Risoluzione

1. Per calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x^2y)$ lungo γ di equazione cartesiana $x = \sqrt{1+y^2}$, $y \in [-2,2]$, osserviamo che una parametrizzazione della curva è data da $\varphi(t) = (\sqrt{1+t^2}, t)$ con $t \in [-2,2]$, quindi $\varphi'(t) = (\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1)$ e

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \varphi'(t) = (t\sqrt{1+t^2}, t(1+t^2)) \cdot (\tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1) = t^2 + t(1+t^2).$$

Il lavoro del campo dato lungo γ risulta quindi uguale a

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = \int_{-2}^{2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{-2}^{2} t^2 + t(1+t^2)\, dt = \left[\tfrac{t^3}{3} + \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^4}{4}\right]_{-2}^{2} = \tfrac{16}{3}$$

2. Calcoliamo il lavoro del campo $\mathbf{F}(x,y) = (2x+1, xy)$ lungo la curva semplice γ avente per sostegno la frontiera positivamente orientata del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1,\ \sqrt{3}y \leq x+1\}$. Abbiamo che $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ essendo $\gamma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [-\pi, \frac{\pi}{3}]$ e $(-\gamma_2)(t) = (t, \frac{t+1}{\sqrt{3}})$ con $t \in [-1, \frac{1}{2}]$, una parametrizzazione della curva opposta. Si ottiene quindi che

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot ds = -\tfrac{3}{8}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} \mathbf{F}(\gamma_1(\theta)) \cdot \gamma_1'(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\theta + 1, \cos\theta\sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} -2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = \left[\cos^2\theta + \cos\theta - \tfrac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} = \tfrac{3}{8}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2t+1, \tfrac{1}{\sqrt{3}}t(t+1)) \cdot (1, \tfrac{1}{\sqrt{3}})\, dt \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} 2t + 1 + \tfrac{1}{3}(t^2+t)\, dt = \left[t^2 + t + \tfrac{1}{3}(\tfrac{t^3}{3} + \tfrac{t^2}{2})\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{4}\end{aligned}$$

In alternativa si poteva utilizzare il Teorema di Green e calcolare

$$\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y} dxdy = \iint_D y\, dxdy$$

essendo $D = D_1 \cup D_2$ dove $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [-1, \frac{1}{2}],\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \frac{x+1}{\sqrt{3}}\}$ e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [\frac{1}{2}, 1],\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$

3. Per calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, 0, z^2)$ lungo γ curva semplice e regolare avente per sostegno l'intersezione del cilindro $x^2+z^2 = 1$ con il piano $x+y+z = 1$ nella regione $z \geq 0$ e percorsa in modo tale che il vettore $\mathbf{T}$ tangente alla curva nel punto

$P(0,0,1)$ verifichi $\mathbf{T}\cdot\mathbf{j} > 0$, determiniamo innanzitutto una parametrizzazione della curva. Osservato che l'intersezione tra il cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e il piano $x + y + z = 1$ è

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 1 - x - z \\ z \geq 0 \end{cases}$$

una parametrizzazione è data da $\varphi(\theta) = (\cos\theta, 1 - \cos\theta - \sin\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$. Risulta allora

$$\varphi'(\theta) = (-\sin\theta, \sin\theta - \cos\theta, \cos\theta)$$

e poiché $\varphi(\frac{\pi}{2}) = P(0,0,1)$ e $\varphi'(\frac{\pi}{2}) = (-1,1,0)$ si ha che $\varphi'(\frac{\pi}{2}) \cdot \mathbf{j} = 1 > 0$ e dunque che l'orientamento è quello richiesto. Abbiamo inoltre che

$$\mathbf{F}(\varphi(\theta)) \cdot \varphi'(\theta) = (\cos\theta, 0, \sin^2\theta) \cdot (-\sin\theta, \sin\theta - \cos\theta, \cos\theta) = -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta$$

e quindi che il lavoro del campo lungo γ è dato da

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = \int_0^\pi \mathbf{F}(\gamma(\theta)) \cdot \varphi'(\theta)\, d\theta = \int_0^\pi -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta\, d\theta = \left[\tfrac{\cos^2\theta}{2} + \tfrac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^\pi = 0$$

4. Calcoliamo il lavoro di $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, z^2, y + z - 1)$ lungo la curva semplice avente per sostegno l'intersezione del cilindro $x^2 + 9y^2 = 2x$ con il piano $z = y + 2$ nella regione $x \geq 1$, orientata in modo tale che nel punto $P(2,0,2)$ verifichi $\mathbf{T} \cdot \mathbf{k} > 0$. Osservato che l'intersezione tra il cilindro $x^2 + 9y^2 = 2x$ e il piano $z = y + 2$ per $x \geq 1$ è

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 2x \\ z = y + 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 9y^2 = 1 \\ z = y + 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

una parametrizzazione è data da $\varphi(\theta) = (1 + \cos\theta, \frac{1}{3}\sin\theta, 2 + \frac{1}{3}\sin\theta)$ con $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Risulta allora

$$\varphi'(\theta) = (-\sin\theta, \tfrac{1}{3}\cos\theta, \tfrac{1}{3}\cos\theta)$$

e dato che $\varphi(0) = P(2,0,2)$ e $\varphi'(0) = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ si ha che $\varphi'(0) \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{3} > 0$ e dunque che l'orientamento è quello richiesto. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\varphi(\theta)) \cdot \varphi'(\theta) &= (1 + \cos\theta, (2 + \tfrac{1}{3}\sin\theta)^2, \tfrac{2}{3}\sin\theta + 1) \cdot (-\sin\theta, \tfrac{1}{3}\cos\theta, \tfrac{1}{3}\cos\theta) \\ &= -\sin\theta - \cos\theta\sin\theta + \tfrac{1}{3}\cos\theta(2 + \tfrac{1}{3}\sin\theta)^2 + \tfrac{1}{3}\cos\theta(\tfrac{2}{3}\sin\theta + 1) \end{aligned}$$

e quindi che il lavoro del campo lungo γ è

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\gamma(\theta)) \cdot \varphi'(\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin\theta - \cos\theta\sin\theta + \tfrac{1}{3}\cos\theta(2 + \tfrac{1}{3}\sin\theta)^2 + \tfrac{1}{3}\cos\theta(\tfrac{2}{3}\sin\theta + 1)\, d\theta \\ &= \left[\cos\theta + \tfrac{\cos^2\theta}{2} + \tfrac{1}{3}(2 + \tfrac{1}{3}\sin\theta)^3 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{2}{3}\sin\theta + 1)^2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \ldots \end{aligned}$$

5. Il campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{2x}{(y+x^2)^2}, 2y + \frac{1}{(y+x^2)^2}\right)$ è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq -x^2\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{4x}{(y+x^2)^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in A.$$

Il dominio D non risulta semplicemente connesso e dunque non possiamo affermare che, essendo irrotazionale, il campo risulta conservativo in D. Possiamo però affermare che essendo irrotazionale il campo risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > -x^2\}$ e $D^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < -x^2\}$ del dominio.
Per determinare un potenziale $U(x,y)$ di $\mathbf{F}(x,y)$ in $D^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{(y+x^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y + \frac{1}{(y+x^2)^2}$$

Dalla prima delle due condizioni abbiamo che

$$U(x,y) = \int \frac{2x}{(y+x^2)^2} dx = -\frac{1}{y+x^2} + C(y)$$

e dalla seconda

$$2y + \frac{1}{(y+x^2)^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{(y+x^2)^2} + C'(y)$$

Dunque $C'(y) = 2y$ e quindi $C(y) = y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in $D^\pm$ sarà allora $U^\pm(x,y) = -\frac{1}{y+x^2} + y^2 + c_\pm$ con $c_\pm \in \mathbb{R}$ non necessariamente uguali. Ne segue che la funzione

$$U(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{y+x^2} + y^2 + c_+, & \text{se } y > -x^2 \\ -\frac{1}{y+x^2} + y^2 + c_-, & \text{se } y < -x^2 \end{cases}$$

con $c_\pm \in \mathbb{R}$ è un potenziale del campo $\mathbf{F}(x,y)$ in D e quindi il campo risulta conservativo nel suo dominio. Per calcolarne il lavoro lungo la curva di equazione cartesiana $y = 1-x^2$, $x \in [-1,1]$, osserviamo che poichè il campo è convervativo in D e il sostegno della curva è contenuto in D, e precisamente in D^+, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = U(x_1) - U(x_0)$ essendo U un potenziale del campo F e x_0, x_1 rispettivamente il punto iniziale e finale di γ. Allora, per quanto ottenuto, risulta

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = U(1,0) - U(-1,0) = 0$$

6. Il campo $\mathbf{F}(x,y) = (1 + 3x^2 + \sqrt{\frac{y}{x}}, 2 + 2y + \sqrt{\frac{x}{y}})$ è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 0\}$ dove risulta irrotazionale dato che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Poichè il dominio D non risulta connesso, non possiamo concludere che il campo risulta conservativo nel suo dominio ma possiamo affermare che risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y > 0\}$ e $D^- = \{(x,y) \in$

$\mathbb{R}^2 \,|\, x < 0,\, y < 0\}$. Per determinarne un potenziale $U(x,y)$ in $D^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\tfrac{\partial U}{\partial x} = 1 + 3x^2 + \sqrt{\tfrac{y}{x}} \quad \text{e} \quad \tfrac{\partial U}{\partial y} = 2 + 2y + \sqrt{\tfrac{x}{y}}$$

Dalla prima delle due condizioni abbiamo che

$$U(x,y) = \int 1 + 3x^2 + \sqrt{\tfrac{y}{x}}\, dx = x + x^3 + 2\sqrt{xy} + c(y)$$

e dalla seconda

$$2 + 2y + \sqrt{\tfrac{x}{y}} = \tfrac{\partial U}{\partial y} = \tfrac{\partial}{\partial y}(x + x^3 + 2\sqrt{xy} + c(y)) = \sqrt{\tfrac{x}{y}} + c'(y)$$

Dunque $c'(y) = 2 + 2y$ da cui $c(y) = 2y + y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, Un potenziale del campo $\mathbf{F}$ in D sarà allora

$$U(x,y) = \begin{cases} x + x^3 + 2\sqrt{xy} + 2y + y^2 + c^+ & \text{se } (x,y) \in D^+ \\ x + x^3 + 2\sqrt{xy} + 2y + y^2 + c^- & \text{se } (x,y) \in D^-, \end{cases}$$

dove $c^\pm \in \mathbb{R}$.

Per calcolare il lavoro del campo lungo la curva $\varphi(t) = (t^2+1, t+2)$, $t \in [0,1]$, osserviamo che $\mathbf{F}(x,y)$ è campo conservativo nel suo dominio D e la curva ha sostegno γ contenuto in D^+, dal Teorema sul lavoro di un campo conservativo abbiamo che

$$\int_\gamma F \cdot ds = U(x_1) - U(x_0)$$

dove $U(x,y)$ è un potenziale del campo $\mathbf{F}(x,y)$ in D^+ e x_0 e x_1 sono i punti iniziale e finale della curva. Essendo $x_1 = (2,3)$ e $x_0 = (1,2)$, otteniamo

$$\int_\gamma F \cdot ds = 15 + 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

7. ll campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y^2 x}{x^2-1} + x^2, y\log(x^2-1)\right)$ è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \{(x,y) \,|\, |x| > 1\}$. In tale dominio risulta irrotazionale poiché

$$\tfrac{\partial F_1}{\partial y} = \tfrac{2xy}{x^2-1} = \tfrac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Dato che il dominio A non risulta connesso, non possiamo concludere che il campo risulta conservativo nel suo dominio ma possiamo affermare che risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $A^+ = \{(x,y) \,|\, x > 1\}$ e $A^- = \{(x,y) \,|\, x < -1\}$. Per determinarne un potenziale $U(x,y)$ in $A^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\tfrac{\partial U}{\partial x} = \tfrac{xy^2}{x^2-1} + x^2 \quad \text{e} \quad \tfrac{\partial U}{\partial y} = y\log(x^2-1)$$

Dalla seconda delle due condizioni abbiamo che

$$U(x,y) = \int y \log(x^2-1)dy = \tfrac{y^2}{2}\log(x^2-1) + c(x)$$

e dalla prima

$$\tfrac{xy^2}{x^2-1} + x^2 = \tfrac{\partial U}{\partial x} = \tfrac{xy^2}{x^2-1} + c'(x)$$

Dunque $c'(x) = x^2$ da cui $c(x) = \frac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$, e un potenziale del campo in $A^\pm$ sarà

$$U(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2}\log(x^2-1) + \frac{x^3}{3} + c^+ & \text{se } (x,y) \in A^+ \\ \frac{y^2}{2}\log(x^2-1) + \frac{x^3}{3} + c^- & \text{se } (x,y) \in A^-, \end{cases}$$

dove $c^\pm \in \mathbb{R}$. Per calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (3+\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$, dato che la curva ha sostegno in A^+, dal Teorema sul lavoro di un campo conservativo abbiamo che

$$\int_\gamma F \cdot ds = U(\varphi(\pi)) - U(\varphi(0))$$

dove $U(x,y)$ è un potenziale del campo $F(x,y)$. Essendo $\varphi(\pi) = (2,0)$ e $\varphi(0) = (4,0)$, otteniamo

$$\int_\gamma F \cdot ds = \tfrac{8}{3} - \tfrac{64}{3} = -\tfrac{56}{3}$$

8. Il campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz^2, yz^2, z(x^2+y^2+z^2))$ è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \mathbb{R}^3$ dove risulta irrotazionale dato che

$$\tfrac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \tfrac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} = 2xz = \tfrac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial z} = 2yz = \tfrac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Il dominio A risulta semplicemente connesso, possiamo quindi concludere che essendo irrotazionale il campo è conservativo in A. Per determinare un potenziale $U(x,y,z)$ di $F(x,y,z)$ in A osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\tfrac{\partial U}{\partial x} = xz^2, \quad \tfrac{\partial U}{\partial y} = yz^2 \quad \text{e} \quad \tfrac{\partial U}{\partial z} = z(x^2+y^2+z^2)$$

Dalla prima delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x,y,z) = \int xz^2 dx = \tfrac{x^2z^2}{2} + C_1(y,z)$$

e dalla seconda

$$yz^2 = \tfrac{\partial U}{\partial y} = \tfrac{\partial C_1}{\partial y}$$

Dunque

$$C_1(y,z) = \int yz^2 dy = \tfrac{y^2z^2}{2} + C_2(z)$$

da cui

$$U(x,y,z) = \tfrac{x^2z^2}{2} + \tfrac{y^2z^2}{2} + C_2(z).$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo infine che

$$z(x^2+y^2+z^2) = \frac{\partial U}{\partial z} = x^2z + y^2z + C_2'(z)$$

da cui $C_2'(z) = z^3$ e quindi $C_2(z) = \frac{z^4}{4} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in A sarà allora

$$U(x,y,z) = \frac{x^2z^2}{2} + \frac{y^2z^2}{2} + \frac{z^4}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poichè il campo è conservativo in A ed il sostegno della curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, è contenuto in A, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = U(\varphi(2\pi)) - U(\varphi(0))$ dove U è un potenziale del campo. Allora, per quanto ottenuto sopra, risulta

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = U(1,0,2\pi) - U(1,0,0) = 2\pi^2(1+2\pi^2)$$

9. Il campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{\sin x}{z}, \frac{\cos y}{z}, \frac{\cos x - \sin y}{z^2}\right)$ è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \neq 0\}$ dove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{\sin x}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{\cos y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Poichè il dominio A non risulta semplicemente connesso, non possiamo concludere che essendo irrotazionale il campo è conservativo in A, possiamo però affermare che essendo irrotazionale il campo risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $A^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ e $A^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$.
Per determinare un potenziale $U(x,y,z)$ di $\mathbf{F}(x,y,z)$ in $A^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\sin x}{z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\cos y}{z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\cos x - \sin y}{z^2}$$

Dalla prima delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x,y,z) = \int \frac{\sin x}{z} dx = -\frac{\cos x}{z} + C_1(y,z)$$

e dalla seconda

$$\frac{\cos y}{z} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

Dunque

$$C_1(y,z) = \int \frac{\cos y}{z} dy = \frac{\sin y}{z} + C_2(z)$$

da cui

$$U(x,y,z) = -\frac{\cos x}{z} + \frac{\sin y}{z} + C_2(z).$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo infine che

$$\frac{\cos x - \sin y}{z^2} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\cos x}{z^2} - \frac{\sin y}{z^2} + C_2'(z)$$

da cui $C_2'(z) = 0$ e quindi $C_2(z) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in $A^\pm$ sarà allora $U^\pm(x, y, z) = \frac{\sin y - \cos x}{z} + c_\pm$, $c_\pm \in \mathbb{R}$ non necessariamente uguali. Ne segue che la funzione

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin y - \cos x}{z} + c_+, & \text{se } z > 0 \\ \frac{\sin y - \cos x}{z} + c_-, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

con $c_\pm \in \mathbb{R}$ è un potenziale del campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ in A e quindi il campo risulta conservativo nel suo dominio.

Per calcolare il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (t, 2t, 1 + t)$, $t \in [0, \pi]$, possiamo allora utilizzare il Teorema sul lavoro di un campo conservativo. Essendo il sostegno della curva contenuto in A^+, abbiamo che

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = U(\varphi(\pi)) - U(\varphi(0)) = U(\pi, 2\pi, 1 + \pi) - U(0, 0, 1) = \frac{1}{1+\pi} + 1$$

10. Il campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, \frac{z - x^2 - y^2}{z^2}\right)$ è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \neq 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{2x}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{2y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in A.$$

Poichè il dominio A non risulta semplicemente connesso non possiamo dire che essendo irrotazionale il campo è conservativo in A, possiamo però affermare che essendo irrotazionale il campo risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $A^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ e $A^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$. Per determinare un potenziale $U(x, y, z)$ di $\mathbf{F}(x, y, z)$ in $A^\pm$ osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z - x^2 - y^2}{z^2}$$

Dalla prima delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x, y, z) = \int \frac{2x}{z} dx = \frac{x^2}{z} + C_1(y, z)$$

e dalla seconda

$$\frac{2y}{z} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

Dunque

$$C_1(y, z) = \int \frac{2y}{z} dy = \frac{y^2}{z} + C_2(z)$$

da cui

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z} + C_2(z).$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo infine che

$$\frac{z - x^2 - y^2}{z^2} = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{x^2 + y^2}{z^2} + C_2'(z)$$

da cui $C_2'(z) = \frac{1}{z}$ e quindi $C_2(z) = \log|z| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in $A^\pm$ sarà allora $U^\pm(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + \log|z| + c^\pm$, $c^\pm \in \mathbb{R}$ non necessariamente uguali. Ne segue che la funzione

$$U(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{z} + \log z + c^+ & \text{se } z > 0 \\ \frac{x^2+y^2}{z} + \log(-z) + c^- & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

con $c^\pm \in \mathbb{R}$, è un potenziale del campo in A e quindi che il campo risulta conservativo nel suo dominio.

Poichè il campo è conservativo in A e il sostegno della curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, -1)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, è contenuto in A^-, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = U^-(\varphi(\frac{\pi}{2})) - U^-(\varphi(0))$ essendo U^- un potenziale del campo $\mathbf{F}$ in A^-. Allora, per quanto ottenuto sopra, risulta

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = U^-(0,1,-1) - U^-(1,0,-1) = 0$$

11. Per calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, x, z)$ uscente dalla superficie $\mathcal{S}$ avente per sostegno il paraboloide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2,\ 1 \le z \le 4\}$, determiniamo innanzitutto una parametrizzazione della superficie $\mathcal{S}$. Utilizzando le coordinate cilindriche abbiamo che $\mathcal{S} = \phi(D)$ essendo

$$\phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \rho^2 \end{cases} \qquad \text{dove } (\rho,\theta) \in D = [1,2] \times [0, 2\pi].$$

Risulta allora $\phi_\rho(\rho,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 2\rho)$ e $\phi_\theta(\rho,\theta) = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0)$ e quindi

$$\phi_\rho(\rho,\theta) \wedge \phi_\theta(\rho,\theta) = (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin^2\theta, \rho).$$

Osserviamo che nel punto $\phi(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ abbiamo che $\phi_\rho(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}) \wedge \phi_\theta(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, -\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ e quindi che la parametrizzazione determina un orientamento entrante del versore normale. Allora dalla definizione di flusso, usando le formule di riduzione, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{N}_u \, d\sigma &= -\iint_D \mathbf{F}(\varphi(\rho,\theta)) \cdot \varphi_\rho(\rho,\theta) \wedge \varphi_\theta(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta \\
&= -\iint_D (\rho^2\sin^2\theta, \rho\cos\theta, \rho^2) \cdot (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin^2\theta, \rho)\, d\rho\, d\theta \\
&= -\iint_D -2\rho^4\cos\theta\sin^2\theta - 2\rho^3\sin\theta\cos\theta + \rho^3\, d\rho\, d\theta \\
&= -\int_1^2 (\int_0^{2\pi} -2\rho^4\cos\theta\sin^2\theta - 2\rho^3\sin\theta\cos\theta + \rho^3 d\theta) d\rho \\
&= -\int_1^2 \left[-2\rho^4\tfrac{\sin^3\theta}{3} - 2\rho^3\tfrac{\sin^2\theta}{2} + \rho^3\theta\right]_0^{2\pi} d\rho \\
&= -2\pi\int_1^2 \rho^3 d\rho = 2\pi\left[\tfrac{\rho^4}{4}\right]_1^2 = -\tfrac{15}{2}\pi
\end{aligned}$$

In alternativa, osservato che la superficie $\mathcal{S}$ è descritta dall'equazione cartesiana $z = x^2+y^2$ con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, abbiamo che $\mathcal{S} = \psi(T)$ essendo

$$\psi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad \text{dove } (u, v) \in T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le u^2 + v^2 \le 4\}.$$

Risulta allora $\psi_u(u, v) = (1, 0, 2u)$ e $\psi_v(u, v) = (0, 1, 2v)$ e quindi

$$\psi_u(u, v) \wedge \psi_v(u, v) = (-2u, -2v, 1).$$

Anche in questo caso la parametrizzazione determina un orientamento entrante del versore normale, infatti nel punto $\psi(0, \sqrt{2}) = (0, \sqrt{2}, 2)$ risulta $\psi_u(0, \sqrt{2}) \wedge \psi_v(0, \sqrt{2}) = (0, -2\sqrt{2}, 1)$. Allora, dalla definizione di flusso otteniamo:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x, y, z)\cdot d\sigma = -\iint_T \mathbf{F}(\psi(u, v)\cdot\psi_u(u, v)\wedge\psi_v(u, v)\, du\, dv = -\iint_T -2uv^2-2uv+u^2+v^2 du\, dv$$

Per calcolare l'integrale doppio possiamo utilizzare le coordinate polari ponendo $\begin{cases} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \end{cases}$.
Il dominio T risulta immagine mediante le coordinate polari del dominio

$$T' = \{(\rho, \theta) \,|\, \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [1, 2]\}$$

Dalle formule di cambiamento di variabili e di riduzione otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\sigma &= -\iint_{T'} (-2\rho^3 \cos\theta \sin^2\theta - 2\rho^2 \sin\theta\cos\theta + \rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta \\ &= -\int_1^2 (\int_0^{2\pi} -2\rho^4 \cos\theta \sin^2\theta - 2\rho^3 \sin\theta\cos\theta + \rho^3 d\theta)d\rho = -\tfrac{15}{2}\pi \end{aligned}$$

12. Per calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2z, z(y^2 + x))$ uscente dalla superficie semplice $\mathcal{S}$ frontiera del solido $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le z \le 3-(x^2+y^2),\ z \le 2\}$ possiamo utilizzare il Teorema della divergenza ottenendo

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_u d\sigma = \iiint_T 2y^2 + x\, dxdydz$$

Per calcolare l'integrale triplo possiamo integrare per strati osservato che risulta

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [0, 2],\ (x, y) \in D_z\} \text{ con } D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 3 - z\}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_u d\sigma &= \iiint_T 2y^2 + x\,dxdydz = \int_0^2 (\iint_{D_z} 2y^2 + x\,dxdy)dz \\ &= \int_0^2 (\int_0^{\sqrt{3-z}} (\int_0^{2\pi} (2\rho^2\sin^2\theta + \rho\cos\theta)\rho\,d\theta)\,d\rho)dz \\ &= \int_0^2 (\int_0^{\sqrt{3-z}} \rho^3\,[\theta - \cos\theta\sin\theta]_0^{2\pi} + \rho^2\,[-\sin\theta]_0^{2\pi}\,d\rho)dz \\ &= 2\pi\int_0^2 (\int_0^{\sqrt{3-z}} \rho^3\,d\rho)dz = \tfrac{\pi}{2}\int_0^2 \left[\rho^4\right]_0^{\sqrt{3-z}}\,dz = \tfrac{\pi}{2}\int_0^2 (3-z)^2\,dz \\ &= \tfrac{\pi}{6}\left[(z-3)^3\right]_0^2 = \tfrac{13\pi}{3}\end{aligned}$$

13. Calcoliamo il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, yz, x)$ uscente dalla superficie avente per sostegno la frontiera del solido $T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \le z \le 2\}$ usando nuovamente il Teorema della divergenza. Abbiamo

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_u d\sigma = \iiint_T z\,dxdydz$$

Per calcolare l'integrale triplo possiamo integrare per strati osservato che risulta

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, z\in[0,2],\ (x,y)\in D_z\} \text{ con } D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\le z\}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_u d\sigma &= \iiint_T z\,dxdydz = \int_0^2 (\iint_{D_z} z\,dxdy)dz \\ &= \int_0^2 z\mu(D_z)\,dz = \int_0^2 \pi z^2\,dz = \tfrac{\pi}{3}\left[z^3\right]_0^2 = \tfrac{8}{3}\pi\end{aligned}$$

14. Calcoliamo il flusso di $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz^3, xz^2, z)$ attraverso la superficie $\mathcal{S}$ ottenuta dalla rotazione della curva γ di equazione cartesiana $x = \sqrt{1+z^2}$, $z\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, attorno all'asse z di un angolo pari a π e orientata in modo tale che nel punto $P(0,1,0)$ risulti $\mathbf{N}\cdot\mathbf{j} < 0$. Utilizzando le coordinate cilindriche, una parametrizzazione della superficie di rotazione $\mathcal{S}$ risulta

$$\Phi: \quad \begin{cases} x = \sqrt{1+z^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{1+z^2}\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (z,\theta)\in D = [-\sqrt{3},\sqrt{3}]\times[0,\pi].$$

Ne segue che $\Phi_z(z,\theta)\wedge\Phi_\theta(z,\theta) = (-\sqrt{1+z^2}\cos\theta, -\sqrt{1+z^2}\sin\theta, z)$ e dunque, essendo $P(0,1,0) = \Phi(0,\frac{\pi}{2})$, che $\Phi_z(0,\frac{\pi}{2})\wedge\Phi_\theta(0,\frac{\pi}{2}) = (0,-1,0)$ e che l'orientamento indotto sulla superficie è quello richiesto. Si ottiene allora

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}(\Phi(z,\theta))\cdot\Phi_z(z,\theta)\wedge\Phi_\theta(z,\theta)\,dzd\theta \\
&= \iint_D (z^3\sqrt{1+z^2}\sin\theta, z^2\sqrt{1+z^2}\cos\theta, z)\cdot(-\sqrt{1+z^2}\cos\theta, -\sqrt{1+z^2}\sin\theta, z)\,dzd\theta \\
&= \iint_D z^2 - z^2(1+z^2)(1+z)\sin\theta\cos\theta\,dzd\theta = \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z^2\,dz = 2\pi\sqrt{3}
\end{aligned}$$

15. $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, x, x+z)$ uscente dalla superficie rigata $\mathcal{S}$ la superficie avente come generatrice la circonferenza $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, e come vettori direttori i vettori $\mathbf{w} = (0,1,1)$ nella regione $z \in [0,4]$. Una parametrizzazione del cilindro generalizzato di direttrici le rette parallele al vettore $\mathbf{w} = (0,1,1)$ sarà data allora da

$$\Phi(t,s) = \varphi(t) + s\mathbf{w} = (\cos t, \sin t, 0) + s(0,1,1) = (\cos t, \sin t + s, s)$$

dove $(t,s) \in D = [0,2\pi]\times[0,4]$. Abbiamo che la superficie risulta di classe $\mathcal{C}^1$ con $\Phi_t(t,s) = (-\sin t, \cos t, 0)$ e $\Phi_s(t,\theta) = (0,1,1)$ da cui

$$\Phi_t(t,s)\wedge\Phi_s(t,s) = (\cos t, \sin t, -\sin t)$$

Nel punto $\Phi(\frac{\pi}{2}, 2) = (0,3,2)$ abbiamo $\Phi_t(\frac{\pi}{2},2)\wedge\Phi_s(\frac{\pi}{2},2) = (0,1,-1)$ quindi l'orientamento è quello richiesto. Otteniamo allora

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}(\Phi(t,s))\cdot\Phi_t(t,s)\wedge\Phi_\theta(t,s)\,dtds \\
&= \iint_D ((\sin t+s)s, \cos t, \cos t+s)\cdot(\cos t, \sin t, -\sin t)\,dtds \\
&= \iint_D s\cos t(\sin t+s) + \cos t\sin t - \sin t(\cos t+s)\,dtds \\
&= \int_0^4 (\int_0^{2\pi} s\cos t\sin t + s^2\cos t - s\sin t\,dt)ds = \int_0^4 \left[s\tfrac{\sin^2 t}{2} + s^2\sin t + s\cos t\right]_0^{2\pi} ds = 0
\end{aligned}$$