = 0.$$

Infatti

$$\Big|\int_0^{b/(2a)} \mathrm{e}^{-aR^2}\mathrm{e}^{ay^2}\sin(2aRy)dy\Big| \le \int_0^{b/(2a)} \mathrm{e}^{-aR^2}\mathrm{e}^{ay^2}dy \le \frac{b}{2a}\mathrm{e}^{b^2/(4a)}\mathrm{e}^{-aR^2} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Quindi, passando al limite per $R \to +\infty$ in (15), si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}dx = \mathrm{e}^{b^2/4a}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}[\cos(bx) - i\sin(bx)]dx.$$

Il primo membro è proprio $\sqrt{(\pi/a)}$ (Integrale di Gauss). Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-b^2/4a}.$$

2.4.2

Per $\xi \in \mathbb{R}$, calcolare

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2}dx.$$

Suggerimento: Integrare la funzione $\exp(-z^2)$ lungo la frontiera del rettangolo di vertici $-R$, R, $R + i\xi$, $-R + i\xi$.

Soluzione. Si ha $F(0) = \sqrt{\pi}$ (Integrale di Gauss). Sia $\xi > 0$. Applicando il primo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : -R \le \mathrm{Re}(z) \le R;\ 0 \le \mathrm{Im}(z) \le \xi\}$ si ha

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 0.$$

Quindi

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2}dx + i\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(R+it)^2}dt - \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+i\xi)^2}dx - i\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(-R+it)^2}dt = 0$$

che può scriversi, in maniera equivalente,

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2} dx + 2\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(R^2-t^2)} \sin(2Rt)dt - \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+i\xi)^2} dx = 0.$$

Si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(R^2-t^2)} \sin(2Rt)dt = 0.$$

Infatti

$$\Big|\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(R^2-t^2)} \sin(2Rt)dt\Big| \leq \int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-(R^2-t^2)} dt \leq \mathrm{e}^{-R^2}\mathrm{e}^{\xi^2}\xi \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Quindi si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+i\xi)^2} dx$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \mathrm{e}^{\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-2ix\xi} dx.$$

Ne segue che

$$F(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2}\sqrt{\pi}.$$

Se $\xi < 0$, dato che $F(-\xi) = F(\xi)$, si trova

$$F(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2}\sqrt{\pi}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

OSS. In realtà il calcolo di $F(\xi)$ si può immediatamente ottenere dall'esercizio precedente osservando che

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\xi x)\mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

2.4.3

Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2\cos(2\alpha)} \cos(x^2\sin(2\alpha))dx;$$

$$I_2(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2\cos(2\alpha)} \sin(x^2\sin(2\alpha))dx, \;\; 0 < \alpha < \pi/4.$$

Suggerimento: Integrare la funzione e^{-z^2} lungo il contorno di un settore circolare di ampiezza α e centro 0, situato nel primo quadrante.

Soluzione. Sia $D = \{z = \rho e^{i\theta} : 0 \leq \rho \leq R;\ 0 \leq \theta \leq \alpha\}$. Si considerino le curve di equazione parametrica:

$$+\gamma_1 : z = x,\ \ 0 \leq x \leq R;$$

$$+\gamma_2 : z = Re^{i\theta},\ \ 0 \leq \theta \leq \alpha;$$

$$-\gamma_3 : z = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))x,\ \ 0 \leq x \leq R.$$

Si è assunto come orientamento positivo su γ_1, γ_2, γ_2 quello subordinato dall'orientamento positivo su ∂D.

Per il primo teorema integrale di Cauchy:

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = \int_{+\gamma_1} f(z)dz + \int_{+\gamma_2} f(z)dz + \int_{+\gamma_3} f(z)dz = 0.$$

Quindi

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^\alpha e^{-R^2\cos(2\theta)}e^{-iR^2\sin(2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta =$$
$$\int_0^R e^{-x^2\cos(2\alpha)}e^{-ix^2\sin(2\alpha)}(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))dx.$$

Risulta

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^\alpha e^{-R^2\cos(2\theta)}e^{-iR^2\sin(2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta = 0.$$

Infatti, con il cambio di variabile $\varphi = \pi/2 - 2\theta$,

$$\Big|\int_0^\alpha e^{-R^2\cos(2\theta)}e^{-iR^2\sin(2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\Big| \leq \int_0^\alpha e^{-R^2\cos(2\theta)}d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/2-2\alpha}^{\pi/2} e^{-R^2\sin(\varphi)}d\varphi.$$

Dall'essere

$$\sin(\varphi) \geq \frac{2\varphi}{\pi},\ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

si trae

$$\Big|\int_0^\alpha e^{-R^2\cos(2\theta)}e^{-iR^2\sin(2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\Big| \leq \frac{1}{2}\int_{\pi/2-2\alpha}^{\pi/2} e^{-R^2\frac{2\varphi}{\pi}}d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{e^{-(1-4\alpha/\pi)R^2} - e^{-R^2}}{R^2} \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Si ha quindi che

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2\cos(2\alpha)}\mathrm{e}^{-ix^2\sin(2\alpha)}(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Separando parte reale e parte immaginaria:

$$\cos(\alpha)\, I_1(\alpha) + \sin(\alpha)\, I_2(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$\sin(\alpha)\, I_1(\alpha) - \cos(\alpha)(\alpha)\, I_2 = 0$$

da cui segue che

$$I_1(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos(\alpha); \quad I_2(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin(\alpha).$$

2.4.4

Determinare tutte le funzioni $g(x)$ tali che $u(x,y) = g(x)\mathrm{e}^y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$. In corrispondenza di una scelta di $g(x)$, determinare $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re} f = u$.

Soluzione. Cerchiamo $g(x)$ tale che $u(x,y)$ è una funzione armonica. Dato che

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = (g''(x) + g(x))\mathrm{e}^y$$

segue che $u(x,y)$ è armonica se e solo se $g(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$g''(x) + g(x) = 0 \to g(x) = a\sin x + b\cos x, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Quindi $u(x,y) = (a\sin x + b\cos x)\mathrm{e}^y$. Le funzioni olomorfe sono

$$f(z) = (a\sin x + b\cos x)\mathrm{e}^y + i\, v(x,y)$$

con $v(x,y)$ armonica coniugata di $u(x,y)$:

$$v_x = -\mathrm{e}^y(a\sin x + b\cos x), \quad v_y = \mathrm{e}^y(a\,\cos x - b\,\sin x).$$

Si trova che $v(x,y) = \mathrm{e}^y(a\,\cos x - b\,\sin x) + c$. Quindi

$$f(z) = (b + ai)\,\mathrm{e}^{-iz} + c, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

2.4.5

Sia $u(x, y) = \mathrm{e}^{2y}(2\sin^2 x - 1)$. Verificare che u è armonica in $\mathbb{R}^2$ e determinare una funzione v armonica coniugata di u.

Soluzione. Si ha $u(x, y) = -\mathrm{e}^{2y}\cos(2x)$. E' immediato verificare che $\Delta_2 u = 0$ in $\mathbb{C}$. Le funzioni u e v tali che $f = u + iv$ è olomorfa devono verificare il sistema di Cauchy-Riemann, cioè deve essere

$$v_x = -u_y = 2\mathrm{e}^{2y}\ \cos(2x), \quad v_y = u_x = 2\,\mathrm{e}^{2y}\ \sin(2x).$$

Si trova facilmente che $v(x, y) = \mathrm{e}^{2y}\ \sin(2x) + c$. Quindi

$$f(z) = -\mathrm{e}^{2y}\ \cos(2x) + i\mathrm{e}^{2y}\ \sin(2x) + c = -\mathrm{e}^{-2iz} + c.$$

2.4.6

Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x, y) = \cos x\,(\mathrm{e}^{ay} + e^{-y})$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Trovare tali funzioni f.

Soluzione. u è la parte reale di una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ se e solo se u è armonica cioè

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = (a^2 - 1)\mathrm{e}^{ay}\cos x = 0 \text{ in } \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm 1.$$

Assumiamo $a = \pm 1$. Le funzioni olomorfe sono

$$f(z) = \cos x\,(\mathrm{e}^{ay} + e^{-y}) + iv(x, y)$$

con v armonica coniugata in u:

$$v_x = -u_y = -\cos x\,(a\,\mathrm{e}^{ay} - \mathrm{e}^{-y}), \quad v_y = u_x = -\sin x\,(\mathrm{e}^{ay} + \mathrm{e}^{-y}).$$

Si riconosce che $v(x, y) = -\sin x\,(a\,\mathrm{e}^{ay} - \mathrm{e}^{-y}) + c$, $a = \pm 1$. Quindi

$$f(z) = \cos x\,(\mathrm{e}^{ay} + e^{-y}) + i\sin x\,(a\,\mathrm{e}^{ay} - \mathrm{e}^{-y}) + c, \qquad a = \pm 1.$$

Se $a = 1$ si ottiene

$$f(z) = \mathrm{e}^{y}\,(\cos x + i\ \sin x) + \mathrm{e}^{-y}\,(\cos x - i\sin x + c = \mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z} + c = 2\ \cos z + c.$$

Invece, se $a = -1$,

$$f(z) = 2\,\mathrm{e}^{-y}\,(\cos x + i\ \sin x) + c = 2\,\mathrm{e}^{iz} + c.$$

2.4.7

Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \mathrm{e}^{ax} \cos y \, \sin y$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Trovare tali funzioni f.

Soluzione. Cerchiamo i valori del parametro a tale che $u(x,y) = \mathrm{e}^{ax} \sin(2y)/2$ è armonica in $\mathbb{C}$. Si ha

$$\Delta_2 u = (a^2 - 4)\mathrm{e}^{ax} \cos y \, \sin y = 0 \iff a = \pm 2.$$

Assumiamo $a = \pm 2$. Le funzioni olomorfe sono

$$f(z) = \mathrm{e}^{ax} \sin(2y)/2 + iv(x,y),$$

con v armonica coniugata di u:

$$v_x = -u_y = -\mathrm{e}^{ax} \cos(2y) \quad v_y = u_x = a\,\mathrm{e}^{ax} \sin(2y)/2.$$

Si riconosce che $v(x,y) = -\mathrm{e}^{ax} \cos(2y)/a$, $a = \pm 2$. Se $a = 2$:

$$f(z) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \sin(2y) - \frac{i}{2}\mathrm{e}^{2x} \cos(2y) + c = -\frac{i}{2}\mathrm{e}^{2z} + c;$$

se $a = -2$:

$$f(z) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \sin(2y)/2 + \frac{i}{2}\mathrm{e}^{-2x} \cos(2y)/2 + c = \frac{i}{2}\mathrm{e}^{-2z} + c.$$

2.4.8

Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = a\,x^2 + y^2$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Determinare tali funzioni.

Soluzione. Cerchiamo i valori di a per i quali u è armonica cioè

$$\Delta_2 u = 2\,a + 2 = 0 \iff a = -1.$$

Quindi $u(x,y) = -x^2 + y^2$. Le funzioni olomorfe cercate sono

$$f(x,y) = -x^2 + y^2 + iv(x,y)$$

con v coniugata armonica di u:

$$v_x = -u_y = -2y, \quad v_y = u_x = -2x.$$

Si riconosce che $v(x,y) = -2xy + c$. Quindi

$$f(z) = -x^2 + y^2 - 2ixy + c = -z^2 + c.$$

2.4.9

Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (6z^5 + 7z^6)\,dz$$

con γ una curva regolare del piano complesso di punto iniziale $1+i$ e punto finale $2-i$.

Soluzione. La funzione integranda $f(z) = 6z^5 + 7z^6$ è intera quindi l'integrale non dipende dal percorso scelto. Dato che una primitiva di f in $\mathbb{C}$ è $F(z) = z^6 + z^7$ si ottiene

$$\int_\gamma (6z^5 + 7z^6)\,dz = F(2-i) - F(1+i) = -403 + i.$$

2.5 Serie

2.5.1

Studiare il comportamento delle seguenti serie di potenze nella chiusura del loro campo di convergenza:

$$\text{a)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{2^k}; \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k; \qquad \text{c)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+3)^k}{(k+1)2^k};$$

$$\text{d)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{\sqrt{k}} z^k}{k}; \qquad \text{e)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} z^{2k}}{2k}; \qquad \text{f)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k! z^k}{k^k};$$

$$\text{g)}\ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(k-2)! z^k}{k^k}; \quad \text{h)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} [1-(-2)^k] z^k; \quad \text{i)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k^2} z^k,\ 0 < a < 1.$$

Soluzione. a) La serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{2^k}$$

ha raggio di convergenza

$$R = (\operatorname{maxlim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} = 2.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 2$ e non converge se $z : |z| > 2$. La serie non converge in alcun punto $z : |z| = 2$ perchè non è verificata la C.N. per la convergenza delle serie:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k z^k| = 1 \neq 0.$$

b) La serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$$

ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = 4.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 4\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 4$ e non converge se $z : |z| > 4$. La serie non converge in alcun punto $z : |z| = 4$ perchè non è verificata la C.N. per la convergenza delle serie. Infatti, se $|z| = 4$,

$$\lim_{k\to+\infty} |a_k z^k| = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} \right) \sqrt{k} = \sqrt{\pi} \cdot \infty = +\infty$$

dato che, per la formula di Wallis,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!\sqrt{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}.$$

c) La serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+3)^k}{(k+1)2^k}$$

ha raggio di convergenza

$$R = (\text{maxlim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[k]{(k+1)}} \right)^{-1} = 2.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z+3| < 2\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z+3| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 2$ e non converge se $z : |z+3| > 2$.

Con il cambio di variabile $w = (z+3)/2$ ci riconduciamo alla serie di potenze
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{(k+1)} \tag{2}$$
con raggio di convergenza $R = 1$. Dato che la successione $\{1/(k+1)\} \searrow 0$ possiamo applicare il Teorema di Picard. Quindi la serie (7) converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{w : |w| \leq 1\}$, non contenente il punto $w = 1$. Nel punto $w = 1$ la serie diverge.

Quindi la serie iniziale converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{z \in \mathbb{C} : |z+3| \leq 2\}$ e non contenente il punto $z = -1$. Nel punto $z = -1$ la serie diverge positivamente. Se $z : |z+3| = 2$, la serie diverge assolutamente (cioè diverge la serie dei moduli).

d) La serie di potenze
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{\sqrt{k}} z^k}{k}$$
ha raggio di convergenza
$$R = (\operatorname{maxlim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{3^{1/\sqrt{k}}}{\sqrt[k]{k}}\right)^{-1} = 1.$$
Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$ e non converge se $z : |z| > 1$. La serie non converge in alcun punto $z : |z| = 1$. Infatti non è verificata la C.N. per la convergenza delle serie dato che
$$\lim_{k\to\infty} |a_k z^k| = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{\sqrt{k}}}{k} = +\infty.$$

e) Se effettuiamo il cambio di variabile $w = -(2z)^2$ nella serie di potenze
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} z^{2k}}{2k}$$
ci riconduciamo a studiare la serie di potenze
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{w^k}{2k}. \tag{3}$$

Ha raggio di convergenza $R = 1$. Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie (8) converge assolutamente $\forall w \in \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, converge totalmente in $\{w \in \mathbb{C} : |w| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$ e non converge se $w : |w| > 1$. Dato che la successione $\{1/(2k)\} \searrow 0$, possiamo applicare il Teorema di Picard e dire che la serie (8) converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ e non contenente il punto $w = 1$. Nel punto $w = 1$ la serie diverge positivamente. Se $w : |w| = 1$ la serie diverge assolutamente (diverge la serie dei moduli).

Ricordando il cambio di variabile iniziale deduciamo che la serie di potenze iniziale ha raggio di convergenza $R = 1/2$. Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1/2$ e non converge se $z : |z| > 1/2$. Inoltre la serie converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2\}$ e non contenente i punti $\{z = \pm i/2\}$. Nei punti $z = \pm i/2$ la serie diverge positivamente. Se $z : |z| = 1/2$ la serie diverge assolutamente.

f) La serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k! z^k}{k^k}$$

ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e}.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{e}\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < \mathrm{e}$, e non converge se $z : |z| > \mathrm{e}$. La serie non converge in alcun punto $z : |z| = \mathrm{e}$ perchè non è verificata la C.N. per la convergenza delle serie. Infatti, se $|z| = \mathrm{e}$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} |a_k z^k| = \lim_{k\to+\infty} \frac{k! e^k}{k^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k! e^k}{k^k \sqrt{k}}\right) \sqrt{k} = +\infty.$$

Nel calcolo dell'ultimo limite usiamo la formula di De Moivre-Stirling:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k! e^k}{k^k \sqrt{k}} = \sqrt{2\,\pi}.$$

g) La serie di potenze

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(k-2)! z^k}{k^k}$$

ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \frac{k+1}{k-1} = \mathrm{e}.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{e}\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < \mathrm{e}$, e non converge se $z : |z| > \mathrm{e}$.

Verifichiamo che la serie converge totalmente in tutto il disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \mathrm{e}\}$. Infatti, se $|z| \leq \mathrm{e}$,

$$\left| \frac{(k-2)! z^k}{k^k} \right| \leq \frac{(k-2)!\,\mathrm{e}^k}{k^k}$$

e la serie numerica

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-2)!\,\mathrm{e}^k}{k^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_k \sqrt{k}}{(k-1)(k-2)}; \qquad x_k = \frac{k!\mathrm{e}^k}{k^k \sqrt{k}}$$

converge per il criterio dell'ordine di infinitesimo. Infatti

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{x_k \sqrt{k}}{(k-1)(k-2)}}{\dfrac{1}{k^{3/2}}} = \lim_{k\to+\infty} x_k \frac{k^2}{(k-1)(k-2)} = \sqrt{2\pi}$$

e la serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

converge.

h) La serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [1 - (-2)^k] z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, z^k,\ a_k = \begin{cases} 1 - 2^k, & k \text{ pari} \\ 1 + 2^k, & k \text{ dispari} \end{cases}$$

ha raggio di convergenza $R = 1/2$. Infatti

$$2\,\frac{1}{\sqrt[k]{2}} \leq 2\sqrt[k]{1 - \frac{1}{2^k}} \leq \sqrt[k]{|a_k|} \leq 2\sqrt[k]{1 + \frac{1}{2^k}} \leq 2\,\sqrt[k]{2}$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1/2$ e non converge se $z : |z| > 1/2$. La serie non converge in alcun punto $z : |z| = 1/2$ dato che non è verificata la C.N. per la convergenza delle serie. Infatti si ha

$$\lim_{k\to\infty} |a_k z^k| = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = 1.$$

i) La serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^{k^2} z^k, \;\; 0 < a < 1$$

ha raggio di convergenza

$$R = (\lim_{k\to\infty} a^k)^{-1} = +\infty.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$ e converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $\rho > 0$.

2.5.2

Studiare il comportamento delle seguenti serie di potenze nella chiusura del loro campo di convergenza:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left\{1 - \cos\left[\frac{\pi}{2(k+1)}\right]\right\} z^{2k}$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[(k+1)(2z+i)]^k}{k^{k+2}}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k^\alpha \log(k)}$; *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{4k}}{3k^\alpha + 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. *a)* La serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\{1 - \cos\left[\frac{\pi}{2(k+1)}\right]\right\} z^{2k}$$

ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \cos\left[\frac{\pi}{2(k+1)}\right]}{\frac{\pi}{2(k+1)}} \frac{\frac{\pi}{2(k+2)}}{1 - \cos\left[\frac{\pi}{2(k+2)}\right]} \frac{k+2}{k+1} = 1.$$

Inoltre la serie di potenze converge totalmente nel disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Infatti si ha

$$\left| \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi}{2(k+1)} \right] \right\} z^{2k} \right| \leq 1 - \cos \left[\frac{\pi}{2(k+1)} \right], \qquad z: \ |z| \leq 1$$

e la serie a termini positivi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \cos \left[\frac{\pi}{2(k+1)} \right] \right)$$

converge per il criterio dell'ordine di infinitesimo dato che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1 - \cos \left[\frac{\pi}{2(k+1)} \right]}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

e la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

converge.

La serie di potenze non converge se $|z| > 1$.

b) La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[(k+1)(2z+i)]^k}{k^{k+2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k (k+1)^k}{k^{k+2}} (z + i/2)^k$$

ha raggio di convergenza

$$R = (\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} = (2 \lim_{k \to \infty} (1 + \frac{1}{k}) \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}})^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Inoltre la serie converge totalmente nel disco $\{z \in \mathbb{C} : |z + i/2| \leq 1/2\}$. Infatti si ha

$$\left| \frac{2^k (k+1)^k}{k^{k+2}} (z + i/2)^k \right| \leq \frac{(k+1)^k}{k^{k+2}}, \qquad z: |z + i/2| \leq 1/2$$

e la serie a termini positivi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+2}}$$

converge per il criterio dell'ordine di infinitesimo dato che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^k}{k^{k+2}}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

La serie di potenze non converge se $|z+i/2| > 1/2$.

c) Consideriamo la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k^\alpha \log(k)} \ , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se effettuiamo il cambio di variabile $\zeta = -z^2$ ci riconduciamo a studiare la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta^k}{k^\alpha \log(k)} \ , \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

La serie (9) ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Quindi

- se $\alpha > 1$: la serie (9) converge totalmente nel disco $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1\}$ dato che in D

$$\left| \frac{\zeta^k}{k^\alpha \log(k)} \right| \leq \frac{1}{k^\alpha}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$$

  e non converge se $|\zeta| > 1$;

- se $0 \leq \alpha \leq 1$: per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie (9) converge assolutamente $\forall \zeta \in \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, converge totalmente in $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|\zeta| > 1$. Dato che $\{\frac{1}{k^\alpha \log(k)}\} \searrow 0$, per il Teorema di Picard la serie (9) converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1\}$ e non contenente il punto $\zeta = -1$; in $\zeta = -1$ la serie diverge positivamente ; la serie diverge assolutamente se $\zeta : |\zeta| = 1$;

- se $\alpha < 0$: per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie (9) converge assolutamente $\forall \zeta \in \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, converge totalmente in $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|\zeta| > 1$. La serie (9) non converge in alcun punto $\zeta : |\zeta| = 1$ perché non é verificata la C.N. per la convergenza.

Possiamo concludere che

- Se $\alpha > 1$: la serie iniziale converge totalmente nel disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$; non converge se $|z| > 1$;

- se $0 \leq \alpha \leq 1$: per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie iniziale converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|z| > 1$. Per il Teorema di Picard la serie iniziale converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e non contenente i punti $z = \pm i$; in $z = \pm i$ la serie diverge positivamente ; la serie iniziale diverge assolutamente se $z : |z| = 1$;

- se $\alpha < 0$: per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie iniziale converge assolutamente se $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|z| > 1$. La serie non converge in alcun punto $z : |z| = 1$.

d) Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{4k}}{3k^\alpha + 2}, \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se effettuiamo il cambio di variabile $\zeta = -z^4$ ci riconduciamo a studiare la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\zeta^k}{3k^\alpha + 2}, \; \alpha \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

La serie (10) ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Se $\alpha > 1$: la serie (10) converge totalmente nel disco $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1\}$ dato che

  $$\left| \frac{\zeta^k}{3k^\alpha + 2} \right| \leq \frac{1}{3k^\alpha + 2}, \quad \forall \zeta : |\zeta| \leq 1$$

  e

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k^\alpha + 2}$$

  converge per $\alpha > 1$; la serie (10) non converge se $|\zeta| > 1$;

- se $0 < \alpha \leq 1$: campo di convergenza $C = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$; per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente se $\zeta \in C$, converge totalmente in $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|\zeta| > 1$. Dato che $\{\frac{1}{3k^\alpha+2}\} \searrow 0$ per il Teorema di Picard la serie converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1\}$ e non contenente il punto $\zeta = 1$; nel punto $\zeta = 1$ la serie diverge positivamente; la serie diverge assolutamente se $\zeta : |\zeta| = 1$;

- se $\alpha \leq 0$: campo di convergenza $C = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$; per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente se $\zeta \in C$, converge totalmente in $\{\zeta \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|\zeta| > 1$. La serie non converge in alcun punto $\zeta : |\zeta| = 1$ perchè non è verificata la C.N. di convergenza:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k \zeta^k| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3k^\alpha + 2} = \frac{1}{2}.$$

Possiamo concludere che

- se $\alpha > 1$: la serie converge totalmente nel disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$; non converge se $|z| > 1$;

- se $0 < \alpha \leq 1$: per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|z| > 1$. Per il Teorema di Picard la serie converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e non contenente i punti $\{z = z_k,\ k = 0, 1, 2, 3\}$ dove $z_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)$; nei punti z_k, $k = 0, 1, 2, 3$ la serie diverge positivamente; la serie diverge assolutamente se $z : |z| = 1$;

- se $\alpha \leq 0$: per il teorema di Cauchy-Hadamard la serie converge assolutamente $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$, non converge se $|z| > 1$. La serie non converge in alcun punto $z : |z| = 1$.

2.5.3

Determinare l'insieme di convergenza e la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k ; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+z^2}\right)^k .$$

Soluzione. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k.$$

Con il cambio di variabile $w = \frac{z}{1+z}$ ci riconduciamo alla serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w} \qquad \text{se} \qquad |w| < 1. \tag{6}$$

Quindi l'insieme di convergenza è

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |1+z|\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1/2\}$$

e la somma in C è $1 + z$.

Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+z^2}\right)^k.$$

Con il cambio di variabile $w = \dfrac{z}{1+z^2}$ ci riconduciamo alla serie geometrica (11), che converge se $|w| < 1$. Quindi l'insieme di convergenza è

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |1+z^2|\} = \{z \in \mathbb{C} : (\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z))^2+\mathrm{Re}^2(z)+1 > 3\,\mathrm{Im}^2(z)\}$$

e la somma in C è $\dfrac{1+z^2}{1+z^2-z}$.

2.5.4

Sia

$$f(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k+1)z^k.$$

Determinare il campo di olomorfia di f. Determinare $f(i/2)$.

Soluzione. La serie di potenze

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k+1)z^k$$

ha raggio di convergenza $R = 1$. La sua somma f è olomorfa nel campo di convergenza $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Osservando che, in C, si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kz^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)z^k = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

e, quindi,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)z^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)z^{k-1} = \frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1-z} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

si ha:

$$f(z) = z\Big[\sum_{k=2}^{+\infty} k(k+1)z^{k-1}\Big] = z\Big[\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)z^{k-1} - 2\Big] = z\Big[\frac{2}{(1-z)^3} - 2\Big].$$

Quindi

$$f(\frac{i}{2}) = i\,[\Big(1-\frac{i}{2}\Big)^{-3} - 1] = \frac{6i-11}{2-11i} = -\frac{88+109i}{125}.$$

2.5.5

Dimostrare che la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

converge a $\frac{1}{1-z}$ per ogni $z \in B = \{z : |z| < 1\}$; converge uniformemente in $D_r = \{z : |z| \leq r\}$, $0 < r < 1$ ma non converge uniformemente in B.

Soluzione. La serie geometrica ha raggio di convergenza $R = 1$ e la somma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

è una funzione olomorfa in $B = \{z : |z| < 1\}$. Dato che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad -1 < x < 1,$$

le due funzioni $1/(1-z)$ e $f(z)$, olomorfe in B, coincidono sull'intervallo $(-1, 1)$ della retta reale. Per il secondo principio di identità delle funzioni olomorfe

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z \in B.$$

Per il teorema di Cauchy-Hadamard la convergenza è totale (e quindi uniforme) nel disco D_r, con $0 < r < 1$.

Se la serie convergesse uniformemente in B allora

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in B}\left|\frac{1}{1-z}-\sum_{k=0}^{n}z^k\right|=0.$$

Ma

$$\sup_{z\in B}\left|\frac{1}{1-z}-\sum_{k=0}^{n}z^k\right|=\sup_{z\in B}\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1-z^n}{1-z}\right|=\sup_{z\in B}\left|\frac{z^n}{1-z}\right|\geq\sup_{z\in B}\frac{|z|^n}{1-|z|}=+\infty.$$

2.5.6

Prevedere i valori dei raggi di convergenza dello sviluppo in serie di Taylor di f di centro z_0, nei seguenti casi:

i) $f(z)=\dfrac{1}{1-z}\,,\ z_0=3;$

ii) $f(z)=\dfrac{1}{2-z^2}\,,\ z_0=0;$

iii) $f(z)=\dfrac{1}{z}\,,\ z_0=1;$

iv) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}\,,\ z_0=0;$

v) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z+1}\,,\ z_0=3;$

vi) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z-i)}\,,\ z_0=0;$

vii) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}\,,\ z_0=0.$

Trovare effettivamente gli sviluppi in serie e confermare le previsioni fatte.

Soluzione. *i)* Il raggio di convergenza è $R=\mathrm{dist}(z_0,\partial A)=\mathrm{dist}(z_0,1)=2$. Si ha, per $z:|z-3|<2$,

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+(z-3)/2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Big(\frac{z-3}{2}\Big)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(z-3)^k}{2^{k+1}}.$$

ii) Il raggio di convergenza è $R=\mathrm{dist}(z_0,\partial A)=\mathrm{dist}(z_0,\pm\sqrt{2})=\sqrt{2}$. Si ha, per $z:|z|<\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{2-z^2}=\frac{1}{2[1-(z/\sqrt{2})^2]}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{2^{k+1}}.$$

iii) Il raggio di convergenza è $R = \text{dist}(z_0, \partial A) = \text{dist}(z_0, 0) = 1$. Si ha, per $z : |z-1| < 1$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k.$$

iv) Il raggio di convergenza è $R = \text{dist}(z_0, \partial A) = \min\{\text{dist}(z_0, 1), \text{dist}(z_0, 2)\} = 1$. Si ha, per $z : |z| < 1$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\Big)z^k.$$

v) Il raggio di convergenza è $R = \text{dist}(z_0, \partial A) = \text{dist}(z_0, -1) = 4$. Se $z : |z-3| < 4$, dall'essere

$$2z+3 = 2(z-3)+9;$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+(z-3)/4} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Big(\frac{z-3}{4}\Big)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(z-3)^k}{4^{k+1}}$$

segue che

$$\frac{2z+3}{z+1} = \frac{2(z-3)+9}{z+1} = 2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(z-3)^{k+1}}{4^{k+1}} + 9\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(z-3)^k}{4^{k+1}} =$$

$$= \frac{9}{4} + \sum_{h=1}^{+\infty}\Big[2\frac{(-1)^{h+1}}{4^h} + 9\frac{(-1)^h}{4^{h+1}}\Big](z-3)^h = \frac{9}{4} + \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{4^{h+1}}(z-3)^h.$$

vi) Il raggio di convergenza è $R = \text{dist}(z_0, \partial A) = \min\{\text{dist}(0, 1), \text{dist}(0, i)\} = 1$. Decomponiamo $f(z)$ in somma di funzioni razionali semplici:

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-i)} = \frac{1-i}{2}\frac{1}{z+1} + \frac{1+i}{2}\frac{1}{z-i}.$$

Se $|z| < 1$:

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k;$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{i}{1+i\,z} = i\sum_{k=0}^{\infty}(-i\,z)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^{k+1}\,z^k;$$

Quindi, per $|z| < 1$,

$$\frac{z}{(z+1)(z-i)} = \frac{1-i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k - \frac{1+i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^{k+1}z^k = \frac{1-i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^k-(-i)^k)z^k.$$

vii) Il raggio di convergenza è $R = \mathrm{dist}(z_0, \partial A) = \min\{\mathrm{dist}(0,1), \mathrm{dist}(0,2)\} = 1$. Decomponiamo $f(z)$ in somma di funzioni razionali semplici:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = 1 - \frac{4}{2-z} + \frac{1}{1-z}$$

Se $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k;$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}.$$

Quindi

$$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = 1 - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)z^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)z^k$$

2.5.7

Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z) = \mathrm{e}^z \cos z$ intorno al punto $z_0 = 0$.

Soluzione. Dato che

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}, \qquad R = \infty$$

e $\cos z = (\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz})/2$ si ottiene

$$\mathrm{e}^z \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{(i+1)z} + \mathrm{e}^{(1-i)z}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+i)^k z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-i)^k z^k}{k!}\right).$$

Si ha

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \Longrightarrow (1+i)^k = (\sqrt{2})^k(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4});$$

$$1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}) \Longrightarrow (1+i)^k=(\sqrt{2})^k(\cos\frac{k\pi}{4}-i\sin\frac{k\pi}{4}).$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}((1+i)^k+(1-i)^k)=(\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4}.$$

Si ottiene

$$\mathrm{e}^z\ \cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^k\ \cos\frac{k\pi}{4}}{k!}\,z^k,\quad z\in\mathbb{C}.$$

2.5.8

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z)=\log z$ (determinazione principale) in un intorno del punto $z=-3+i$. Determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

Soluzione. La determinazione principale del logaritmo è olomorfa in $A=\mathbb{C}\setminus\{z:\mathrm{Im}z=0,\mathrm{Re}z\le 0\}$. Quindi $f(z)=\log z$ è sviluppabile in serie di potenze di centro $z_0=-3+i$ nell'insieme $\{z:\ |z-z_0|<\mathrm{dist}(z_0,\partial A)=\mathrm{Im}z_0=1\}$. Osservando che in questo insieme $\log z$ è una primitiva di $1/z$, si ha:

$$\log z-\log z_0=\int_{z_0}^{z}\frac{1}{\zeta}\,d\zeta=\int_{z_0}^{z}\frac{1}{\zeta-z_0+z_0}\,d\zeta=\frac{1}{z_0}\int_{z_0}^{z}\frac{1}{1-\frac{z_0-\zeta}{z_0}}\,d\zeta.$$

Dato che $|z_0-\zeta|<\mathrm{Im}z_0\le|z_0|$ possiamo scrivere

$$\log z-\log z_0=\frac{1}{z_0}\int_{z_0}^{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-\zeta}{z_0}\right)^k\,d\zeta.$$

La convergenza della serie è uniforme lungo ogni curva regolare contenuta in $\{z:\ |z-z_0|<1\}$. Quindi, per $z:\ |z-z_0|<1$:

$$\log z-\log z_0=\frac{1}{z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{z_0-\zeta}{z_0}\right)^k\,d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}}\ \frac{(\zeta-z_0)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_{z_0}^{z}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)\,z_0^{k+1}}(z-z_0)^{k+1},\quad z_0=-3+i.$$

Si ottiene

$$\log z=\log\sqrt{10}+i\arg(-3+i)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,(-3+i)^k}(z+3-i)^k,\quad |z+3-i|<1.$$

La serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\,(-3+i)^k}(z+3-i)^k$$

ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \sqrt{10}.$$

2.5.9

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z) = \sqrt{z+1}$ (determinazione principale) in un intorno del punto $z = 0$. Determinare il raggio di convergenza della serie.

Soluzione. La funzione $f(z) = \sqrt{1+z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im} z = 0, \mathrm{Re} z \leq -1\}$. Quindi è sviluppabile in serie di potenze di centro l'origine in $\{z : |z| < \mathrm{dist}(0, \partial A) = 1\}$.

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} z^k, \quad |z| < 1 \qquad \text{serie binomiale}$$

che ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{1/2}{k}}{\binom{1/2}{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{1/2-k} \right| = 1$$

La somma $g(z)$ è olomorfa in $\{z : |z| < 1\}$. Si ha $g(x) = \sqrt{1+x}$ per $-1 < x < 1$ (serie binomiale in $\mathbb{R}$). Per i principi di identità delle funzioni olomorfe $f(z) = g(z)\ \forall z : |z| < 1$ cioè

$$\sqrt{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} z^k, \quad |z| < 1.$$

2.5.10

Determinare il campo di olomorfia della funzione $f(z) = \log \frac{1-z}{1+z}$ (determinazione principale). Sviluppare $f(z)$ in serie di Taylor di centro 0. Determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

Soluzione. $f(z) = \log \frac{1-z}{1+z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im} z = 0, |\mathrm{Re} z| \geq 1\}$. Quindi $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro l'origine in $\{z : |z| < \mathrm{dist}(0, \partial A) = 1\}$. Dato che

$$\frac{d}{dz} \log \frac{1-z}{1+z} = \frac{-2}{1-z^2} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}, \quad |z| < 1$$

allora

$$f(z) - f(0) = \log \frac{1-z}{1+z} = \int_0^z -2 \sum_{k=0}^{\infty} w^{2k}\, dw = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^z w^{2k}\, dw = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$$

e il raggio di convergenza della serie è $R = 1$.

2.6 Singolarità isolate

2.6.1

Sviluppare in serie di Laurent di punto iniziale $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$$

in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ e in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

Soluzione. Si ha, per $|z| < 2$:

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}.$$

La serie ottenuto derivando termine a termine

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^k}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{z^{k-1}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{2^{k+2}}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie iniziale. Inoltre

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{2^{k+2}}.$$

Si ha, per $|z| > 2$:

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - 2/z} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^{k+1}}.$$

La serie converge totalmente in ogni compatto contenuto in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. La serie ottenuto derivando termine a termine

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{2^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{2^k}{z^{k+2}}$$

converge totalmente in ogni compatto contenuto in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. Quindi in questo insieme si può derivare per serie

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{2-z} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{2^k}{z^{k+2}}.$$

2.6.2

Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{2z - z^2}$$

a) intorno al punto $z_0 = 0$
b) intorno al punto $z_0 = 2$.

Soluzione. a) Si ha, per $z : 0 < |z| < 2$,

$$\frac{1}{z(2-z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2z} \frac{1}{1 - z/2} = \frac{1}{2z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^k}{2^{k+2}}.$$

b) Si ha, per $z : 0 < |z-2| < 2$,

$$\frac{1}{z(2-z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(1 + (z-2)/2)} + \frac{1}{2-z}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z-2)^k}{2^{k+2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} = \sum_{k=-1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z-2)^k}{2^{k+2}}.$$

2.6.3

Sia

$$f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Determinare il modulo di f e determinare per quali z tale modulo vale 1.

Soluzione. Si ha

$$f(z) = \exp(\exp(z)) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x (\cos(y) + i \sin(y))} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x \cos(y)} \mathrm{e}^{i \mathrm{e}^x \sin(y)}.$$

Quindi

$$|f(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x \cos(y)}.$$

Sia ha

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x \cos(y)} = 1 \iff \mathrm{e}^x \cos(y) = 0 \iff y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$|f(z)| = 1 \iff z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2.6.4

Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$$

intorno al punto $z_0 = -1$. Che tipo di singolarità è il punto $z_0 = -1$?

Soluzione. Si ha, per $z : |z+1| > 0$,

$$\cos\left(\frac{1}{z+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z+1)^{2k}};\ \sin\left(\frac{1}{z+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2k+1}}.$$

Quindi, dall'essere

$$\sin\left(\frac{z}{z+1}\right) = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \sin(1)\cos\left(\frac{1}{z+1}\right) - \cos(1)\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

si ottiene

$$\sin\left(\frac{z}{z+1}\right) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{a_{-h}}{(z+1)^h}$$

dove

$$a_{-(2k)} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\sin(1),\quad a_{-(2k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\cos(1),\quad k \geq 0.$$

Pertanto il punto $z_0 = -1$ è una singolarità essenziale per f.

2.6.5

Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{4+z}{z^3+3\,z^2}$$

a) nell'insieme $0 < |z| < 3$;
b) nell'insieme $3 < |z| < \infty$.

Soluzione. Per $0 < |z| < 3$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{4+z}{z^3+3\,z^2} &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2(z+3)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3z^2}\frac{1}{1+z/3} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}z^k = \frac{4}{3z^2} - \frac{1}{9z} + \sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h z^h}{3^{h+3}}.\end{aligned}$$

Per $|z| > 3$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{4+z}{z^3+3\,z^2} &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3+3\,z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\frac{1}{1+3/z} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^k}{z^k} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^k}{z^{k+3}}.\end{aligned}$$

2.6.6

Classificare l'origine come singolarità, sia calcolando lo sviluppo di Laurent, sia utilizzando la via più breve, nei seguenti casi:

$$\frac{\sin(z^4)}{z}, \quad \frac{1-\exp(-z)}{z}, \quad \frac{\exp(-1/z^2)}{z}, \quad z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

Soluzione.

- Sia $f(z) = \dfrac{\sin(z^4)}{z}$. Si ha, se $z : |z| > 0$,

$$\frac{\sin(z^4)}{z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{4(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{8k+3}.$$

Pertanto $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile per $f(z)$. Si arriva alla stessa conclusione osservando che

$$\lim_{z\to 0} f(z)\,z = \lim_{z\to 0}\sin(z^4) = 0 \iff z_0 = 0 \quad \text{eliminabile.}$$

- Sia $f(z)=\dfrac{1-\exp(-z)}{z}$. Si ha, se $z:|z|>0$,

$$\frac{1-\exp(-z)}{z}=\frac{1}{z}\Big(1-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^k}{k!}\Big)=-\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}z^k.$$

Pertanto $z_0=0$ è una singolarità eliminabile per $f(z)$. Si arriva alla stessa conclusione osservando che

$$\lim_{z\to 0} f(z)\,z=\lim_{z\to 0}[1-\exp(-z)]=0.$$

- Sia $f(z)=\dfrac{\exp(-1/z^2)}{z}$. Si ha, se $z:|z|>0$,

$$\frac{\exp(-1/z^2)}{z}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!z^{2k}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z^{2k+1}}.$$

Pertanto $z_0=0$ è una singolarità essenziale per $f(z)$. Si arriva alla stessa conclusione dimostrando che non esiste $\lim\limits_{z\to 0}|f(z)|$. Infatti

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(-1/x^2)}{|x|}=0;\ \lim_{y\to 0}|f(iy)|=\lim_{y\to 0}\frac{\exp(1/y^2)}{|y|}=+\infty.$$

Quindi

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|=0;\ \ \limsup_{z\to 0}|f(z)|=+\infty.$$

- Sia $f(z)=z^3\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Si ha, se $z:|z|>0$,

$$z^3\sin\left(\frac{1}{z}\right)=z^3\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k-2}}.$$

Quindi $z_0=0$ è una singolarità essenziale per $f(z)$. Si arriva alla stessa conclusione dimostrando che non esiste $\lim\limits_{z\to 0}|f(z)|$. Infatti

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{x\to 0}|x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)|=0;$$

$$\lim_{y\to 0^+}|f(iy)|=\lim_{y\to 0^+}|y^3\sin\left(\frac{i}{y}\right)|=\lim_{y\to 0^+}y^3|\frac{e^{-1/y}-e^{1/y}}{2}|=$$

$$=\lim_{y\to 0^+}y^3e^{1/y}|\frac{e^{-2/y}-1}{2}|=\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{1/y}}{(1/y)^3}\frac{1-e^{-2/y}}{2}=+\infty.$$

Segue che

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|=0;\ \ \limsup_{z\to 0}|f(z)|=+\infty.$$

2.6.7

Determinare e classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

$$\frac{\exp(z)-1}{z}\,,\quad \frac{1}{z^4}\,,\quad \exp\!\left(\frac{1}{z^2}\right),\quad \frac{z}{\sin(z)}$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right),\quad z\sin\left(\frac{1}{z}\right),\quad \tanh(z)\,,\quad \frac{1-\cos(z)}{\exp(2iz)-1}$$

Soluzione.

- La funzione $f(z)=\dfrac{\exp(z)-1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus 0$. f ha in $z_0=0$ una singolarità isolata. Dall'essere

$$\lim_{z\to 0} f(z)\,z=\lim_{z\to 0}[\exp(z)-1]=0$$

  segue che $z_0=0$ è una singolarità eliminabile.

- La funzione $f(z)=1/z^4$ ha in $z_0=0$ una singolarità isolata. Dall'essere

$$\lim_{z\to 0} f(z)\,z^4=1$$

  segue che $z_0=0$ è una singolarità polare di ordine 4.

- La funzione $f(z)=\mathrm{e}^{1/z^2}$ ha in $z_0=0$ una singolarità isolata. Dimostro che non esiste $\lim_{z\to 0}|f(z)|$. Infatti

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{x\to 0}\exp(1/x^2)=+\infty;\ \lim_{y\to 0}|f(iy)|=\lim_{y\to 0}\exp(-1/y^2)=0.$$

  Pertanto

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|=0;\ \limsup_{z\to 0}|f(z)|=+\infty.$$

  Quindi $z_0=0$ è una singolarità essenziale per f.

- La funzione $f(z)=\dfrac{z}{\sin(z)}$ ha in $z_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, delle singolarità isolate. Dall'essere

$$\lim_{z\to 0} f(z)\,z=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin(z)}=0$$

  segue che $z_0=0$ è una singolarità eliminabile per f. Sia $k\neq 0$. Risulta

$$\lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k)=\lim_{z\to z_k}\frac{z}{\frac{\sin(z)-\sin(z_k)}{z-z_k}}=(-1)^k z_k\neq 0.$$

  Ne segue che f ha in $z_k\neq 0$ un polo del primo ordine.

- La funzione $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ ha in $z_0 = 0$ una singolarità isolata. Dimostro che non esiste $\lim_{z\to 0} |f(z)|$. Infatti lungo la direzione $z = x$ non esiste
$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} |\cos(\frac{1}{x})|.$$
Pertanto $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f.

- La funzione $f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ha in $z_0 = 0$ una singolarità isolata. Dimostro che non esiste $\lim_{z\to 0} |f(z)|$. Infatti
$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} \left| x\,\sin(\frac{1}{x})\right| = 0;$$
$$\lim_{y\to 0^+} |f(iy)| = \lim_{y\to 0^+} y\,\left|\frac{e^{1/y} - e^{-1/y}}{2}\right| = \lim_{y\to 0^+} y\,e^{1/y}\left|\frac{1 - e^{-2/y}}{2}\right| = +\infty$$
Pertanto $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f.

- La funzione $f(z) = \tanh(z) = \sinh(z)/\cosh(z)$ ha in $z_k = (2k + 1)\pi i/2$, $k \in \mathbb{Z}$, delle singolarità isolate. Fissato $k \in \mathbb{Z}$, z_k è uno zero del primo ordine per $\cosh(z)$ e $\sinh(z_k) \neq 0$. Pertanto z_k è uno zero del primo ordine per $1/f$ e quindi è un polo del primo ordine per f.

- La funzione $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{\exp(2iz) - 1}$ ha in $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, delle singolarità isolate. Fissato $k \in \mathbb{Z}$, $z_{2k} = 2k\pi$ è una singolarità eliminabile per f. Infatti
$$\lim_{z\to z_{2k}} f(z) = \lim_{z\to z_{2k}} \frac{1 - \cos(z)}{\exp(2iz) - 1}$$
$$= (\text{regola di De L'Hopital}) \lim_{z\to z_{2k}} \frac{\sin(z)}{2i\exp(2iz)} = 0.$$
Fissato $k \in \mathbb{Z}$, z_{2k+1} è uno zero del primo ordine per $\exp(2iz) - 1$ e $1 - \cos(z_{2k+1}) \neq 0$. Pertanto z_{2k+1} è uno zero del primo ordine per $1/f$ e quindi è un polo del primo ordine per f.

2.6.8

Se $f(z)$ e $g(z)$ hanno entrambe un polo per $z = z_0$, segue, in generale, che $f(z)g(z)$ ha un polo nel punto $z = z_0$? Cosa si può dire della funzione $f(z)/g(z)$?

Soluzione. Sia $C = \{z : |z - z_0| < \rho\}$ e siano f, g olomorfe in $C - \{z_0\}$. Supponiamo che f abbia in z_0 un polo di ordine $n \geq 1$ e che g abbia in z_0 un polo di ordine $m \geq 1$. Allora, in $C - \{z_0\}$:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n}, \; h(z) \text{ olomorfa in } C; h(z_0) \neq 0;$$

$$g(z) = \frac{k(z)}{(z - z_0)^m}, \; k(z) \text{ olomorfa in } C; k(z_0) \neq 0.$$

Quindi, in $C - \{z_0\}$:

$$f(z)g(z) = \frac{h(z)k(z)}{(z - z_0)^{n+m}}.$$

Ne segue che esiste finito

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z)(z - z_0)^{n+m} = h(z_0)k(z_0) \neq 0$$

cioè z_0 è un polo di ordine $n + m$ per fg.

In $C - \{z_0\}$:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{h(z)}{k(z)}(z - z_0)^{m-n}.$$

Se $m > n$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

pertanto f/g ha in z_0 una singolarità eliminabile (è uno zero di ordine $m-n$).

Se $m = n$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{h(z_0)}{k(z_0)} \neq 0$$

pertanto f/g ha in z_0 una singolarità eliminabile.

Se $m < n$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}(z - z_0)^{n-m} = \frac{h(z_0)}{k(z_0)} \neq 0$$

pertanto f/g ha in z_0 un polo di ordine $n - m$.

2.6.9

Se $f(z)$ e $g(z)$ hanno entrambe una singolarità essenziale per $z = z_0$, segue, in generale, che $f(z)g(z)$ ha una singolarità essenziale in $z = z_0$?

Soluzione. No. Si considerino, per esempio, le funzioni $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ e $g(z) = \mathrm{e}^{-1/z}$. Entrambe hanno in $z_0 = 0$ una singolarità essenziale; però $f(z)g(z) = 1$ è olomorfa in tutto il piano complesso.

2.6.10

Sia
$$d(w) = \inf_{0<|z|<1} |\exp(1/z) - w|.$$
Dimostrare che $d(w)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$.

Soluzione. $d(w)$ è una funzione a valori reali. Le uniche funzioni a valori reali che sono olomorfe sono le costanti. Dimostro che $d(w)$ è costante.

Per ogni $w \in \mathbb{C}$ fissato, la funzione $f(z) = \exp(1/z) - w$ ha in $z = 0$ una singolarità essenziale. Infatti, lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno incompleto di $z_0 = 0$ è dato da
$$f(z) = (1 - w) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z^k k!}.$$
Quindi, per i teoremi di caratterizzazione delle singolarità essenziali:
$$\liminf_{z\to 0} |\exp(1/z) - w| = \sup_{r>0} \inf_{0<|z|<r} |\exp(1/z) - w| = 0,$$
cioè
$$\inf_{0<|z|<r} |\exp(1/z) - w| = 0, \forall r > 0$$
e quindi $d(w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C}$.

2.6.11

Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni intere, non identicamente nulle, tali che
$$|f(z)| \le |g(z)|, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Cosa si può dire della funzione $f(z)/g(z)$?

Soluzione. Se g non è identicamente nulla, allora ha solo zeri isolati che sono singolarità isolate per la funzione f/g. Dall'ipotesi si ha che
$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \le 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \,:\, g(z) \ne 0.$$
Ne segue quindi che f/g ha solo singolarità eliminabili cioè $\exists\, \varphi(z)$, intera, tale che
$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \,:\, g(z) \ne 0.$$
φ è una funzione intera e limitata in modulo. Per il teorema di Liouville è costante ovvero
$$f(z) = c\, g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

2.7 Singolarità isolate 2

2.7.1

Siano $f(z)$ e $g(z)$ olomorfe in A e sia $z_0 \in A$, con $g(z) \not\equiv 0$. Dimostrare che la funzione razionale $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ha in z_0 un polo oppure una singolarità eliminabile.

Soluzione. Se $g(z_0) \neq 0$ allora esiste finito $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f(z_0)}{g(z_0)}$. Quindi $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ è olomorfa in z_0.

Se z_0 è uno zero di ordine $m \geq 1$ per g e $f(z_0) \neq 0$ allora z_0 è un polo di ordine m per $\dfrac{f(z)}{g(z)}$. Infatti, dall'essere

$$g(z) = g_1(z)(z - z_0)^m,\ z \in I_{z_0},\ \text{con } g_1(z_0) \neq 0$$

segue che esiste finito e non nullo

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}(z - z_0)^m = \frac{f(z_0)}{g_1(z_0)} \neq 0.$$

Sia z_0 uno zero di ordine $m \geq 1$ per g i.e.

$$g(z) = (z - z_0)^m g_1(z),\ \text{con } g_1(z_0) \neq 0$$

e sia uno zero di ordine $n \geq 1$ per f i.e.

$$f(z) = (z - z_0)^n f_1(z),\ \text{con } f_1(z_0) \neq 0.$$

Se $m \leq n$, z_0 è una singolarità eliminabile per $\dfrac{f(z)}{g(z)}$. Infatti esiste finito

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}(z - z_0)^{n-m} \begin{cases} 0 & \text{se } n > m \\ \dfrac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)} \neq 0 & \text{se } n = m \end{cases}$$

Invece se $m > n$, z_0 è un polo di ordine $m - n$ per $\dfrac{f(z)}{g(z)}$. Infatti esiste finito e diverso da zero

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}(z - z_0)^{m-n} = \lim_{z\to z_0} \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)} \neq 0.$$

2.7.2

Dimostrare che se $f(z)$ ha in $z = z_0$ un polo, allora la funzione $\mathrm{e}^{f(z)}$ ha in z_0 una singolarità essenziale.

Soluzione. Supponimo che l'ordine del polo sia $m \geq 1$. Quindi, in un intorno incompleto di z_0, si ha

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^m}, \quad z : \ 0 < |z - z_0| < \delta$$

con $f_1(z)$ olomorfa in $\{z : |z - z_0| < \delta\}$, $f_1(z_0) = a_{-m} = A \neq 0$. Poniamo $A = |A|\mathrm{e}^{i\alpha}$. Si ha $\lim\limits_{z \to z_0} \mathrm{e}^{-i\alpha} f_1(z) = |A| \neq 0$.

Dimostriamo che non esiste $\lim\limits_{z \to z_0} |\mathrm{e}^{f(z)}|$ cioè z_0 è una singolarità essenziale per $\mathrm{e}^{f(z)}$.

Introducendo un sistema di coordinate polari $z = z_0 + \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ si ottiene, per $0 < \rho < \delta$ e $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$f(z) = f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{i\theta}) = f_1(z) \rho^{-m} \mathrm{e}^{-i\theta\, m} = \rho^{-m} (\mathrm{e}^{-i\theta\, m} \mathrm{e}^{i\alpha}) \mathrm{e}^{-i\alpha} f_1(z),$$

Consideriamo la direzione $l_1 : z = z_0 + \rho \mathrm{e}^{i\alpha/m}$. Si ha

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in l_1}} f(z) = \lim_{\rho \to 0} f_1(z_0 + \rho \mathrm{e}^{i\alpha/m}) \mathrm{e}^{-i\alpha} \rho^{-m} = \frac{|A|}{0^+} = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in l_1}} |\mathrm{e}^{f(z)}| = +\infty.$$

Consideriamo la direzione $l_2 : z = z_0 + \rho \mathrm{e}^{i(\alpha+\pi)/m}$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in l_2}} f(z) &= \lim_{\rho \to 0} f_1(z_0 + \rho \mathrm{e}^{i(\alpha+\pi)/m}) \rho^{-m} \mathrm{e}^{-i(\alpha+\pi)} \\ &= -\lim_{\rho \to 0} f_1(z_0 + \rho \mathrm{e}^{i(\alpha+\pi)/m}) \mathrm{e}^{-i\alpha} \rho^{-m} = -\frac{|A|}{0^+} = -\infty. \end{aligned}$$

Si ottiene che

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in l_2}} |\mathrm{e}^{f(z)}| = 0.$$

2.7.3

Studiare il tipo di singolarità delle seguenti funzioni e, nel caso di singolarità isolate, calcolarne i residui:

$$i)\ f(z) = \frac{1}{z^2}\,; \qquad ii)\ f(z) = \frac{z}{z^2+1}\,;$$

$$iii)\ f(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\,; \qquad iv)\ f(z) = \frac{\mathrm{e}^{z}-1}{z^3}\,;$$

$$v)\ f(z) = \frac{1}{z\sin(z)}\,; \qquad vi)\ f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{1+\mathrm{e}^{z}}\,, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$vii)\ f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4}\,; \qquad viii)\ f(z) = \frac{(\log(z))^4}{1+z^2}\,;$$

$$ix)\ f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}\,; \qquad x)\ f(z) = \operatorname{cotg}(z) - \frac{1}{z}\,;$$

$$xi)\ f(z) = \frac{1}{z(\mathrm{e}^{z}-1)}\,; \qquad xii)\ f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

$$xiii)\ f(z) = \frac{z^2}{\sin^2\frac{1}{z+1}}\,; \qquad xiv)\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{z-2}.$$

Soluzione.

i) Sia $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$. f ha in $z=0$ una singolarità isolata. Lo sviluppo di Laurent di f in un intorno incompleto di $z=0$ è proprio

$$\frac{1}{z^2} = \ldots + \frac{0}{z^4} + \frac{0}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z} + 0 + 0\,z + \ldots.$$

Pertanto $z=0$ è un polo del secondo ordine e $\mathrm{Res}(f,0)=0$.

ii) Sia $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$. I punti $z=\pm i$ sono singolarità isolate per f. Risulta

$$\lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \frac{1}{2}\,, \quad \lim_{z\to -i} f(z)(z+i) = \frac{1}{2}.$$

Pertanto i punti $z=\pm i$ sono poli del primo ordine per f e $\mathrm{Res}(f,i) = \mathrm{Res}(f,-i) = 1/2$.

iii) Sia $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$. I punti $z=\pm i$ sono singolarità isolate per f. Risulta

$$\lim_{z\to i} f(z)\,(z-i)^2 = -\frac{1}{4\mathrm{e}};\ \lim_{z\to -i} f(z)(z+i)^2 = -\frac{\mathrm{e}}{4}.$$

Pertanto i punti $z = \pm i$ sono poli del secondo ordine per f e

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[f(z)\,(z-i)^2\right] = -\frac{i}{2\mathrm{e}};$$

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z+i)^2\right] = 0.$$

iv) Sia $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^3}$. $z = 0$ è una singolarità isolata per f. Dall'essere

$$\lim_{z \to 0} f(z)\, z^2 = 1$$

segue che $z = 0$ è un polo del secondo ordine per f. Pertanto

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[f(z)\, z^2\right] = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{e}^z z - \mathrm{e}^z + 1}{z^2} = \frac{1}{2}.$$

v) Sia $f(z) = \dfrac{1}{z \sin z}$. I punti $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. Si ha

$$\lim_{z \to 0} f(z) z^2 = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1.$$

Segue che $z_0 = 0$ è un polo del secondo ordine per f e

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[f(z)\, z^2\right] = \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z) - z\cos(z)}{[\sin(z)]^2} = 0.$$

Inoltre, dato che, per $k \neq 0$,

$$\lim_{z \to z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{z \frac{\sin(z) - \sin(z_k)}{z - z_k}} = \frac{1}{z_k \cos(z_k)} = \frac{(-1)^k}{k\pi},$$

i punti z_k sono poli del primo ordine per f e $\mathrm{Res}(f, z_k) = \dfrac{(-1)^k}{k\pi}$.

vi) Sia $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{1 + \mathrm{e}^z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. I punti $z_k = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. Si ha

$$\lim_{z \to z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{\frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{z_k}}{z - z_k}} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha z_k}}{\mathrm{e}^{z_k}} = -\mathrm{e}^{\alpha z_k}.$$

Quindi i punti $z_k = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, sono poli del primo ordine e $\mathrm{Res}(f, z_k) = -\mathrm{e}^{\alpha z_k}$.

vii) Sia $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4}$. $z = -1$ è una singolarità isolata per f. Dato che

$$\lim_{z\to -1} f(z)(z+1)^4 = -1,$$

$z = -1$ è un polo del quarto ordine per f e

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to -1}\frac{d^3}{dz^3}\Big[f(z)\,(z+1)^4\Big] = \frac{1}{3!}\lim_{z\to -1}\frac{d^3}{dz^3}\cos(\pi z) = 0.$$

viii) Sia $f(z) = \dfrac{(\log z)^4}{1+z^2}$. La funzione f è olomorfa in $\mathbb{C} - \{\{z : \Im(z) = 0,\ \Re(z) \le 0\} \cup \{\pm i\}\}$. I punti $z = \pm i$ sono singolarità isolate per f. Risulta

$$\lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \frac{(\log(i))^4}{2i} = -\frac{\pi^4}{32}i;\ \lim_{z\to -i} f(z)(z+i) = \frac{(\log(-i))^4}{-2i} = \frac{\pi^4}{32}i.$$

Quindi $z = \pm i$ sono poli del primo ordine per f e

$$\mathrm{Res}(f,i) = -\frac{\pi^4}{32}i; \qquad \mathrm{Res}(f,-i) = \frac{\pi^4}{32}i.$$

ix) Sia $f(z) = \dfrac{z}{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}$. La funzione f è olomorfa in $\mathbb{C} - \{\{z_k = -1 + 1/(k\pi),\ k \ne 0\} \cup \{z_0 = -1\}\}$. I punti z_k sono singolarità isolate per f. $z_0 = -1$ non è una singolarità isolata dato che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} z_k = z_0$. Dall'essere

$$\lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k) = \lim_{z\to z_k}\frac{z}{\frac{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{z_k+1}\right)}{z-z_k}} = \frac{z_k}{\left[\frac{d}{dz}\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)\right]_{z=z_k}} =$$

$$= \frac{z_k}{\frac{-1}{(z_k+1)^2}\cos\left(\frac{1}{z_k+1}\right)} = (-1)^{k+1} z_k (z_k+1)^2 = (-1)^k\frac{k\pi-1}{k^3\pi^3},$$

i punti z_k sono poli del primo ordine per f e $\mathrm{Res}(f,z_k) = (-1)^k\dfrac{k\pi-1}{k^3\pi^3}$.

x) Sia $f(z) = \mathrm{cotg}(z) - 1/z$. I punti $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. Se $k \ne 0$,

$$\lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k) = \lim_{z\to z_k}\left(\frac{\cos(z)}{\frac{\sin(z)-\sin(z_k)}{z-z_k}} - \frac{1}{z}(z-z_k)\right) = 1.$$

Quindi i punti $z_k, k \neq 0$, sono poli del primo ordine per f e $\operatorname{Res}(f, z_k) = 1$. Dato che

$$\lim_{z\to z_0} f(z)z = \lim_{z\to z_0} \left[\frac{\cos(z)}{\frac{\sin(z)}{z}} - 1\right] = 0.$$

il punto $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile per f e $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.

xi) Sia $f(z) = \dfrac{1}{z(\mathrm{e}^z - 1)}$. I punti $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. Risulta

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\, z^2 = 1.$$

Quindi $z_0 = 0$ è un polo del secondo ordine per f e

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left[f(z)z^2\right] = \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{e}^z - 1 - z\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z - 1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Se $k \neq 0$, si ha

$$\lim_{z\to z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{z\,\frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{z_k}}{z - z_k}} = \frac{1}{z_k \mathrm{e}^{z_k}} = \frac{1}{z_k} = -\frac{i}{2k\pi}.$$

Pertanto i punti z_k, $k \neq 0$, sono poli del primo ordine e $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\dfrac{i}{2k\pi}$.

xii) Sia $f(z) = z\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$. Il punto $z = -1$ è una singolarità isolata per f. Dall'essere, per $|z + 1| > 0$,

$$\cos\left(\frac{1}{z+1}\right) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} \frac{1}{(z+1)^{2h}}$$

si ottiene il seguente sviluppo di Laurent di f in un intorno incompleto di $z = -1$:

$$f(z) = (z+1)\cos\left(\frac{1}{z+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{z+1}\right) =$$

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} \frac{1}{(z+1)^{2h-1}} - \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} \frac{1}{(z+1)^{2h}} = \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{a_k}{(z+1)^k}$$

dove $a_{2h} = (-1)^{h+1}/(2h)!$; $a_{2h-1} = (-1)^h/(2h)!$, $h \geq 0$. Quindi $z = -1$ è una singolarità essenziale per f e $\operatorname{Res}(f, -1) = -\dfrac{1}{2}$.

xiii) Sia $f(z) = \dfrac{z^2}{\sin^2 \frac{1}{z+1}}$ La funzione f è olomorfa in $\mathbb{C} - \{\{z_k = -1 + 1/(k\pi),\ k \neq 0\} \cup \{z_0 = -1\}\}$. I punti z_k sono singolarità isolate per f. $z_0 = -1$ non è una singolarità isolata ma è un punto di accumulazione per le singolarità $\{z_k\}$ dato che $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k = z_0$. Dall'essere

$$\lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k)^2 = \lim_{z\to z_k} \frac{z^2}{\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{z_k+1}\right)}{z-z_k}\right)^2} = \frac{z_k^2}{\left[\frac{d}{dz}\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)\right]^2_{z=z_k}}$$

$$= \frac{z_k^2}{\left(\frac{-1}{(z_k+1)^2}\cos\left(\frac{1}{z_k+1}\right)\right)^2} = z_k^2(z_k+1)^4 = \frac{(k\pi-1)^2}{k^6\pi^6},$$

i punti z_k sono poli del secondo ordine per f . Quindi,

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{d}{dz}\left(\frac{z\,(z-z_k)}{\sin\frac{1}{z+1}}\right)^2 = \lim_{z\to z_k} 2\left(\frac{z(z-z_k)}{\sin\frac{1}{z+1}}\right)\frac{d}{dz}\frac{z\,(z-z_k)}{\sin\frac{1}{z+1}}$$

Tenedo presenta l'esercizio *ix)*,

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = 2\,(-1)^k\frac{k\pi-1}{k^3\pi^3}\lim_{z\to z_k}\frac{d}{dz}\frac{z\,(z-z_k)}{\sin\frac{1}{z+1}} = ...$$

xiv) Sia $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{z-2}$ La funzione f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Dato che

$$\lim_{z\to 2} f(z)(z-2) = \lim_{z\to 2} \mathrm{e}^{1/(z-1)} = \mathrm{e}$$

$z = 2$ è un polo del primo ordine e $\mathrm{Res}(f, 2) = \mathrm{e}$.

Il punto $z = 1$ è una singolarità essenziale per f. Infatti non esiste $\lim\limits_{z\to 1}|f(z)|$ dato che

$$\lim_{x\to 1^+}|f(x)| = \lim_{x\to 1^+}|\frac{\mathrm{e}^{1/(x-1)}}{x-2}| = \infty;\ \lim_{x\to 1^-}|f(x)| = \lim_{x\to 1^-}|\frac{\mathrm{e}^{1/(x-1)}}{x-2}| = 0.$$

Per determinare il residuo scriviamo lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno incompleto di $z_0 = 1$. Nel nostro caso

$$\mathrm{e}^{1/(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(z-1)^k},\ |z-1| > 0;$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{k=0^{\infty}}(z-1)^k, \quad |z-1| < 1$$

e le serie convergono assolutamente. Il prodotto alla Cauchy delle due serie ha per somma la funzione $\dfrac{e^{1/(z-1)}}{z-2}$ nell'insieme $0 < |z-1| < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{e^{1/(z-1)}}{z-2} &= -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!\,(z-1)^h}(z-1)^{k-h} = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!\,(z-1)^{2h-k}} \\ &= -\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty}\frac{1}{h!\,(z-1)^{2h-k}} = -\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k - \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty}\frac{1}{h!\,(z-1)^{2h-k}}.\end{aligned}$$

Dato che il residuo è il coefficiente di $1/z$, a noi interessano gli indici $h, k : 2h - k = 1$ cioè $k = 2h - 1$. In tal caso

$$\mathrm{Res}(f, 1) = -\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h!} = -e + 1.$$

2.7.4

Calcolare, con il metodo dei residui, i seguenti integrali:

$a)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{dz}{z^2-1}\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 2$;

$b)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 3$;

$c)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{\sin(z+1)}{z(z+1)}dz\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 3$;

$d)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{z(z+1)}{\sin(z+1)}dz\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 3$;

$e)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{z^2}{(5+z)(z+i)}dz\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 2$;

$f)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{z^2}{(5+z^2)(z-3i)}dz\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 2$;

$g)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{dz}{e^z+1}\,,\quad$ dove $\gamma: |z-2i| = 2$;

$h)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\frac{dz}{\sinh(2z)}\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 2$;

$i)$ $\displaystyle\int_{+\gamma}\mathrm{tg}(z)dz\,,\quad$ dove $\gamma: |z| = 2$.

Soluzione.

a) Sia $D = \{z : |z| \leq 2\}$ e sia $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$. I punti ± 1 sono dei poli del primo ordine per f e appartengono a $D - \partial D$. Quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(f,1) + \text{Res}(f,-1)] = 2\pi i[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}] = 0.$$

b) Sia $D = \{z : |z| \leq 3\}$ e sia $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}$. I punti $\pm i$ e 2 sono dei poli del primo ordine per f e appartengono a $D - \partial D$. Quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(f,i) + \text{Res}(f,-i) + \text{Res}(f,2)]$$

$$= 2\pi i[\frac{i}{2(i-2)} + \frac{i}{2(i+2)} + \frac{4}{5}] = 2\pi i.$$

c) Sia $D = \{z : |z| \leq 3\}$ e sia $f(z) = \dfrac{\sin(z+1)}{z(z+1)}$. I punti 0 e -1 sono singolarità isolate per f e appartengono a $D - \partial D$. 0 è un polo del primo ordine per f mentre -1 è una singolarità eliminabile ($\text{Res}(f,-1) = 0$). Quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(f,0) + \text{Res}(f,-1)] = 2\pi i\text{Res}(f,0) = 2\pi i \sin(1).$$

d) Sia $D = \{z : |z| \leq 3\}$ e sia $f(z) = \dfrac{z(z+1)}{\sin(z+1)}$. I punti $z_k = k\pi - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. Solo i punti $z_0 = -1$ e $z_1 = \pi - 1$ appartengono a $D - \partial D$. z_0 è una singolarità eliminabile ($\text{Res}(f, z_0) = 0$), z_1 è un polo del primo ordine per f. Quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(f,z_1) + \text{Res}(f,z_0)]$$

$$= 2\pi i\text{Res}(f,z_1) = 2\pi i[\pi(1-\pi)] = 2\pi^2[1-\pi]i.$$

e) Sia $D = \{z : |z| \leq 2\}$ e sia $f(z) = \dfrac{z^2}{(5+z)(z+i)}$. I punti -5 e $-i$ sono singolarità isolate per f. $-5 \notin D$; $-i \in D - \partial D$ ed è un polo del primo ordine per f. Quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i\text{Res}(f,-i) = 2\pi i\Big(\frac{1}{i-5}\Big) = \frac{2\pi i}{i-5} = \frac{\pi}{13}(1-5i).$$

f) Sia $D = \{z : |z| \leq 2\}$ e sia $f(z) = \dfrac{z^2}{(5+z^2)(z-3i)}$. I punti $\pm\sqrt{5}i$ e $3i$ sono singolarità isolate per f e non appartengono a D. Dato che $f \in C^0(D) \cap H(D - \partial D)$, per il primo teorema integrale di Cauchy:

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 0.$$

g) Sia $D = \{z : |z-2i| \leq 2\}$ e sia $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$. I punti $z_k = (2k+1)\pi\, i$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. Solo il punto $z_0 = \pi i \in D - \partial D$ ed è un polo del primo ordine per f. Quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, \pi i) = -2\pi i.$$

h) Sia $D = \{z : |z| \leq 2\}$ e sia $f(z) = \dfrac{1}{\sinh(2z)}$. I punti $z_k = \frac{k\pi}{2}i$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. I punti $z_1 = \frac{\pi}{2}i, z_0 = 0, z_{-1} = -\frac{\pi}{2}i \in D - \partial D$ e sono poli del primo ordine per f. Pertanto, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_{-1})]$$

$$= 2\pi i[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}] = -\pi i.$$

i) Sia $D = \{z : |z| \leq 2\}$ e sia $f(z) = \mathrm{tg}(z)$. I punti $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono singolarità isolate per f. $z_0 = \pi/2$, $z_{-1} = -\pi/2 \in D - \partial D$ e sono dei poli del primo ordine per f. Quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_{-1})] = 2\pi i[-1-1] = -4\pi i.$$

2.7.5

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{+\partial Q} \frac{\exp(z)}{z^k} \mathrm{d}z$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$, essendo $Q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$;

$$\int_{+\partial Q} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^k} \mathrm{d}z$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$, essendo $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 4; |\Im(z)| \leq 4\}$.

Soluzione. Sia $Q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ e sia $f_k(z) = \dfrac{\exp(z)}{z^k}$. Se $k \leq 0$, la funzione f_k è olomorfa in tutto il piano complesso. Per il primo teorema integrale di Cauchy:

$$\int_{+\partial Q} f_k(z)dz = 0, \quad k \leq 0.$$

Sia $k > 0$. Il punto $z = 0$ è un polo di ordine k per f_k. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{+\partial Q} f_k(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = \frac{2\pi i}{(k-1)!}, \quad k > 0.$$

Sia $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 4; |\Im(z)| \leq 4\}$ e sia $f_k(z) = \dfrac{\cos(z)}{(z-\pi)^k}$. Se $k \leq 0$, la funzione f_k è olomorfa in tutto il piano complesso. Per il primo teorema integrale di Cauchy:

$$\int_{+\partial Q} f_k(z)dz = 0, \quad k \leq 0.$$

Sia $k > 0$. Il punto $z = \pi$ è un polo di ordine k per f_k. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{+\partial Q} f_k(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f_k, \pi) == \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \cos z\right]_{z=\pi}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{(k-1)/2} \cos \pi & k \ \text{ dispari} \\ (-1)^{k/2} \sin \pi & k \ \text{ pari} \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{(k+1)/2} & k \ \text{ dispari} \\ 0 & k \ \text{ pari} \end{cases}.$$

2.8 Teorema dei Residui

2.8.1

Studiare che tipo di singolarità è il punto $z = \infty$ nei seguenti casi

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \frac{z}{z^2+1},\\
&b) \quad 1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3},\\
&c) \quad z^2\mathrm{e}^{1/z},\\
&d) \quad \frac{1}{z^2+1},\\
&e) \quad \frac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)},\\
&f) \quad \frac{1}{\sin 1/z}.
\end{aligned}
$$

Soluzione.

a) Sia $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$. Per $|z|>1$ si ha

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z^2}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}.$$

Quindi nello sviluppo di Laurent in un intorno incompleto di $z=\infty$ si ha $Q_\infty(z)\equiv 0$ (parte singolare). Ne segue che $z=\infty$ è un punto regolare e si ha $\mathrm{Res}(f,\infty)=-1$.

b) Sia $f(z)=1-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^3}$. Quindi nello sviluppo di Laurent in un intorno incompleto di $z=\infty$ si ha la parte singolare $Q_\infty(z)\equiv 0$ e la parte regolare

$$P_\infty(z)=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}, \quad |z|>0.$$

Ne segue che $z=\infty$ è un punto regolare e si ha $\mathrm{Res}(f,\infty)=1$.

c) Sia $f(z)=z^2\mathrm{e}^{1/z}$. Per $|z|>0$ si ha

$$z^2\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,z^{k-2}}=z^2+z+\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(h+2)!z^h}.$$

Quindi nello sviluppo di Laurent in un intorno incompleto di $z=\infty$ si ha la parte singolare $Q_\infty(z)=z^2+z$ e la parte regolare

$$P_\infty(z)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(h+2)!z^h}.$$

Ne segue che $z=\infty$ è un polo del secondo ordine e si ha $\operatorname{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{6}$.

d) Sia $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$. Per $|z|>1$ si ha

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+1/z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+2}}.$$

Quindi nello sviluppo di Laurent in un intorno incompleto di $z=\infty$ si ha $Q_\infty(z)\equiv 0$ (parte singolare). Ne segue che $z=\infty$ è un punto regolare (è uno zero del secondo ordine) e $\operatorname{Res}(f,\infty)=0$.

e) Sia $f(z)=\dfrac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)}$. Per studiare la natura di $z=\infty$ studiamo la natura del punto $\zeta=0$ per la funzione $\varphi(\zeta)=f(1/\zeta)$. Si ha che

$$\lim_{\zeta\to 0}\zeta^2\varphi(\zeta)=\lim_{\zeta\to 0}\frac{\zeta^6}{\zeta^6(\zeta^2+1)(1-4\zeta^2)}=1\neq 0.$$

Quindi $\zeta=0$ è un polo del secondo ordine per φ. Ne segue che $z=\infty$ è un polo del secondo ordine per f. Per calcolare il residuo, scriviamo lo sviluppo di Laurent in un intorno incompleto di $z=\infty$. Si ha

$$\frac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)}=3+z^2+\frac{12+13z^2}{(z^2+1)(z^2-4)}=3+z^2+\frac{1}{5(z^2+1)}+\frac{64}{5(z^2-4)}$$

$$=3+z^2+\frac{1}{5z^2}\frac{1}{1+1/z^2}+\frac{64}{5z^2}\frac{1}{1-4/z^2}=3+z^2+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+2}}+\frac{64}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{2k+2}}$$

$$=3+z^2+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2k+2}}((-1)^k+4^{k+3}).$$

Quindi $\operatorname{Res}(f,\infty)=0$.

f) Sia $f(z)=\dfrac{1}{\sin 1/z}$. La funzione $\varphi(\zeta)=f(1/\zeta)=\dfrac{1}{\sin\zeta}$ ha in $\zeta=0$ un polo del primo ordine, dato che

$$\lim_{\zeta\to 0}\varphi(\zeta)\,\zeta=1.$$

Quindi $z=\infty$ è un polo del primo ordine per f.

2.8.2

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{3z+1}{z(z-1)^3}\, dz,$$

con $\gamma : |z| = 2$ orientata nel verso antiorario,

a) applicando il teorema dei residui in domini limitati ;

b) applicando il teorema dei residui in domini illimitati.

Soluzione.

a) La funzione $f(z) = \dfrac{3z+1}{z(z-1)^3}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Il punto $z_0 = 0$ è un polo del primo ordine per f e si ha

$$\mathrm{Res}(\frac{3z+1}{z(z-1)^3}, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{3z+1}{z(z-1)^3}\, z = -1.$$

Il punto $z_1 = 1$ è un polo del terzo ordine per f e si ha

$$\mathrm{Res}(\frac{3z+1}{z(z-1)^3}, 1) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2}(\frac{3z+1}{z(z-1)^3}\,(z-1)^3) = 1.$$

Posto $D = \{z : |z| \le 2\}$, si ha $z_0, z_1 \in \mathrm{int}\, D$. Applicando il teorema dei residui alla funzione f in D si trova

$$\int_{+\partial D} \frac{3z+1}{z(z-1)^3}\, dz = 2\pi\, i(\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, 1)) = 0.$$

b) Applichiamo il teorema dei residui alla funzione f nel dominio illimitato $\mathcal{D} = \{z : |z| \ge 2\}$:

$$\int_{+\partial \mathcal{D}} \frac{3z+1}{z(z-1)^3}\, dz = 2\pi\, i\mathrm{Res}(f, \infty).$$

$\zeta = 0$ è uno zero del terzo ordine per la funzione $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta) = \dfrac{\zeta^3(3+\zeta)}{(1-\zeta)^3}$. Quindi $z = \infty$ è uno zero del terzo ordine per f. Il valore del residuo negli zeri di ordine superiore al primo è zero: $\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$. Quindi

$$\int_{+\gamma} \frac{3z+1}{z(z-1)^3}\, dz = -\int_{+\partial \mathcal{D}} \frac{3z+1}{z(z-1)^3}\, dz = 0.$$

2.8.3

Calcolare
$$\int_{+\gamma} \frac{z^3}{2\,z^4+1}\,dz,$$
con $\gamma : |z| = 1$ orientata nel verso antiorario,

a) applicando il teorema dei residui in domini limitati ;

b) applicando il teorema dei residui in domini illimitati.

Soluzione. a) La funzione $f(z) = \dfrac{z^3}{2\,z^4+1}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{z^4 = -1/2\}$ Si ha
$$z^4 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(1+2k)\pi i} \to z_k = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{e}^{\frac{(1+2k)}{4}\pi i}, \quad k = 0,1,2,3.$$

Quindi f è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$. I punti $z_k, k = 0,1,2,3$ sono poli del primo ordine per f e si ha
$$\mathrm{Res}(\frac{z^3}{2\,z^4+1}, z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{z^3\,(z-z_k)}{2\,z^4+1} = \text{de l'Hopital} = \lim_{z\to z_k}\left(\frac{1}{2} - \frac{3z_k}{8z}\right) = \frac{1}{8}.$$

Posto $D = \{z : |z| \le 1\}$, si ha $z_k \in \mathrm{int}D$, $k = 0,1,2,3$. Applicando il teorema dei residui alla funzione f in D si trova
$$\int_{+\partial D} \frac{z^3}{2\,z^4+1}\,dz = 2\pi\,i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}(f, z_k) = 2\pi\,i\,4\,\frac{1}{8} = \pi\,i.$$

b) Applichiamo il teorema dei residui alla funzione f nel dominio illimitato $\mathcal{D} = \{z : |z| \ge 1\}$:
$$\int_{+\partial\mathcal{D}} \frac{z^3}{2\,z^4+1}\,dz = 2\pi\,i\mathrm{Res}(f,\infty).$$

$\zeta = 0$ è uno zero del primo ordine per la funzione $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta) = \frac{\zeta}{2+\zeta^4}$. Quindi $z = \infty$ è uno zero del primo ordine per f. Il valore del residuo negli zeri del primo ordine è dato da
$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\lim_{z\to\infty} f(z)\,z = -\lim_{\zeta\to 0}\frac{f(1/\zeta)}{\zeta} = -\lim_{\zeta\to 0}\frac{1}{2+\zeta^4} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi
$$\int_{+\gamma} \frac{z^3}{2\,z^4+1}\,dz = -\int_{+\partial\mathcal{D}} \frac{z^3}{2\,z^4+1}\,dz = \pi\,i.$$

2.8.4

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\, dz,$$

con $\gamma : |z| = 4$ orientata nel verso antiorario,

a) applicando il teorema dei residui in domini limitati ;

b) applicando il teorema dei residui in domini illimitati.

Soluzione. a) La funzione $f(z) = \dfrac{e^{1/(z-1)}}{z-2}$ ha nel dominio $D = \{z : |z| < 4\}$ due singolarità isolate nei punti $z = 1$ e $z = 2$. Applicando il teorema dei residui nel dominio D si ha

$$\int_{+\partial D} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\, dz = 2\pi\, i(\mathrm{Res}(f, 1) + \mathrm{Res}(f, 2)).$$

Nell'esercizio 7.3 abbiamo calcolato

$$\mathrm{Res}(f, 1) = -e + 1; \quad \mathrm{Res}(f, 2) = e.$$

Quindi, dato che $+\gamma = +\partial D$,

$$\int_{+\gamma} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\, dz = 2\pi\, i.$$

b) Il punto $z = \infty$ è uno zero del primo ordine per la funzione $f(z) = \dfrac{e^{1/(z-1)}}{z-2}$ dato che $\zeta = 0$ è uno zero del primo ordine per $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta) = \dfrac{\zeta e^{\zeta/(1-\zeta)}}{1-2\zeta}$. Il valore del residuo negli zeri del primo ordine è dato da

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\lim_{z\to\infty} f(z)\, z = -\lim_{\zeta\to 0} \frac{f(1/\zeta)}{\zeta} = -\frac{e^{\zeta/(1-\zeta)}}{1-2\zeta} = -1.$$

Quindi, applicando il teorema dei residui nel dominio illimitato $\mathcal{D} = \{z : |z| \geq 4\}$ si ottiene

$$\int_{+\partial\mathcal{D}} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\, dz = 2\pi\, i\, \mathrm{Res}(f, \infty) = -2\pi\, i.$$

L'orientamento $+\partial\mathcal{D}$ è quello orario. Dato che $-\partial\mathcal{D} = +\gamma$ si ritrova quindi che il valore dell'integrale richiesto è $-2\pi\, i$.

2.8.5

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx\,; \quad a, b \geq 0.$$

Soluzione. Si consideri la funzione $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iaz} - \mathrm{e}^{ibz}}{z^2}$ e sia $D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : \ r \leq |z| \leq R, \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $0 < r < R$. Per il primo teorema integrale di Cauchy

$$\int_{+\partial D_{r,R}} f(z) dz = 0.$$

D'altra parte questo integrale è uguale alla somma degli integrali lungo i segmenti $[-R, -r]$; $[r, R]$ e le semicirconferenze $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ e $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Posto

$$I_1(r, R) = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{iax} - \mathrm{e}^{ibx}}{x^2} dx; \ \ I_2(r, R) = \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{iax} - \mathrm{e}^{ibx}}{x^2} dx;$$

$$I_3(R) = \int_{+C_R} f(z) dz = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{iaR\mathrm{e}^{i\theta}} - \mathrm{e}^{ibR\mathrm{e}^{i\theta}}}{R^2 \mathrm{e}^{2\theta i}} Ri\mathrm{e}^{i\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{iaR\mathrm{e}^{i\theta}} - \mathrm{e}^{ibR\mathrm{e}^{i\theta}}}{R\mathrm{e}^{i\theta}} id\theta;$$

$$I_4(r) = \int_{+C_r} f(z) dz = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{iar\mathrm{e}^{i\theta}} - \mathrm{e}^{ibr\mathrm{e}^{i\theta}}}{r^2 \mathrm{e}^{2\theta i}} ri\mathrm{e}^{i\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{iar\mathrm{e}^{i\theta}} - \mathrm{e}^{ibr\mathrm{e}^{i\theta}}}{r\mathrm{e}^{i\theta}} id\theta$$

(l'orientamento positivo su C_r e C_R è quello subordinato dall'orientamento positivo su $\partial D_{r,R}$) si ha

$$I_1(r, R) + I_2(r, R) + I_3(R) - I_4(r) = 0. \tag{7}$$

Risulta

$$I_1(r, R) + I_2(r, R) = 2 \int_r^R \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx.$$

Inoltre, dall'essere $|I_3(R)| \leq \dfrac{2\pi}{R}$ segue che $\lim\limits_{R \to +\infty} I_3(R) = 0$. Posto

$$\phi(r, \theta) = \frac{\mathrm{e}^{iar\mathrm{e}^{i\theta}} - \mathrm{e}^{ibr\mathrm{e}^{i\theta}}}{r\mathrm{e}^{i\theta}} i, \ r > 0; \quad \phi(0, \theta) = b - a$$

la funzione $\phi(r, \theta)$ è continua in $[0, \sigma] \times [0, \pi]$, $\sigma > 0$, e si ha

$$\lim_{r \to 0} \phi(r, \theta) = \phi(0, \theta) = b - a, \quad \forall \theta \in [0, \pi].$$

Per la continuità delle funzioni definite da integrali:

$$\lim_{r\to 0} I_4(r) = I_4(0) = \int_0^{\pi} \phi(0,\theta)d\theta = \pi(b-a).$$

Quindi, da (7), per $r \to 0$ e $R \to +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx = (b-a)\frac{\pi}{2}.$$

2.8.6

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Soluzione. Posto $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ e $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R, \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$, $R > 1$, applichiamo il teorema dei residui a f nel dominio D_R. Si ha (......)

$$\int_{+\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i\Big(-\frac{i}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Parametrizzando ∂D_R, si ottiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2}d\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Risulta

$$|\int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2}d\theta| \le \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-1)^2}d\theta = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $R \to +\infty$ in (8),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2.8.7

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx.$$

Soluzione. Posto $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$ e $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $R > 3$, per il teorema dei residui si ha (......)

$$\int_{+\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,3i) + \mathrm{Res}(f,2i)] = 2\pi i[\frac{3}{50}i - \frac{13}{200}i] = \frac{\pi}{100}.$$

Parametrizzando ∂D_R, si ottiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+9)(R^2e^{2i\theta}+4)^2} Rie^{i\theta} d\theta = \frac{\pi}{100}. \quad (9)$$

Risulta

$$|\int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+9)(R^2e^{2i\theta}+4)^2} Rie^{i\theta} d\theta| \leq$$

$$\int_0^{\pi} \frac{R^3}{(R^2-9)(R^2-4)^2} d\theta = \frac{\pi R^3}{(R^2-9)(R^2-4)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $R \to +\infty$ in (9),

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{200}.$$

2.8.8

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

Soluzione. Posto $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$, $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $R > 1$, $z_0 = (1+i)/\sqrt{2}$ e $z_1 = (-1+i)/\sqrt{2}$, per il teorema dei residui si ha (......)

$$\int_{+\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,z_0) + \mathrm{Res}(f,z_1)] = 2\pi i[\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{4z_1}] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Parametrizzando ∂D_R, si ottiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}dx + \int_0^{\pi} \frac{R^3 i e^{2i\theta}}{R^4 e^{4i\theta}+1}d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Risulta

$$|\int_0^{\pi} \frac{R^3 i e^{2i\theta}}{R^4 e^{4i\theta}+1}d\theta| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4-1}d\theta = \frac{\pi R^3}{R^4-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $R \to +\infty$ in (10),

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

2.8.9

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Soluzione. Siano $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$, $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $R > 2$ e $z_1 = (-1+\sqrt{3}i)/2$. Per il teorema dei residui si ha (......)

$$\int_{+\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_1) = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Parametrizzando ∂D_R, si ottiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+x+1} + \int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+Re^{i\theta}+1}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \tag{11}$$

Risulta

$$|\int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+Re^{i\theta}+1}d\theta| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-R-1}d\theta = \frac{\pi R}{R^2-R-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $R \to +\infty$ in (11),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2.9 Ancora Integrali

2.9.1

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\cos\theta + 5}.$$

Soluzione. Con la sostituzione $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\cos\theta + 5} = \int_{+\gamma} f(z)dz$$

dove $+\gamma : |z| = 1$ orientata nel verso antiorario e $f(z) = -\dfrac{i}{2z^2 + 5z + 2}$.

Per il teorema dei residui applicato a f del dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$,

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, \frac{-1}{2}) = \frac{2}{3}\pi.$$

2.9.2

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\cos\theta + 2)^2}.$$

Soluzione. Con la sostituzione $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\cos\theta + 2)^2} = \int_{+\gamma} f(z)dz$$

dove $+\gamma : |z| = 1$ orientata nel verso antiorario e $f(z) = -\dfrac{4i\, z}{(z^2 + 4z + 1)^2}$.

Per il teorema dei residui applicato a f del dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$,

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, -2 + \sqrt{3}) = 2\pi i \Big(\frac{-2i}{3\sqrt{3}}\Big) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2.9.3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1 + x^2} dx.$$

Soluzione. Siano $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R, \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$, $R > 1$. Per il teorema dei residui applicato a $\mathrm{e}^{2iz}g(z)$ in D_R,

$$\int_{+\partial D_R} \mathrm{e}^{2iz} g(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(e^{2iz}g(z), i) = 2\pi i \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2i}\Big) = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2}.$$

Parametrizzando $+\partial D_R$ (l'orientamento positivo è quello antiorario),

$$\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^2}dx + \int_0^\pi \mathrm{e}^{2iR\mathrm{e}^{i\theta}} g(R\mathrm{e}^{i\theta}) iR\mathrm{e}^{i\theta} d\theta = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2}. \tag{12}$$

Risulta

$$\Big|\int_0^\pi \mathrm{e}^{2iR\mathrm{e}^{i\theta}} g(R\mathrm{e}^{i\theta}) iR\mathrm{e}^{i\theta} d\theta\Big| \le \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} d\theta = \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $R \to +\infty$ in (12),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2}.$$

2.9.4

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

Soluzione. Siano $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R, \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$, $R > 1$. Per il teorema dei residui applicato a $\mathrm{e}^{iz}g(z)$ in D_R

$$\int_{+\partial D_R} \mathrm{e}^{iz} g(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(\mathrm{e}^{iz}g(z), i) = 2\pi i \Big(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2i}\Big) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

Parametrizzando $+\partial D_R$ (l'orientamento positivo è quello antiorario),

$$\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}dx + \int_0^\pi \mathrm{e}^{iR\mathrm{e}^{i\theta}} g(R\mathrm{e}^{i\theta}) iR\mathrm{e}^{i\theta} d\theta = \frac{\pi}{\mathrm{e}}. \tag{13}$$

Risulta

$$\Big|\int_0^\pi \mathrm{e}^{iR\mathrm{e}^{i\theta}} g(R\mathrm{e}^{i\theta}) iR\mathrm{e}^{i\theta} d\theta\Big| \le \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} d\theta = \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $R \to +\infty$ in (13),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

Separando parte reale e coefficiente dell'immaginario, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

2.9.5

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \sin(2x) dx.$$

Soluzione. Siano $g(z) = \dfrac{z-2}{z^2-4z+5}$ e $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R, \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$, $R > 3$. Per il teorema dei residui

$$\int_{+\partial D_R} \mathrm{e}^{2iz} g(z) dz = 2\pi i \mathrm{Res}(\mathrm{e}^{2iz} g(z), 2+i) = 2\pi i \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2+4i}}{2}\Big) = \pi \mathrm{e}^{-2+4i} i.$$

Parametrizzando $+\partial D_R$ (l'orientamento positivo è quello antiorario),

$$\int_{-R}^{R} g(x) \mathrm{e}^{2ix} dx + \int_{+C_R} g(z) \mathrm{e}^{2iz} dz = \pi \mathrm{e}^{-2+4i} i \tag{14}$$

dove $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$. Dall'essere

$$\max_{z \in C_R} |g(z)| \le \frac{R+2}{R^2-4R-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

per il lemma di Jordan

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{+C_R} \mathrm{e}^{2iz} g(z) dz = 0.$$

Pertanto, da (14),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{e}^{2ix} dx = \pi \mathrm{e}^{-2+4i} i.$$

Separando parte reale e coefficiente dell'immaginario si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \sin(2x) dx = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2} \cos(4).$$

2.9.6

Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2+1} dx.$$

Soluzione. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{x^2+1} dx.$$

Sia $f(z) = \dfrac{e^{2\pi iz}}{z^2+1}$ e sia $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, $R > 1$. Per il teorema dei residui si ha:

$$\int_{+\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, i). \tag{15}$$

$z = i$ è un polo del primo ordine per f e sia ha

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} f(z)(z-i) = \frac{1}{2ie^{2\pi}}.$$

Parametrizzando $+D_R$ (l'orientamento positivo è quello antiorario), (15) diventa

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi i}}{x^2+1} dx + \int_0^\pi \frac{e^{2\pi i Re^{\theta i}} Rie^{\theta i}}{R^2 e^{2\theta i}+1} d\theta = \frac{\pi}{e^{2\pi}}. \tag{16}$$

Risulta

$$|\int_0^\pi \frac{e^{2\pi i Re^{\theta i}} Rie^{\theta i}}{R^2 e^{2\theta i}+1} d\theta| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} d\theta = \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Pertanto, per $R \to +\infty$ in (16),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i}}{x^2+1} dx dx = \frac{\pi}{e^{2\pi}}.$$

Separando parte reale e coefficiente dell'immaginario, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e^{2\pi}}.$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e^{2\pi}} = \frac{\pi}{2}\Big(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\Big).$$

2.9.7

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x)^2}\,dx, \quad -1<\alpha<1 \text{ (Trasformata di Mellin)}$$

Soluzione. Supponiamo che α non sia intero ($\alpha \neq 0$). Siano $R(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$ e $f(z) = R(z)z^\alpha$ con $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Log}\, z}$. Assumiamo come determinazione del logaritmo quella tale che

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\, z,\ 0 \le \mathrm{Arg}\, z < 2\,\pi.$$

La funzione $f(z)$ è olomorfa in $D = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Im} z = 0, \mathrm{Re} z \geq 0\}$. In questo dominio abbiamo

$$f(x+i0) = f(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x)^2} > 0 \qquad (x>0);$$
$$f(x-i0) = f(x)\mathrm{e}^{i2\pi\alpha} = \frac{x^\alpha \mathrm{e}^{i2\pi\alpha}}{(1+x)^2} > 0 \qquad (x>0).$$

Per applicare il teorema dei residui consideriamo il contorno $\Gamma_{\rho,R}$ formato dai cerchi $\gamma_\rho : |z| = \rho > 0$ e $\Gamma_R : |z| = R > 0$, dal segmento $[\rho, R]$ che giace nella parte di piano $x > 0, y > 0$ e dal segmento $[\rho, R]$ che giace nella parte di piano $x > 0, y < 0$ (vedi figura 2). Se assumiamo $R > 1$ e $\rho < 1$ tutti i poli della funzione $R(z)$ cadono all'interno del dominio limitato $D_{\rho,R}$ con frontiera $\partial D_{\rho,R} = \Gamma_{\rho,R}$. Per il teorema dei residui:

$$I_{\rho,R} = \int_{+\Gamma_{\rho,R}} \frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz = 2\,\pi\, i \sum \mathrm{Res}(R(z)z^\alpha)$$

dove la somma è estesa a tutti i poli di $R(z)$ e l'orientamento positivo su $\Gamma_{\rho,R}$ è quello antiorario.

La funzione $R(z)$ ha un polo del secondo ordine nel punto -1 e si ha

$$\mathrm{Res}(R(z)z^\alpha, -1) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\frac{z^\alpha}{(1+z)^2}(z+1)^2 = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha\, \mathrm{e}^{(\alpha-1)\,i\,\pi} = -\alpha\, \mathrm{e}^{\alpha\, i\, \pi}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned} I_{\rho,R} &= \int_\rho^R f(x+i0)dx + \int_{+\Gamma_R} \frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz + \int_R^\rho f(x-i0)dx + \int_{+\gamma_\rho} \frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz \\ &= (1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}) \int_\rho^R \frac{x^\alpha}{(1+x)^2}\,dx + \int_{+\Gamma_R} \frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz + \int_{+\gamma_\rho} \frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz. \end{aligned}$$

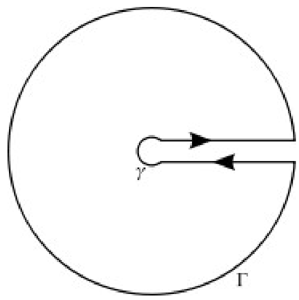

Figura 2: Curva $\Gamma_{\rho,R}$

Dimostriamo che

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{+\gamma_\rho}\frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz=0;\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz=0.$$

Infatti, dato che $\alpha>-1$,

$$\left|\int_{+\gamma_\rho}\frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz\right|\le\int_{\gamma_\rho}\frac{|z|^\alpha}{(1-|z|)^2}\,ds_z\le 2\pi\frac{\rho^{\alpha+1}}{(1-\rho)^2}\xrightarrow{\rho\to 0}0;$$

e, dato che $\alpha<1$,

$$\left|\int_{+\Gamma_R}\frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\,dz\right|\le\int_{\gamma_R}\frac{|z|^\alpha}{(|z|-1)^2}\,ds_z\le 2\pi\frac{R^{\alpha+1}}{(R-1)^2}\xrightarrow{R\to\infty}0.$$

Quindi, per $\rho\to 0$ e $R\to\infty$,

$$(1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha})\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{(1+x)^2}\,dx=2\,\pi\,i(-\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha\,i\,\pi})$$

da cui segue

$$\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{(1+x)^2}\,dx=\frac{\alpha\,\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

2.9.8

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\,dx,\quad 0<\alpha<4\ \text{(Trasformata di Mellin)}$$

Soluzione. Supponiamo che α non sia intero. Siano $R(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ e $f(z) = R(z)z^{\alpha-1}$ con $z^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)\mathrm{Log}\, z}$. Assumiamo come determinazione del logaritmo quella tale che

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\, z,\ 0 \le \mathrm{Arg}\, z < 2\,\pi.$$

La funzione $f(z)$ è olomorfa in $D = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Im}z = 0, \mathrm{Re}z \ge 0\}$. In questo dominio abbiamo

$$f(x+i0) = f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2} > 0 \qquad (x>0);$$
$$f(x-i0) = f(x)\mathrm{e}^{i2\pi(\alpha-1)} = \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}}{(1+x^2)^2} > 0 \qquad (x>0).$$

Per applicare il teorema dei residui consideriamo il contorno $\Gamma_{\rho,R}$ formato dalle circonferenze $\gamma_\rho : |z| = \rho > 0$ e $\Gamma_R : |z| = R > 0$, dal segmento $[\rho, R]$ che giace nella parte di piano $x > 0, y > 0$ e dal segmento $[\rho, R]$ che giace nella parte di piano $x > 0, y < 0$ (vedi figura 2). Se assumiamo $R > 1$ e $\rho < 1$ tutti i poli della funzione $R(z)$ cadono all'interno del dominio limitato $D_{\rho,R}$ con frontiera $\partial D_{\rho,R} = \Gamma_{\rho,R}$. Per il teorema dei residui:

$$I_{\rho,R} = \int_{+\Gamma_{\rho,R}} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\, dz = 2\,\pi\, i \sum \mathrm{Res}(R(z)z^{\alpha-1})$$

dove la somma è estesa a tutti i poli di $R(z)$ e l'orientamento positivo su $\Gamma_{\rho,R}$ è quello antiorario.

La funzione $R(z)$ ha poli del secondo ordine nei punti i e $-i$ e si ha

$$\mathrm{Res}(R(z)z^{\alpha-1}, i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}(z-i)^2 = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)^2} = \frac{\alpha-2}{4}\mathrm{e}^{i\alpha\pi/2}$$
$$\mathrm{Res}(R(z)z^{\alpha-1}, -i) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}(z+i)^2 = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{z^{\alpha-1}}{(z-i)^2} = \frac{\alpha-2}{4}\mathrm{e}^{3\,i\alpha\pi/2}$$

Si ha

$$\begin{aligned} I_{\rho,R} &= \int_\rho^R f(x+i0)dx + \int_{+\Gamma_R} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\, dz + \int_R^\rho f(x-i0)dx + \int_{+\gamma_\rho}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\, dz \\ &= (1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha})\int_\rho^R \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{+\Gamma_R}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\, dz + \int_{+\gamma_\rho}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\, dz. \end{aligned}$$

Dimostriamo che

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{+\gamma_\rho}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\, dz = 0; \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\, dz = 0.$$

Infatti, dato che $\alpha > 0$,

$$\left|\int_{+\gamma_\rho} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\,dz\right| \le \int_{\gamma_\rho} \frac{|z|^{\alpha-1}}{(1-|z|^2)^2}\,ds_z \le 2\pi\frac{\rho^\alpha}{(1-\rho^2)^2} \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

e, dato che $\alpha < 4$,

$$\left|\int_{+\Gamma_R} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}\,dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|z|^{\alpha-1}}{(|z|^2-1)^2}\,ds_z \le 2\pi\frac{R^\alpha}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Quindi, per $\rho \to 0$ e $R \to \infty$

$$(1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha})\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\,\pi\,i\frac{\alpha-2}{4}(\mathrm{e}^{i\alpha\pi/2}+\mathrm{e}^{3\,i\alpha\pi/2}) = \pi i(\alpha-2)\mathrm{e}^{i\alpha\pi}\cos(\alpha\pi/2)$$

da cui segue

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi(2-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}{2\,\sin(\alpha\pi)}.$$

2.9.9

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}\log x}{1+x^2}\,dx.$$

(Suggerimento: Si consideri $f(z) = \dfrac{z^{-1/2}\,\mathrm{Log} z}{1+z^2}$ e si assuma la determinazione del logaritmo e della radice tale che $0 \le \mathrm{Argz} < 2\pi$. Si integri come nella trasformata di Mellin......)

Soluzione. È un integrale della forma

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\log x)^m\,R(x)\,dx \tag{17}$$

con $m = 1$, $\alpha = 1/2$ e $R(x) = 1/(1+x^2)$.

Siano $R(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e $f(z) = R(z)z^{-1/2}\mathrm{Log}\,z$ con $z^{-1/2} = \mathrm{e}^{(-1/2)\mathrm{Log}\,z}$. Assumiamo come determinazione del logaritmo quella tale che

$$\mathrm{Log}\,z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\,z,\ 0 \le \mathrm{Arg}\,z < 2\,\pi.$$

La funzione $f(z)$ è olomorfa in $D = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Im}z = 0, \mathrm{Re}z \ge 0\}$. Se $z = x + i0$, $(x > 0)$, $\mathrm{Arg}\,z = 0$ e

$$f(x+i0) = f(x) = \frac{x^{-1/2}\log x}{1+x^2};$$

se $z = x - i0$, $(x > 0)$, $\operatorname{Arg} z = 2\pi$ e

$$f(x - i0) = \mathrm{e}^{(-1/2)(\log x + 2\pi i)}(\log x + 2\pi i)\frac{1}{1 + x^2} = -\frac{x^{-1/2}(\log x + 2\pi i)}{1 + x^2}.$$

Consideriamo l'integrale

$$I_{\rho,R} = \int_{+\Gamma_{\rho,R}} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz$$

dove $\Gamma_{\rho,R}$ è il contorno formato dai cerchi $\gamma_\rho : |z| = \rho > 0$ e $\Gamma_R : |z| = R > 0$, dal segmento $[\rho, R]$ che giace nella parte di piano $x > 0, y > 0$ e dal segmento $[R, \rho]$ che giace nella parte di piano $x > 0, y < 0$ (vedi figura 2). Se assumiamo $R > 1$ e $\rho < 1$ tutti i poli della funzione $R(z)$ cadono all'interno del dominio limitato $D_{\rho,R}$ con frontiera $\partial D_{\rho,R} = \Gamma_{\rho,R}$. Per il teorema dei residui:

$$I_{\rho,R} = \int_{+\Gamma_{\rho,R}} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz = 2\,\pi\, i \sum \operatorname{Res}(R(z) z^{\alpha - 1})$$

dove la somma è estesa a tutti i poli di $R(z)$ e l'orientamento positivo su $\Gamma_{\rho,R}$ è quello antiorario.

La funzione $R(z)$ ha poli del primo ordine nei punti i e $-i$ e si ha

$$\operatorname{Res}(\frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}, i) = \lim_{z \to i} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}(z - i) = \lim_{z \to i} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{z + i} = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-i\pi/4};$$

$$\operatorname{Res}(\frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}, -i) = \lim_{z \to -i} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}(z + i) = \lim_{z \to -i} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{z - i} = -\frac{3\pi}{4}\mathrm{e}^{-3i\pi/4}.$$

Si ha

$$I_{\rho,R} = \int_\rho^R f(x + i0)dx + \int_{+\Gamma_R} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz + \int_R^\rho f(x - i0)dx + \int_{+\gamma_\rho} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz$$

$$= 2\int_\rho^R \frac{x^{-1/2}\log x}{1 + x^2}\, dx + 2\pi i \int_\rho^R \frac{x^{-1/2}}{1 + x^2}\, dx + \int_{+\Gamma_R} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz + \int_{+\gamma_\rho} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz.$$

Dimostriamo che

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{+\gamma_\rho} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz = 0; \qquad \lim_{R \to \infty} \int_{+\Gamma_R} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz = 0.$$

Infatti

$$\left| \int_{+\gamma_\rho} \frac{z^{-1/2}\operatorname{Log} z}{1 + z^2}\, dz \right| \le \int_{\gamma_\rho} \frac{|z|^{-1/2}|\operatorname{Log} z|}{1 - |z|^2}\, ds_z \le 2\pi \frac{\rho^{1/2}(|\log \rho| + 2\pi)}{1 - \rho^2} \xrightarrow{\rho \to 0} 0;$$

e

$$\left|\int_{+\Gamma_R} \frac{z^{-1/2}\text{Log}\, z}{1+z^2}\, dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|z|^{-1/2}|\text{Log}\, z|}{|z|^2-1}\, ds_z \le 2\pi \frac{R^{1/2}(\text{Log}\, R + 2\pi)}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Quindi, per $\rho \to 0$ e $R \to \infty$

$$2\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}\log x}{1+x^2}\, dx + 2\pi i \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{1+x^2}\, dx = 2\,\pi\, i(\frac{\pi}{4}\text{e}^{-i\pi/4} - \frac{3\pi}{4}\text{e}^{-3i\pi/4})$$

da cui segue, separando parte reale e immaginaria,

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}\log x}{1+x^2}\, dx = -\frac{\pi^2}{4}\sqrt{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

2.9.10

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{a^2+x^2}\, dx, \qquad a > 0.$$

Soluzione. È un integrale della forma (17) con $m = 1$, $\alpha = 1$ e $R(x) = 1/(x^2+a^2)$.

Sia $f(z) = \dfrac{\text{Log}\, z}{z^2+a^2}$, dove assumiamo la determinazione del logaritmo con $0 \le \text{Arg}\, z < 2\,\pi$. La funzione f è olomorfa in $D = \mathbb{C}\backslash\{z : \text{Re}z \ge 0, \text{Im}z = 0\}$. Se $z = x + i0$, $(x > 0)$, $\text{Arg}\, z = 0$ e

$$f(x+i0) = f(x) = \frac{\log x}{1+x^2};$$

se $z = x - i0$, $(x > 0)$, $\text{Arg}\, z = 2\pi$ e

$$f(x-i0) = (\log x + 2\pi i)\frac{1}{1+x^2} = \frac{(\log x + 2\pi i)}{1+x^2}.$$

L'integrazione lungo il contorno $\Gamma_{\rho,R}$ di figura 2 non porta al calcolo dell'integrale richiesto (provate!). Ciò perchè $\alpha = 1$ è un intero. Cambiamo cammino di integrazione.

Dato che la funzione $R(z)$ è pari ed è priva di poli sull'asse reale, possiamo integrare f lungo la curva $C_{\rho,R}$ costituita dalla semicirconferenza $\gamma_\rho : |z| =$

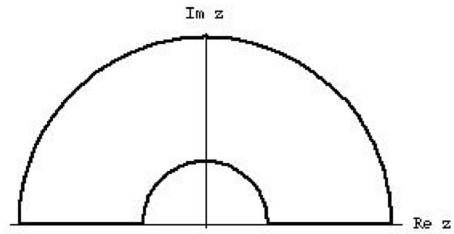

Figura 3: Curva $C_{\rho,R}$

$\rho, \mathrm{Im} z \geq 0$, dalla semicirconferenza $\gamma_R : |z| = R, \mathrm{Im} z \geq 0$ e dai segmenti $[\rho, R]$ e $[-R, -\rho]$ con $0 < \rho < R$ (vedi figura 3).

Applichiamo il teorema dei residui a $f(z)$ nel dominio limitato $D_{\rho,R}$ che ha $C_{\rho,R}$ come frontiera. Se $R > a$ allora

$$\int_{+C_{\rho,R}} f(z)\, dz = 2\pi\, i \sum \mathrm{Res}(f(z))$$

dove la somma è estesa a tutti i poli di $\dfrac{1}{z^2+a^2}$ che cadono all'interno di $D_{\rho,R}$. La funzione $\frac{1}{z^2+a^2}$ ha poli del primo ordine nei punti ai e $-ai$ ma solo ai è interno a $D_{\rho,R}$ e si ha

$$\mathrm{Res}(\frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2+a^2}, ai) = \lim_{z \to ai} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2+a^2}(z - ai) = \frac{\log a + i\pi/2}{2ai}.$$

Per il teorema dei residui

$$\int_{+C_{\rho,R}} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2+a^2}\, dz = 2\pi i \frac{\log a + i\pi/2}{2ai} = \frac{\pi}{a} \log a + i\frac{\pi^2}{2a}.$$

Osservando che

$$f(x + i0) = f(x) = \frac{\log x}{1 + x^2} \;\text{ per }\; x > 0;$$

$$f(x + i0) = \frac{\log |x| + i\pi}{1 + x^2} \;\text{ per }\; x < 0$$

si ha

$$\int_{+C_{\rho,R}} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2+a^2}\, dz = \int_{\rho}^{R} \frac{\log x}{x^2+a^2}\, dx + \int_{+C_R} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2+a^2}\, dz + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\log |x| + i\pi}{x^2+a^2}\, dx + \int_{+C_\rho} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2+a^2} dz.$$

Gli integrali lungo le semicirconferenze tendono a zero per $R \to \infty$ e $\rho \to 0$ dato che

$$\left| \int_{+C_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2 + a^2}\, dz \right| \le \int_{C_R} \frac{|\operatorname{Log} z|}{|z^2 + a^2|}\, ds_z \le 2\pi \frac{R(\log R + 2\,\pi)}{R^2 - a^2} \xrightarrow{R \to \infty} 0;$$

$$\left| \int_{+C_\rho} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2 + a^2}\, dz \right| \le \int_{C_\rho} \frac{|\operatorname{Log} z|}{|z^2 + a^2|}\, ds_z \le 2\pi \frac{\rho(|\log \rho| + 2\,\pi)}{a^2 - \rho^2} \xrightarrow{\rho \to 0} 0.$$

Quindi otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\log |x| + i\pi}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{a} \log a + i\frac{\pi^2}{2a}$$

da cui segue che

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \log a + i\frac{\pi^2}{2a}.$$

Confrontando parte reale e immaginaria

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} \log a; \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

2.9.11

Determinare il numero di radici dell'equazione $z^7 + 5z^6 - 3z^5 + 11z^2 + 1 = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Soluzione. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = 11z^2$ e $g(z) = z^7 + 5z^6 - 3z^5 + 1$. f ha 2 zeri in A. Infatti $z = 0$ è uno zero di f di molteplicità 2. Risulta

$$|f(z)| = 11, \quad z \in \partial A; \quad |g(z)| \le |z|^7 + 5|z|^6 + 3|z|^5 + 1 = 10, \quad z \in \partial A.$$

Dato che

$$|g(z)| \le 10 < 11 = |f(z)|, \quad z \in \partial A,$$

per il teorema di Rouchè f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in A cioè 2.

2.9.12

Fissato $n \in \mathbb{N}$, determinare il numero di radici dell'equazione $\mathrm{e}^z + 3z^n = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Soluzione. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = 3z^n$ e $g(z) = \mathrm{e}^z$. $z = 0$ è uno zero di f di molteplicità n. Quindi f ha n radici in A. Risulta

$$|f(z)| = 3,\ z \in \partial A;\ |g(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \le \mathrm{e} < 3,\ z \in \partial A (\text{quindi} -1 \le \mathrm{Re}(z) \le 1).$$

Dato che

$$|g(z)| < 3 = |f(z)|, \quad z \in \partial A,$$

per il teorema di Rouchè f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in A cioè n.

2.9.13

Sia f olomorfa in un aperto A contenente $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ e sia $|f(z)| \le 1,\ \forall z : |z| = 1$. Determinare il numero di radici dell'equazione

$$f(z) + 8z^2 - 2 = 0$$

in $D - \partial D$.

Soluzione. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $g(z) = 8z^2 - 2$. I punti $z_1 = 1/2$ e $z_2 = -1/2$ appartengono ad A e sono zeri di g. Risulta

$$|f(z)| \le 1, \quad z \in \partial A; \quad |g(z)| \ge 8|z|^2 - 2 = 6, \quad z \in \partial A.$$

Dato che

$$|f(z)| \le 1 < 6 \le |g(z)|, \quad z \in \partial A,$$

per il teorema di Rouchè g e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in A cioè 2.

2.10 Prodotti Infiniti

2.10.1

Dire se i seguenti prodotti infiniti convergono assolutamente:

$$
\begin{aligned}
&a) \qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^3}\right);\\
&b) \qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right);\\
&c) \qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\cos(k\pi)}{k^2}\right)\\
&d) \qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sin^2 k}{k^4}\right);\\
&e) \qquad \prod_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k\,\log k}\right)\\
&f) \qquad \prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}.
\end{aligned}
$$

Soluzione. a) Posto $u_k = \dfrac{1}{k^3}$ risulta $u_k \neq -1$ e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$

converge. Quindi il prodotto infinito è assolutamente convergente.

b) Posto $u_k = -\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ risulta $u_k \neq -1$ e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

diverge. Quindi il prodotto infinito non è assolutamente convergente.

c) Posto $u_k = \dfrac{\cos(k\pi)}{k^2} = \dfrac{(-1)^k}{k^2}$ risulta $u_1 = -1$. Quindi il prodotto infinito è nullo. Dato che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

converge allora il prodotto infinito è assolutamente nullo.

d) Posto $u_k = \dfrac{\sin^2 k}{k^4}$ risulta $u_k \neq -1$ e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin^2 k|}{k^4}, \qquad 0 \leq \frac{|\sin^2 k|}{k^4} \leq \frac{1}{k^4}$$

converge. Quindi il prodotto infinito è assolutamente convergente.

e) Posto $u_k = \dfrac{1}{k \log k}$ risulta $u_k \neq -1$ e la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_k = \sum_{k=2}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$$

diverge. Quindi il prodotto infinito non è convergente nè assolutamente convergente.

f) Risulta

$$1 + u_k = \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} \iff u_k = -\frac{2}{k^3 + 1} \neq -1 \quad k \geq 2.$$

Dato che la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} |u_k| = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 1} \sim 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

converge allora il prodotto infinito è assolutamente convergente.

2.10.2

Dire se i seguenti prodotti infiniti convergono assolutamente e, in caso affermativo, calcolarne il prodotto:

$$\begin{array}{ll} i) & \displaystyle\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) \\ ii) & \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+k^{-1})^2}{1+2k^{-1}} \\ iii) & \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^3+2k}{k^2+3k+2} \\ iv) & \displaystyle\prod_{k=3}^{\infty}\frac{k^2-4}{k^2-1} \\ v) & \displaystyle\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^2+k-2}{k+k^2} \\ vi) & \displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+1)+(1+i)}{k(k+1)+(1-i)}. \end{array}$$

Soluzione. i) Posto $u_k = -\dfrac{2}{k(k+1)}$, risulta $u_k \neq -1$, $k \geq 2$, e la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}|u_k| = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}, \qquad \frac{2}{k(k+1)} \leq \frac{2}{k^2}$$

converge. Quindi il prodotto infinito converge assolutamente. Calcoliamo il prodotto infinito

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}.$$

Si ha

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\times\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\times\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\times .....\times\frac{(n-3)n}{(n-2)(n-1)}\times\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}\times\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{2+n}{3\,n}$$

Quindi

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{3}.$$

ii) Risulta

$$1 + u_k = \frac{(1+k^{-1})^2}{1+2k^{-1}} \iff u_k = \frac{1}{k(k+2)}.$$

Dato che $u_k \neq -1$ e la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$$

converge, il prodotto infinito converge assolutamente. Si ha

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(1+k^{-1})^2}{1+2k^{-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(1+k)^2}{k(k+2)}$$

$$= \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \times \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4} \times \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \times \frac{5\cdot 5}{4\cdot 6} \times ... \times \frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)} \times \frac{(1+n)^2}{n(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Quindi

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{(1+k^{-1})^2}{1+2k^{-1}} = \lim_{n\to\infty} P_n = 2.$$

iii) Risulta

$$1 + u_k = \frac{k^3+2k}{k^2+3k+2} \iff u_k = \frac{k^3-k^2-k-2}{k^2+3k+k^2)}.$$

Dato che

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3-k^2-k-2}{k^2+3k+k^2)} = \infty$$

non è verificata la condizione necessaria per la convergenza dei prodotti infiniti.

iv) Risulta

$$1 + u_k = \frac{k^2-4}{k^2-1} \iff u_k = -\frac{3}{k^2-1}.$$

Dato che $u_k \neq -1$ e la serie

$$\sum_{k=3}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{k^2-1}$$

converge, il prodotto infinito converge assolutamente. Si ha

$$P_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k^2-1} = \prod_{k=3}^{n} \frac{(k-2)(k+2)}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \frac{1\cdot 5}{2\cdot 4}\times\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}\times\ldots\frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)}\times\frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n}\times\frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n+2}{4(n-1)}.$$

Quindi

$$\prod_{k=3}^{\infty}\frac{k^2-4}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{4}.$$

v) Risulta

$$1+u_k = \frac{k^2+k-2}{k+k^2} \iff u_k = -\frac{2}{k(k+1)}.$$

Dato che $u_k \neq -1$, $k \geq 2$, e la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}|u_k| = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)} \sim \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2}$$

converge, il prodotto infinito converge assolutamente. Si ha

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k+k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)} = \frac{2+n}{3\,n}.$$

Quindi

$$\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^2+k-2}{k+k^2} = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{3}.$$

vi) Risulta

$$1+u_k = \frac{k(k+1)+(1+i)}{k(k+1)+(1-i)} \iff u_k = \frac{2i}{k^2+k+1-i}.$$

Dato che $u_k \neq -1$ e la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}|u_k| = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{|k^2+k+1-i|} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{(k^2+k+1)^2+1}} \sim \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2}$$

converge, il prodotto infinito converge assolutamente. Posto

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\frac{k(k+1)+(1+i)}{k(k+1)+(1-i)}$$

si ha

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1+i}{1-i} \\ P_1 &= \frac{1+2i}{1-2i} \\ P_2 &= \frac{1+3i}{1-3i} \\ P_3 &= \frac{1+4i}{1-4i} \\ &\dots \end{aligned}$$

Si dimostra per induzione che

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)+(1+i)}{k(k+1)+(1-i)} = \frac{1+(n+1)i}{1-(n+1)i}.$$

Quindi

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)+(1+i)}{k(k+1)+(1-i)} = \lim_{n\to\infty} P_n = -1.$$

2.10.3

Discutere in quali insiemi di $\mathbb{C}$ i seguenti prodotti infiniti convergono assolutamente

$$\begin{aligned} &i) \qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1+z^k) \\ &ii) \qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^k}{k!}\right) \\ &iii) \qquad \prod_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{2z}{k}\right) \end{aligned}$$

Soluzione. i) La condizione necessaria è verificata per $|z| < 1$. Dato che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z|^k, \qquad |z| < 1$$

converge, la serie converge assolutamente nel campo circolare $\{z : |z| < 1\}$.

ii) La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

converge per ogni $z \in \mathbb{C}$. Quindi il prodotto infinito converge assolutamente in ogni punto del piano complesso.

iii) La condizione necessaria è verificata per ogni z ma la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|2z|}{k}$$

diverge per ogni $z \neq 0$. Quindi il prodotto infinito converge solo in $z = 0$.

2.10.4

Dimostrare che, se $|z| < 1$, il prodotto infinito

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$$

converge assolutamente. Dimostrare che il prodotto è $\dfrac{1}{1-z}$.

Soluzione. Se $|z| < 1$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^{2^k}$$

converge dato che $|z|^{2^k} \leq |z|^k$. Quindi il prodotto infinito converge assolutamente nel campo circolare $\{z : |z| < 1\}$.

Scriviamo i prodotti parziali

$$P_0 = 1 + z = \sum_{k=0}^{2^1-1} z^k$$

$$P_1 = (1+z)(1+z^2) = 1 + z + z^2 + z^3 = \sum_{k=0}^{2^2-1} z^k$$

$$P_2 = (1+z)(1+z^2)(1+z^4) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = \sum_{k=0}^{2^3-1} z^k$$

....

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + z^{2^k}) = \sum_{k=0}^{2^{(n+1)}-1} z^k$$

Dimostriamo, quindi, per induzione che i prodotti parziali di ordine n sono

$$P_n := \prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^k}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}.$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
&P_0 = 1+z;\\
&P_n = \frac{1-z^{2n+1}}{1-z} \qquad \Longrightarrow\\
&P_{n+1} = P_n(1+z^{2^{n+1}}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}(1+z^{2^{n+1}}) = \frac{1-z^{2^{n+2}}}{1-z}
\end{aligned}$$

Segue che

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{2^k}) = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{1-z}.$$

2.10.5

Dimostrare che il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)$$

converge assolutamente in tutto il piano complesso. Determinare il prodotto $f(z)$.

Soluzione. La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{k^2}$$

converge assolutamente in ogni punto del piano complesso e totalmente in ogni insieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$. Quindi la funzione prodotto $f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$. Ricordando il prodotto infinito

$$\sinh z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

si trova

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\sinh(\pi z)}{\pi z}.$$