ESERCIZI SU CAMPI VETTORIALI

Calcolare il lavoro dei seguenti campi vettoriali lungo la curva assegnata

1. $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x^2y)$ lungo γ di equazione cartesiana $x = \sqrt{1+y^2}$, $y \in [-2,2]$;

2. $\mathbf{F}(x,y) = (2x+1, xy)$ lungo la curva semplice γ avente per sostegno la frontiera positivamente orientata del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1,\ \sqrt{3}y \leq x+1\}$;

3. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, 0, z^2)$ lungo γ curva semplice e regolare avente per sostegno l'intersezione del cilindro $x^2+z^2 = 1$ con il piano $x+y+z = 1$ nella regione $z \geq 0$ e percorsa in modo tale che il vettore $\mathbf{T}$ tangente alla curva nel punto $P(0,0,1)$ verifichi $\mathbf{T} \cdot \mathbf{j} > 0$;

4. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, z^2, y+z-1)$ lungo la curva semplice avente per sostegno l'intersezione del cilindro $x^2+9y^2 = 2x$ con il piano $z = y+2$ nella regione $x \geq 1$, orientata in modo tale che nel punto $P(2,0,2)$ verifichi $\mathbf{T} \cdot \mathbf{k} > 0$.

Dopo aver stabilito se i seguenti campi vettoriali risultano irrotazionali e conservativi nel loro dominio, determinarne, se esiste, un potenziale e calcolarne il lavoro lungo la curva data.

5. $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{2x}{(y+x^2)^2}, 2y + \frac{1}{(y+x^2)^2}\right)$, lavoro lungo la curva di equazione cartesiana $y = 1-x^2$, $x \in [-1,1]$;

6. $\mathbf{F}(x,y) = (1+3x^2+\sqrt{\frac{y}{x}}, 2+2y+\sqrt{\frac{x}{y}})$, lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (t^2+1, t+2)$, $t \in [0,1]$.;

7. $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y^2x}{x^2-1} + x^2, y\log(x^2-1)\right)$, lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (3+\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$.;

8. $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz^2, yz^2, z(x^2+y^2+z^2))$, lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0,2\pi]$;

9. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{\sin x}{z}, \frac{\cos y}{z}, \frac{\cos x - \sin y}{z^2}\right)$, lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (t, 2t, 1+t)$, $t \in [0,\pi]$;

10. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, \frac{z-x^2-y^2}{z^2}\right)$, lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, -1)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Calcolare il flusso dei seguenti campi vettoriali attraverso la superficie indicata

11. $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, x, z)$ uscente dalla superficie $\mathcal{S}$ avente per sostegno il cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2+y^2,\ 1 \leq z \leq 4\}$;

12. $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2, x^2z, z(y^2+x))$ uscente dalla superficie semplice $\mathcal{S}$ frontiera del solido $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 3-(x^2+y^2),\ z \leq 2\}$;

13. $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, yz, x)$ uscente dalla superficie avente per sostegno la frontiera del solido $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$;

14. $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz^3, xz^2, z)$ attraverso la superficie $\mathcal{S}$ ottenuta dalla rotazione della curva γ di equazione cartesiana $x = \sqrt{1+z^2}$, $z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, attorno all'asse z di un angolo pari a π e orientata in modo tale che nel punto $P(0,1,0)$ risulti $\mathbf{N} \cdot \mathbf{j} < 0$.

15. $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, x, x+z)$ uscente dalla superficie rigata $\mathcal{S}$ la superficie avente come generatrice la circonferenza $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0,2\pi]$, e come vettori direttori i vettori $\mathbf{w} = (0,1,1)$ nella regione $z \in [0,4]$.