

FILO ROSSO Il teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio complesso di grado n è un esempio particolarmente semplice di una funzione complessa definita in tutto il piano complesso:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f : z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_n \neq 0).$$

Analogamente al caso reale, esiste la *derivata complessa* di f in ogni $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=0}^n k a_k z_0^{k-1}.$$

In questo capitolo vedremo che le funzioni derivabili in senso complesso, anche dette *funzioni olomorfe*, hanno una struttura molto particolare. A livello insiemistico l'insieme \mathbb{C} coincide con \mathbb{R}^2 e perciò si potrebbe interpretare una funzione da \mathbb{C} in \mathbb{C} come una funzione reale ma vettoriale da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 (identificando $z = x + iy$ con (x, y) e $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $(u(x, y), v(x, y))$). Ma contrariamente a \mathbb{R}^2 , \mathbb{C} è anche un insieme numerico ed è esattamente la struttura numerica che serve se vogliamo definire la derivata complessa: per definire il rapporto incrementale di f dobbiamo dividere un numero complesso per un altro!

Le conseguenze di questa osservazione elementare saranno sorprendenti e, come vedremo, porteranno a una teoria matematica di notevole eleganza. Infatti le funzioni olomorfe godono di proprietà molto particolari. Per esempio, vedremo che la derivata di una funzione olomorfa è a sua volta una funzione olomorfa, ovvero una funzione derivabile in senso complesso è automaticamente di classe C^∞ (ovviamente questo non vale per le funzioni reali: $f(x) = x\sqrt{x}$ è derivabile in \mathbb{R} ma la derivata seconda non esiste in $x = 0$).

Un'altra proprietà notevole è il *teorema di Liouville*, dimostrato nell'Esercizio 18.11:

ogni funzione olomorfa e limitata in \mathbb{C} è costante in \mathbb{C}

(f è limitata in \mathbb{C} se $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$). Il risultato evidentemente non vale per le funzioni reali: $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, è banalmente limitata ($0 < f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), ma non è costante. Si noti che in questo esempio abbiamo usato la proprietà che il polinomio $x^2 + 1$ non ha zeri *reali*. Viceversa, si può utilizzare il teorema di Liouville per dimostrare il *teorema fondamentale dell'algebra*:

un polinomio di grado $n \geq 1$ ha n zeri complessi (contati secondo la loro molteplicità), ovvero si scompone in fattori lineari.

La cosa non banale da dimostrare è che esiste almeno uno zero, z_1 (infatti, poi si mette in evidenza il fattore $z - z_1$ e si considera il polinomio rimanente di grado $n - 1$, che a sua volta ha uno zero, z_2 , eccetera). Dimostriamo quindi che

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ha almeno uno zero complesso. Ragionando per assurdo, supponiamo che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione razionale

$$g(z) = 1/f(z)$$

è definita in \mathbb{C} e, analogamente al caso reale, è continua e olomorfa in \mathbb{C} . Inoltre $|f(z)| \rightarrow +\infty$ per $|z| \rightarrow +\infty$, ovvero $|g(z)| \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow +\infty$. Perciò, essendo continua, $z \mapsto |g(z)|$ è limitata:

$$|g(z)| \leq M \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Ma allora, per il teorema di Liouville, g è costante; quindi anche f è costante, che è assurdo se $n \geq 1$.

Esistono dimostrazioni diverse del teorema fondamentale dell'algebra: per esempio, nel testo ne presentiamo una che, pur molto simile a quella ap-

pena descritta, fa uso del principio del massimo anziché del teorema di Liouville (si veda l'Esercizio 18.10). Alcune sono di tipo topologico,

altre di tipo algebrico, anche se per adesso nessuna sembra poter fare totalmente a meno del concetto di continuità.

Guida

Per la lettura di questo capitolo non sono necessarie le nozioni fornite nei Capitoli da 13 a 16. Alcune prime applicazioni della teoria delle funzioni oloomorfe sono discusse nel Capitolo 19 (trasformata di Laplace) e nella seconda parte del Capitolo 20 (trasformata di Fourier).

18.1 Derivata complessa; funzione oloomorfa

Dato un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{C}$, una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ può essere considerata come una funzione di *una* variabile complessa,

$$z \mapsto f(z)$$

oppure, identificando gli elementi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $f(z) = u + iv \in \mathbb{C}$ rispettivamente con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, come una funzione (vettoriale) di *due* variabili reali,

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

ESEMPIO 18.1

Se $f(z) = 1/z$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha che

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

quindi $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ e $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Intorni e limiti in \mathbb{C}

Identificando \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 , si definiscono gli intorni sferici di $z \in \mathbb{C}$,

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

e il concetto di limite: dato $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, punto di accumulazione per $\text{dom } f$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = \text{Re } \ell \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = \text{Im } \ell. \end{cases}$$

Se f è definita in z_0 , f si dice **continua** in z_0 se $f(z) \rightarrow f(z_0)$ per $z \rightarrow z_0$. Inoltre, per definire limiti per $z \rightarrow \infty$, si identifica l'insieme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (si veda il Paragrafo 10.2.3): quindi, per esempio,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} u(x, y) = \text{Re } \ell \\ \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} v(x, y) = \text{Im } \ell \end{cases}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (u^2(x, y) + v^2(x, y)) = +\infty.$$

Utilizzando l'esempio precedente si verifica facilmente che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty.$$

L'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} ha, oltre alla struttura vettoriale di \mathbb{R}^2 , una *struttura algebrica* grazie all'introduzione del *prodotto* in \mathbb{C} . In particolare è ben definito il quoziente e possiamo quindi dare una nozione di *derivabilità in senso complesso* modellata su quella di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} .

DEFINIZIONE 18.1

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $z_0 \in A$. Se esiste finito (in \mathbb{C}) il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

f si dice **derivabile in senso complesso** in z_0 e $f'(z_0)$ si dice la **derivata complessa** di f in z_0 . Se f ha derivata complessa in ogni $z \in A$, f si dice **olomorfa** in A . Una funzione olomorfa in \mathbb{C} si dice anche **intera**.

Come nel caso di funzioni reali di una variabile reale, una funzione è derivabile in senso complesso in z_0 se e solo se

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0. \quad (18.1)$$

Il seguente risultato è notevole, in quanto indica che il concetto di derivabilità in senso complesso è più forte della differenziabilità delle parti reali e immaginarie $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

TEOREMA 18.2

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ per $x + iy \in A$. Allora f è derivabile in senso complesso in $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ se e solo se u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases} \quad (18.2)$$

Condizioni di
Cauchy-Riemann

Le condizioni (18.2) prendono il nome di **condizioni di Cauchy-Riemann** e sono un primo esempio della particolarità della teoria delle funzioni complesse derivabili. Ponendo

$$f_x(z_0) := u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \quad f_y(z_0) := u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0) \quad (18.3)$$

le (18.2) si possono riscrivere come

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0). \quad (18.4)$$

Dimostrazione

Si osservi prima che la differenziabilità di u e v in (x_0, y_0) è equivalente a

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

per $z \rightarrow z_0$, ovvero, ricordando le (18.3), a

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|) \end{aligned} \quad (18.5)$$

per $z \rightarrow z_0$. Supponiamo ora f derivabile in z_0 . Allora, riscrivendo la (18.1) come

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(x - x_0) + if'(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

la (18.5) è verificata con $f_x(z_0) = f'(z_0)$ e $f_y(z_0) = if'(z_0)$. Quindi u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e vale la (18.4), che è equivalente alle condizioni di Cauchy-Riemann.

Ripercorrendo al contrario questi passi, è altrettanto facile mostrare che la (18.2) e la (18.5) implicano la (18.1).

ESEMPIO 18.3

La funzione $f(z) = z^2$ è olomorfa in \mathbb{C} . Per verificarlo si può usare la definizione di $f'(z)$:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0,$$

oppure si possono verificare le condizioni di Cauchy-Riemann: $f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$, quindi $u := x^2 - y^2$ e $v := 2xy$ sono differenziabili in \mathbb{R}^2 e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -2y = -v_x(x, y).$$

ESEMPIO 18.4

La funzione $f(z) = |z|$ non ammette derivata complessa in alcun punto $z \in \mathbb{C}$. Infatti $f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$, ovvero $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = 0$, quindi, per $(x, y) \neq (0, 0)$ (nell'origine u non è differenziabile), $u_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq v_y(x, y)$ se $x \neq 0$ e $u_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq -v_x(x, y)$ se $y \neq 0$.

ESEMPIO 18.5

Nel caso complesso la funzione esponenziale e^z è definita come

$$e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{per } x + iy \in \mathbb{C}.$$

La definizione di e^z è compatibile con la notazione $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (si veda la (1.25)); inoltre, ponendo $y = 0$ ritroviamo la funzione reale e^x . Segue dal Teorema 18.2 che la funzione e^z è intera e che

$$(e^z)' = e^z \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Infatti

$$f(z) = e^z = u(x, y) + iv(x, y), \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

u e v sono differenziabili in \mathbb{R}^2 e

$$u_x = e^x \cos y = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Inoltre, ricordando che $f'(z) = f_x(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$ si ottiene che

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Continuano a valere anche nel caso complesso le principali regole di derivazione e i teoremi riguardanti la derivata di funzione composta e della funzione inversa. Le dimostrazioni sono completamente analoghe al caso delle funzioni reali.

Esponenziale
complesso

TEOREMA 18.3 Algebra delle derivate

Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in A$. Se f e g sono derivabili in senso complesso in z_0 , allora lo sono anche $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), fg e, se $g(z_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$. Inoltre

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

TEOREMA 18.4 Derivata di funzione composta

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow A$, $A, B \subseteq \mathbb{C}$ insiemi aperti. Se g è derivabile in senso complesso in $z_0 \in B$ e f lo è in $w_0 = g(z_0)$, allora la funzione composta $f \circ g : B \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in z_0 e

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

TEOREMA 18.5 Derivata di funzione inversa

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Se f è invertibile e olomorfa in A e se $f'(z_0) \neq 0$, allora la funzione inversa di f , f^{-1} , è derivabile in $w_0 = f(z_0)$ e

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Per esempio, segue da queste proprietà che se $n \in \mathbb{N}$

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad (z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (n \neq 0).$$

Nel caso complesso le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono definite come

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Essendo e^z intera (con derivata e^z), lo sono anche $\sin z$ e $\cos z$, e segue dalla regola della catena che

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Si osservi che se $z = x \in \mathbb{R}$ si ritrovano le funzioni reali $\sin x$ e $\cos x$.

Siano

$$A = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}, \quad f(z) = z^2 \quad \text{per } z \in A.$$

Allora f è iniettiva, quindi invertibile, nel semipiano A e il dominio della funzione inversa f^{-1} è l'immagine di f , ovvero il piano complesso meno il semiasse negativo, che per brevità indicheremo nel seguito con la notazione $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:

$$\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

(si veda la Figura 18.1). Infatti

ESEMPIO 18.6

Funzioni trigonometriche complesse

ESEMPIO 18.7

Valore principale di \sqrt{z}

$$z = \rho e^{i\varphi} \in A \Leftrightarrow \rho > 0 \text{ e } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

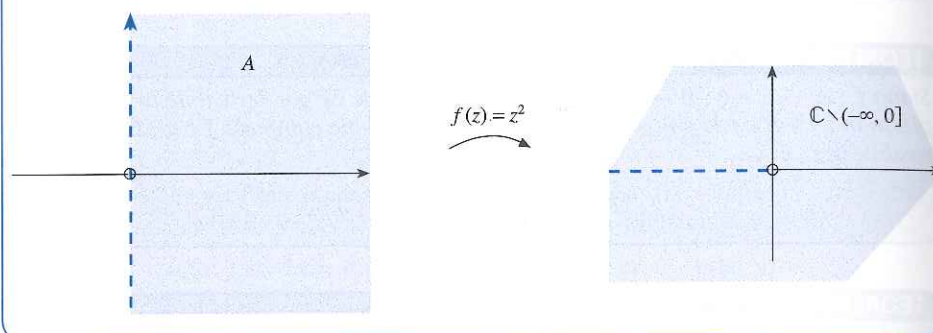
quindi $z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$ e

$$z \in A \Leftrightarrow |z^2| = \rho^2 > 0 \text{ e } \arg(z^2) = 2\varphi \in (-\pi, \pi).$$

La funzione inversa, $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$, si dice **valore principale di \sqrt{z}** ; per il Teorema 18.5, \sqrt{z} è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{f'(\sqrt{z})} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (18.6)$$

Figura 18.1



ESEMPIO 18.8

Valore principale
del logaritmo

Sia

$$f(z) = e^z \quad \text{per } z \in A = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}.$$

Allora f è invertibile in A e il dominio di f^{-1} è l'immagine di f :

$$\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

(si veda la Figura 18.2). Infatti

$$z = x + iy \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } -\pi < y < \pi$$

quindi $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

$$z \in A \Leftrightarrow |e^z| = e^x > 0 \quad \text{e} \quad \arg(e^z) = y \in (-\pi, \pi).$$

La funzione inversa, $f^{-1}(z) = z$, si dice **valore principale del logaritmo** e si indica con $\text{Log } z$. Per il Teorema 18.5, $\text{Log } z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e

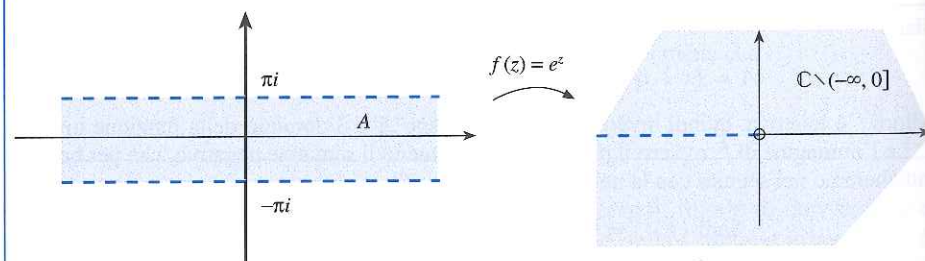
$$(\text{Log } z)' = \frac{1}{e^{\text{Log } z}} = \frac{1}{z} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (18.7)$$

Inoltre vale che

$$\text{Log } z = \text{Log } |z| + i \arg z \quad \text{dove } |\arg z| < \pi \text{ e } z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}. \quad (18.8)$$

Infatti, dati $w = x + iy \in A$ e $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $z = \text{Log } w \Leftrightarrow z = e^w \Leftrightarrow z = e^x (\cos y + i \sin y) \Leftrightarrow |z| = e^x$ e $\arg z = y \Leftrightarrow x = \text{Log } |z|$, $\arg z = y$.

Figura 18.2



La funzione $f(z) = z^a$ ($a \in \mathbb{C}$), detta **valore principale di z^a** , è così definita:

$$z^a := e^{a \operatorname{Log} z} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Per il Teorema 18.4 z^a è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e

$$(z^a)' = (e^{a \operatorname{Log} z})' = a e^{a \operatorname{Log} z} (\operatorname{Log} z)' = a z^{a-1} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (18.9)$$

Si noti che i valori principali di \sqrt{z} , del logaritmo e di z^a coincidono, rispettivamente, con le funzioni reali \sqrt{x} , $\log x$ e x^a per $x \in (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ e per $a \in \mathbb{R}$. In particolare $\operatorname{Log} |z|$ coincide con il logaritmo naturale di $|z|$.

Provare che la funzione

$$f(x + iy) = e^x \cos y + ai e^x \sin y \quad (a \in \mathbb{R})$$

è derivabile in senso complesso in $x_0 + iy_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se $a = 1$ (ovvero se e solo se $f(x + iy) = e^{x+iy}$).

Calcolare, se esistono, le derivate in senso complesso delle seguenti funzioni complesse:

- a) $f(z) = (3z + 2)^2$; c) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ($z \neq \pm i$);
 b) $f(z) = \sin^4(2z)$; d) $f(z) = |z|^2$.

Determinare l'immagine delle seguenti funzioni:

- a) $x \mapsto e^{x+iy_0}$, $x \in \mathbb{R}$ (al variare di y_0); c) $z \mapsto e^z$, $|\operatorname{Im} z| < \pi$;
 b) $y \mapsto e^{x_0+iy}$, $y \in \mathbb{R}$ (al variare di x_0); d) $z \mapsto e^z$, $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\pi$.

a) Mostrare che

$$\operatorname{Log}(z^2) = 2 \operatorname{Log} z \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

e che, invece,

$$\operatorname{Log}(z^2) \neq 2 \operatorname{Log} z \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad \frac{\pi}{2} < |\arg z| < \pi;$$

b) dire se

$$(\operatorname{Log}(z-3))' = \frac{1}{z-3} \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

ESEMPIO 18.9

Valore principale di z^a

ESERCIZIO 18.1

ESERCIZIO 18.2

ESERCIZIO 18.3

ESERCIZIO 18.4

18.2 Significato geometrico della derivata complessa

Una **curva in \mathbb{C}** è una funzione continua da un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ in \mathbb{C} ,

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in I.$$

La nomenclatura stessa, e l'uso del grassetto, sottolineano che in questo contesto si sta identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 : il punto $x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ corrisponde al punto $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Attraverso questa identificazione si definiscono i concetti di curva

Curve in \mathbb{C}

rettificabile (con lunghezza $L(\gamma)$), curva **semplice**, **chiusa** e **di Jordan**, curva di classe C^1 (a tratti), **regolare (a tratti)** e il concetto di **curve equivalenti** (con lo stesso verso o verso opposto). In particolare la curva è regolare se $\gamma'(t) := x'(t) + iy'(t) \neq 0$ ($\Leftrightarrow (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$) per ogni $t \in I$. Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, γ una curva regolare contenuta in A , e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua in A e derivabile in senso complesso in $z_0 = \gamma(t_0)$ ($t_0 \in I$). Allora γ passa per z_0 e la curva

$$t \mapsto w(t) := f(\gamma(t)), \quad t \in I$$

passa per $w_0 = f(z_0) \in \mathbb{C}$. Nella Figura 18.3 abbiamo indicato $\gamma'(t_0)$, identificando il numero complesso $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ e il vettore $(x'(t_0), y'(t_0))$. Se $f'(z_0) \neq 0$, dalla regola della catena si ottiene che

$$w'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0.$$

Si noti inoltre che

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0), \quad (18.10)$$

ovvero

$$\arg w'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) \quad \text{non dipende da } \gamma \text{ ma solo da } f'(z_0) \neq 0. \quad (18.11)$$

Figura 18.3 Le curve $t \mapsto \gamma(t)$ e $t \mapsto f(\gamma(t))$.

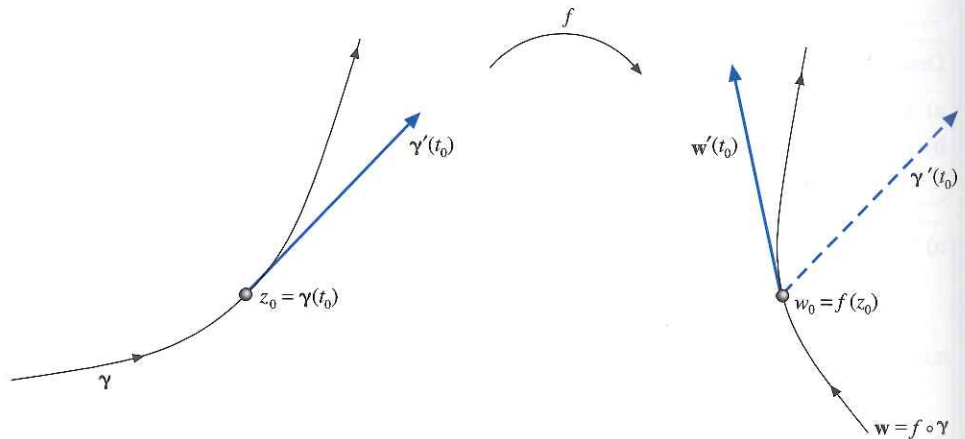
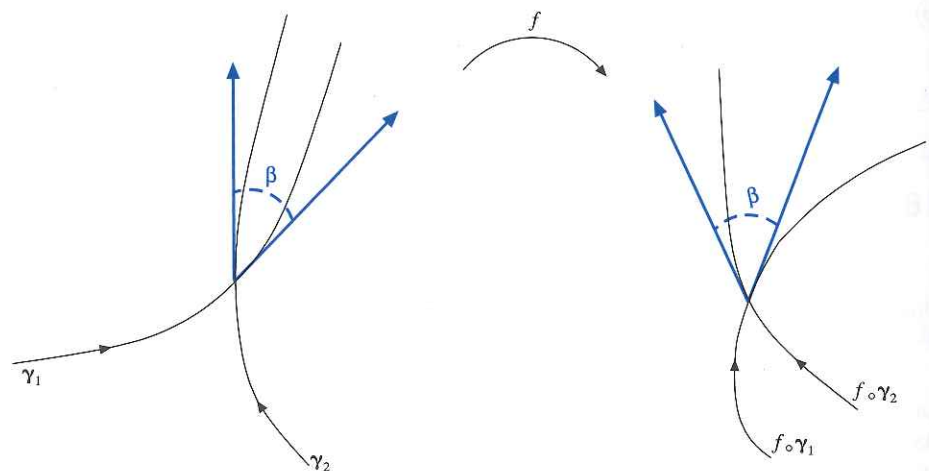


Figura 18.4 $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ definisce una trasformazione conforme.



In particolare, se γ_1 e γ_2 sono due curve regolari passanti per z_0 , allora le curve $t \mapsto f(\gamma_1(t))$ e $t \mapsto f(\gamma_2(t))$ passano per $f(z_0)$ e, se $f'(z_0) \neq 0$, l'angolo β indicato nella Figura 18.4 è preservato dalla trasformazione indotta da f .

DEFINIZIONE 18.6

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, si dice **trasformazione conforme** se preserva gli angoli (in ampiezza e orientazione) tra i vettori tangenti di ogni coppia di curve regolari in un loro punto di intersezione.

Abbiamo quindi visto che

$$\text{se } f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ è olomorfa in } A \text{ e } f'(z) \neq 0 \text{ per } z \in A \quad (18.12)$$

allora f è una trasformazione conforme.

Sia $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ per $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$, siano $\gamma_1(t) = t + iy_0$ e $\gamma_2(t) = x_0 + it$ rispettivamente la retta orizzontale e la retta verticale (in \mathbb{C}) passanti per z_0 . Allora $f(z) = e^z$ trasforma la retta orizzontale nella semiretta uscente dall'origine di coefficiente angolare $\tan y_0$ e la retta verticale nella circonferenza di raggio e^{x_0} , percorsa infinite volte in senso antiorario. Chiaramente l'angolo retto è preservato dalla trasformazione indotta da f (si veda Figura 18.5).

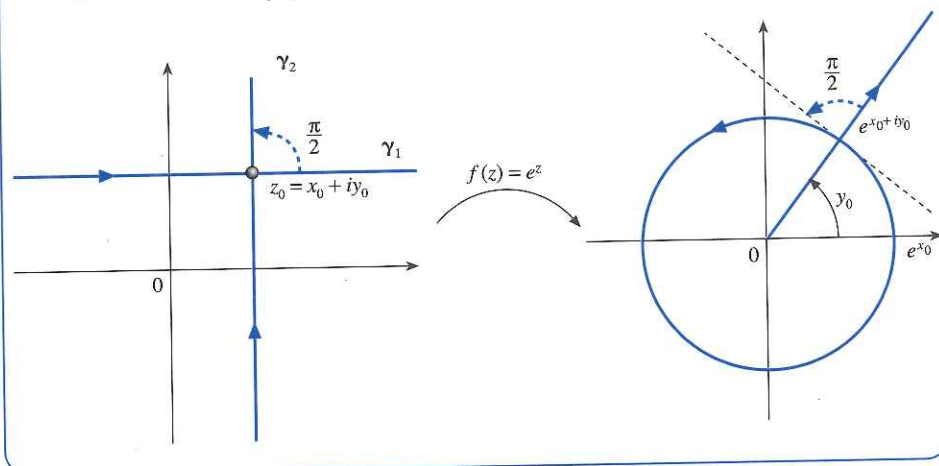
**ESEMPIO 18.10**

Figura 18.5

Siano $z_0 \neq 0$ e $f(z) = z^2$. Determinare l'immagine rispetto a f della circonferenza di centro 0 e raggio $|z_0|$ e della semiretta $t \mapsto te^{i \arg z_0}$ per $t > 0$; verificare che la trasformazione indotta da f preserva l'angolo retto tra la circonferenza e la semiretta nel punto z_0 .

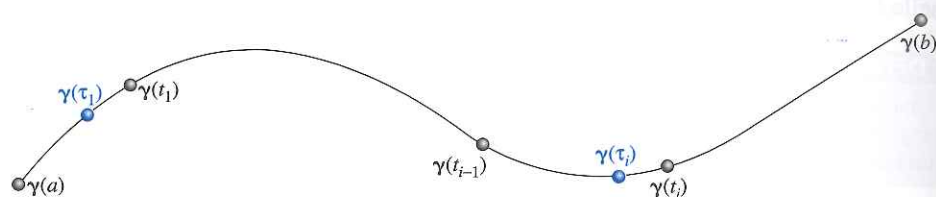
ESERCIZIO 18.5**18.3 Integrali curvilinei di funzioni complesse**

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva di classe C^1 contenuta in A . Per definire l'integrale curvilineo di f su γ procediamo in modo simile a quanto fatto nel Paragrafo 12.2. Data una suddivisione $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di $[a, b]$ con

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$$

si ottengono n curve $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{C}$ di estremi $\gamma(t_{i-1})$, $\gamma(t_i)$. Per ciascuna di esse, si sceglie arbitrariamente $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$: ciò individua un punto $\gamma(\tau_i)$ sul sostegno di γ_i (si veda Figura 18.6).

Figura 18.6 Partizione del sostegno di γ .



Dati \mathcal{D} e l'insieme dei punti $\{\tau_i\}$, si definisce la **somma di Riemann**

$$S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) := \sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})). \quad (18.13)$$

Secondo il seguente risultato le somme di Riemann convergono a un numero complesso J , l'integrale di f lungo γ , "per $n \rightarrow +\infty$ "; le parti reale e immaginaria di J possono essere identificate come integrali curvilinei (reali). Per formularlo si userà la notazione

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_c^b v(t) dt, \quad (18.14)$$

dove $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $g : t \mapsto u(t) + iv(t)$.

Dimostrazione

TEOREMA 18.7

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua e γ una curva contenuta in A di classe C^1 . Sia $S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f)$ la somma di Riemann definita dalla (18.13). Allora esiste un unico numero complesso, detto **integrale di f sulla curva γ** e indicato con

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione $\mathcal{D} = \{t_0, \dots, t_n\}$ di ampiezza minore di δ e per ogni scelta dei punti $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ risulta

$$\left| S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) - \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Inoltre

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (18.15)$$

Si noti che, posti $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ e $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, si ha

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) \\ &\quad + i(u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)). \end{aligned}$$

Perciò, segue dalle (18.14) e (18.15) e dalla definizione di integrale curvilineo (reale!) di seconda specie che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (18.16)$$

In particolare, l'integrale dipende dall'orientazione di γ ma non dalla sua parametrizzazione:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{se } \gamma \text{ e } \tilde{\gamma} \text{ sono equivalenti con lo stesso verso,} \quad (18.17)$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{se } \gamma \text{ e } \tilde{\gamma} \text{ sono equivalenti con verso opposto.}$$

La definizione di $\int_{\gamma} f(z) dz$ si generalizza facilmente a curve di classe C^1 a tratti.

Poiché, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f)| &= \left| \sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\gamma(\tau_i))| |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\ &\leq \left(\max_{t \in I} |f(\gamma(t))| \right) \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \left(\max_{t \in I} |f(\gamma(t))| \right) L(\gamma) \end{aligned}$$

si ha che

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left(\max_{t \in I} |f(\gamma(t))| \right) L(\gamma) \quad (18.18)$$

dove $L(\gamma)$ è la lunghezza di γ .

La curva $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, parametrizza la circonferenza di centro 0 e raggio R percorsa una volta in senso antiorario. Calcoliamo i seguenti integrali:

$$\oint_{\gamma_R} z dz, \quad \oint_{\gamma_R} \bar{z} dz, \quad \oint_{\gamma_R} \frac{1}{z} dz.$$

Si ha $\gamma'_R(t) = iRe^{it}$, quindi

$$\oint_{\gamma_R} z dz = R^2 \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = iR^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = iR^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t)) dt = 0.$$

Analogamente, poiché $\overline{\gamma_R(t)} = Re^{-it} e^{-it} = \frac{1}{R} e^{-it}$,

$$\oint_{\gamma_R} \bar{z} dz = R^2 \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = iR^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i R^2 \quad (18.19)$$

e

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \quad (18.20)$$

Calcolare l'integrale curvilineo di f su γ nei seguenti casi:

a) $f(z) = \bar{z}$, $\gamma(t) = t(1+i)$, $t \in [0, 1]$; b) $f(z) = e^z$, $\gamma(t) = 2t + it$, $t \in [0, 2]$.

Siano \sqrt{z} il valore principale della radice quadrata, $0 < \alpha < \pi$ e $\gamma_{\alpha}(t) = e^{it}$ per $-\alpha \leq t \leq \alpha$. Determinare

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \int_{\gamma_{\alpha}} \sqrt{z} dz.$$

ESEMPIO 18.11

ESERCIZIO 18.6

ESERCIZIO 18.7

18.4 Teorema e formula integrale di Cauchy

Consideriamo la (18.16):

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$

dove γ è una curva di classe C^1 a tratti con sostegno in un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ e $f = u + iv$ è una funzione continua in A . Se f è olomorfa in A segue dalle condizioni di Cauchy-Riemann, (18.2), che $u_y = -v_x$ e $v_y = u_x$, ovvero le forme differenziali $u dx - v dy$ e $v dx + u dy$ sono chiuse in A . Perciò se A è semplicemente connesso e se supponiamo anche che u e v siano di classe $C^1(A)$, per il Teorema 12.21 $u dx - v dy$ e $v dx + u dy$ sono esatte in A e, per il Teorema 12.17, l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ dipende solo dei punti iniziali e finali di γ .

Il seguente teorema rende rigoroso questo risultato senza utilizzare l'ipotesi che $u, v \in C^1(A)$. Tuttavia senza tale informazione aggiuntiva la dimostrazione diventa considerevolmente più complicata e la omettiamo.

TEOREMA 18.8 Teorema integrale di Cauchy

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in A . Allora, se γ_1 e γ_2 sono due curve di classe C^1 a tratti con sostegno in A e con gli stessi punti iniziali e finali, risulta

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (18.21)$$

In particolare

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{se } \gamma \text{ è chiusa.} \quad (18.22)$$

Come si è visto nell'Esempio 18.11, la (18.22) non vale se f non è olomorfa (si consideri per esempio la funzione $f(z) = \bar{z}$ e il risultato nella (18.19)) o se A non è semplicemente connesso (per esempio $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nella (18.20)).

La seguente classe di curve comparirà spesso nel seguito e conviene dargli un nome:

DEFINIZIONE 18.9

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e B un sottoinsieme di \mathbb{C} . Una curva di Jordan γ di classe C^1 a tratti si dice **cammino in A intorno a B** se il sostegno di γ è contenuto in A e B è contenuto nell'interno di γ .

Consideriamo la situazione rappresentata nella Figura 18.7: $A \subseteq \mathbb{C}$ è un insieme aperto che ha al suo interno una e una sola lacuna, B , quindi A non è semplicemente connesso (per esempio $A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ per qualche $z_0 \in \mathbb{C}$).

Siano γ_1 e γ_2 due cammini in A intorno a B orientati positivamente (cioè in senso antiorario). Se f è olomorfa in A , $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ e $\int_{\gamma_2} f(z) dz$ non valgono necessariamente 0 (si veda la (18.20)), ma segue facilmente dal teorema integrale di Cauchy che sono uguali:

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (18.23)$$

Figura 18.7 γ_1 e γ_2 circondano la lacuna B .

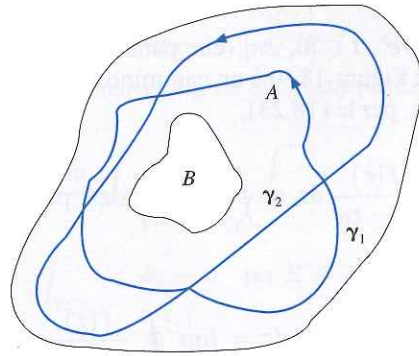
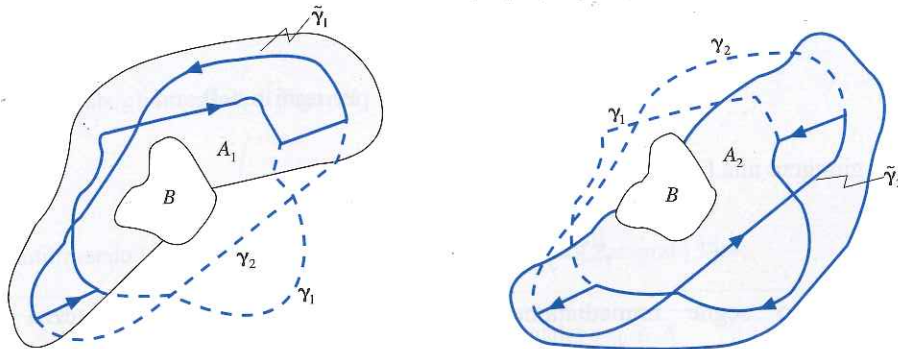


Figura 18.8



Infatti, siano $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ le due curve chiuse costruite come indicato in Figura 18.8. Allora

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}_2} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz - \oint_{\gamma_1} f(z) dz.$$

D'altra parte i sostegni di $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ sono contenuti rispettivamente in A_1 e A_2 , due sottoinsiemi semplicemente connessi di A ; quindi, per il teorema integrale di Cauchy,

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_2} f(z) dz = 0$$

e si ottiene la (18.23).

Poiché $1/z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, per la (18.20) e la (18.23) si ha che

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

per ogni cammino in \mathbb{C} intorno all'origine orientato positivamente.

Dal teorema integrale di Cauchy segue la notevolissima *formula integrale di Cauchy*.

TEOREMA 18.10 Formula integrale di Cauchy

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in A , $z_0 \in A$ e γ un cammino in A intorno a z_0 orientato positivamente. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (18.24)$$

ESEMPIO 18.12

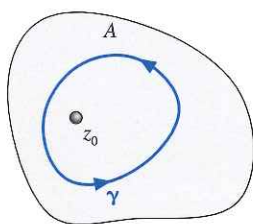


Figura 18.9

Dimostrazione

La curva $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (che parametrizza la circonferenza di centro z_0 e raggio r , si veda la Figura 18.9) è un cammino in A intorno a z_0 per r sufficientemente piccolo. Allora, per la (18.23),

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{per } r > 0$$

quindi risulta

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Per la (18.20),

$$\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad \text{per ogni } r > 0.$$

Per giungere alla (18.24) basta allora provare che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

ma questo segue immediatamente dalla (18.18) e dalla limitatezza di $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$ in un intorno di z_0 :

$$\left| \oint_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq M(2\pi r) \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow 0.$$

La formula integrale di Cauchy mette in evidenza una proprietà peculiare delle funzioni olomorfe: se γ è una curva di Jordan di classe C^1 a tratti in un insieme semplicemente connesso, il valore di una funzione olomorfa in A in un qualunque punto z all'interno di γ è determinato dai valori di f su γ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{z - w} dw.$$

In particolare, scegliendo $\gamma(t) = z + re^{it}$, si ha che $\gamma'(t) = ire^{it}$ e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{2}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt$$

ovvero

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt. \quad (18.25)$$

La (18.25) si può interpretare come un teorema di valor medio: se f è olomorfa in un intorno di z , allora $f(z)$ è il valor medio di f su una circonferenza di centro z e raggio sufficientemente piccolo.

Siano $R > 0$ e $\gamma_R = \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R} \cup \gamma_{3,R}$, dove $\gamma_{1,R}(t) = t$ per $0 \leq t \leq R$, $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ per $0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi$ e $\gamma_{3,R}(t) = (R-t)e^{i\pi/4}$ per $0 \leq t \leq R$.

a) Disegnare γ_R e utilizzare il Teorema integrale di Cauchy per calcolare $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$.

b) Dimostrare che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

c) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty.$$

d) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \int_0^R (\cos(t^2) - i \sin(t^2)) dt.$$

e) Calcolare gli integrali di Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

utilizzando la relazione $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (si veda il Paragrafo 14.4).

ESERCIZIO 18.8

Integrali di Fresnel

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia in A , tale che per qualche $z_0 \in A$

$$|f(z)| \leq M := |f(z_0)| \quad \text{per } z \in A.$$

a) Utilizzando la (18.25), dimostrare che per $r > 0$ sufficientemente piccolo

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$

b) Utilizzare (a) per dimostrare che $|f(z)|$ è costante in A .

c) Utilizzare (b) e le condizioni di Cauchy-Riemann per dimostrare che $f(z)$ è costante in A .

d) Utilizzare (c) per dimostrare il seguente **principio di massimo**:

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, connesso e limitato e sia f olomorfa in A , continua in \bar{A} e non costante. Allora la funzione $z \mapsto |f(z)|$ assume il massimo su ∂A .

ESERCIZIO 18.9

Principio di massimo

Sia $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio di grado $n \geq 1$ con coefficienti complessi a_0, \dots, a_n ($a_n \neq 0$). Supponendo che $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, si definisca

$$g(z) := \frac{1}{p(z)} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

a) Dimostrare che $\lim_{z \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$.

b) Dimostrare che esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che

$$|g(z)| \leq |g(z_0)| \neq 0 \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

c) Utilizzare l'esercizio precedente per concludere che $p(z) = p(z_0)$ in \mathbb{C} ; dedurre l'assurdo dell'ipotesi $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e la seguente versione del **teorema fondamentale dell'algebra**:

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ possiede almeno uno zero nel piano complesso.

ESERCIZIO 18.10

Teorema
fondamentale
dell'algebra

18.5 Derivate di ordine superiore di funzioni olomorfe

Siano f olomorfa in A , $z \in A$ e γ un cammino in A intorno a z . Se γ è orientato positivamente, allora, per la formula integrale di Cauchy, si ha

$$f(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Per ogni $w \in \gamma$ fissato, la funzione $z \rightarrow \frac{f(w)}{w-z}$, $z \neq w$, è derivabile rispetto a z e la sua derivata rispetto a z è

$$\frac{f(w)}{(w-z)^2}$$

quindi, ricordando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (Teorema 11.10), si ottiene che

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Ripetendo questo ragionamento risulta

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$$

$$f'''(z) = \frac{6}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^4} dw$$

⋮

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Da questo procedimento, che può essere reso rigoroso, segue un altro risultato sorprendente: se f è olomorfa in A , ovvero se esiste la derivata complessa di f in A , allora esistono tutte le derivate di ordine superiore di f in A .

Dimostrazione

TEOREMA 18.11

Sia f olomorfa in A . Allora f è derivabile infinite volte in A . Se $z \in A$ e γ è un cammino in A intorno a z orientato positivamente, si ha

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{per ogni } n = 0, 1, 2, \dots \quad (18.26)$$

ESERCIZIO 18.11

Teorema di Liouville

Sia f una funzione intera (ossia definita e olomorfa in tutto \mathbb{C}).

a) Utilizzando la (18.26), dimostrare che

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{R} \left(\max_{|w-z|=R} |f(w)| \right) \quad \text{per ogni } R > 0 \text{ e per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

b) Dedurre da (a) che se f è limitata, ovvero se $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora $|f'(z)| = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

c) Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann, dedurre da (b) il **Teorema di Liouville**:

Se f è intera e limitata, allora f è costante

d) Mostrare con un esempio che il teorema di Liouville non è valido per le funzioni reali, limitate e di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

18.6 Funzioni primitive

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, una funzione $G : A \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **primitiva** di f in A se G è olomorfa in A e se $G'(z) = f(z)$ per $z \in A$.

Funzione primitiva

Dimostrazione

TEOREMA 18.12 Teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni complesse

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua e $z_0 \in A$. Per ogni $z \in A$, sia $\gamma_{z_0,z}$ una curva semplice di classe C^1 a tratti con punto iniziale z_0 e punto finale z .

(i) Se per ogni $z \in A$ e per ogni curva semplice $\tilde{\gamma}_{z_0,z}$ di classe C^1 a tratti con punto iniziale z_0 e punto finale z si ha

$$\int_{\tilde{\gamma}_{z_0,z}} f(w) dw = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw$$

allora la funzione

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw$$

è una primitiva di f in A .

(ii) Se G è una primitiva di f in A , allora

$$\int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw = G(z) - G(z_0).$$

Sia $n = 2, 3, \dots$ e

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \quad \text{per } z \neq 0.$$

Allora $G(z) = \frac{1}{1-n} z^{1-n}$ è primitiva di f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e per ogni curva regolare a tratti in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ che va da z_0 a z_1 si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^n} dz = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{z_0^{n-1}} - \frac{1}{z_1^{n-1}} \right).$$

Se $n = 1$, la funzione $\frac{1}{z}$ non ha primitive in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (altrimenti, per il Teorema 18.12(ii), $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ sarebbe stato uguale a 0 per ogni curva chiusa γ). Per la (18.7), la funzione $\text{Log } z$ è primitiva di $\frac{1}{z}$ nell'insieme semplicemente connesso $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

ESEMPIO 18.13

La seconda parte dell'esempio precedente mostra che per una funzione olomorfa in A non esiste sempre una funzione primitiva in A . Se però A è semplicemente connesso, segue dalla (18.22) e dal Teorema 18.12(i) che f ammette una primitiva.

COROLLARIO 18.13

Se $A \subseteq \mathbb{C}$ è aperto e semplicemente connesso e se f è olomorfa in A , f ha una primitiva in A .

Concludiamo con un risultato che caratterizza le funzioni olomorfe in A come le funzioni continue $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ il cui l'integrale è "localmente indipendente dal cammino di integrazione".

Dimostrazione**TEOREMA 18.14**

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua in A . Allora f è olomorfa in A se e solo se per ogni $z_0 \in A$ esiste un intorno $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ di z_0 tale che

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni curva di Jordan di classe C^1 a tratti γ con sostegno contenuto in $B_r(z_0)$.

ESERCIZIO 18.12

Utilizzare una primitiva per calcolare i seguenti integrali:

a) $\int_{\gamma} (e^{2iz} + z^2 - 1) dz$, γ una curva da 0 a 1.

b) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$ per $0 \leq t \leq \pi$.

c) $\int_{\gamma} \frac{1}{(3z - i)^3} dz$, γ una curva da 0 a 1 che non passa per $\frac{i}{3}$.

18.7 Serie di potenze e funzioni olomorfe

Nel Capitolo 9 sono state discusse le serie di potenze reali, ma è anche stato osservato che le loro proprietà più importanti continuano a valere nel caso di potenze complesse. Cominciamo ricapitolando i risultati più significativi.

18.7.1 Serie di potenze complesse

Una **serie numerica complessa**, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$), si dice (**semplicemente**) **convergente** con somma $s \in \mathbb{C}$ se le somme parziali $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ convergono a s :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = s;$$

in tal caso il "resto" tende a zero:

$$s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

La serie si dice **assolutamente convergente** se è convergente $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Convergenza assoluta implica convergenza semplice.

Siano $\{a_k\}$ una successione complessa e $z_0 \in \mathbb{C}$. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

si dice **serie di potenze complesse**. Ragionando come nel caso reale (si veda il Capitolo 9), esiste $r \in [0 + \infty]$, detto **raggio di convergenza**, tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \begin{cases} \text{converge assolutamente se } |z - z_0| < r \\ \text{non converge se } |z - z_0| > r; \end{cases}$$

inoltre la serie converge totalmente e uniformemente in $B(z_0, \rho) = \{|z - z_0| < \rho\}$ per ogni $\rho \in (0, r)$, ovvero

$$\text{(convergenza totale)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \rho^k \text{ è convergente,}$$

$$\text{(convergenza uniforme)} \quad \sup_{z \in B(z_0, \rho)} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Se esiste

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad (\text{possibilmente } L = +\infty)$$

oppure

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \quad (\text{possibilmente } L = +\infty)$$

allora il raggio di convergenza è

$$r = \frac{1}{L} \quad (r = 0 \text{ se } L = +\infty; r = +\infty \text{ se } L = 0). \quad (18.27)$$

TEOREMA 18.15

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{se } |z - z_0| < r.$$

Allora:

- (i) f è continua in $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$;
 (ii) (**scambio di integrale e sommatoria**) per ogni curva semplice di classe C^1 a tratti γ con punto iniziale z_1 , punto finale z_2 e sostegno contenuto in $B_r(z_0)$, risulta

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\int_{\gamma} (z - z_0)^k dz \right)$$

ovvero

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left((z_2 - z_0)^{k+1} - (z_1 - z_0)^{k+1} \right); \quad (18.28)$$

- (iii) (**scambio di derivata e sommatoria**) f è olomorfa in $B_r(z_0)$ e per ogni $n = 1, 2, \dots$ la derivata $f^{(n)}(z)$ è somma della serie delle derivate di $a_k (z - z_0)^k$:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n} \quad \text{se } |z - z_0| < r. \quad (18.29)$$

Dimostrazione

La dimostrazione è in gran parte simile a quella del caso reale (si veda il Capitolo 9). Si osservi che dalla (18.28) segue che $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ se γ è chiusa, quindi (i), (ii) e il Teorema 18.12 implicano che la somma f è olomorfa in $B_r(z_0)$.

ESERCIZIO 18.13

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} (iz)^k = 1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 + \dots; \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots;$$

18.7.2 Sviluppabilità in serie di potenze di funzioni olomorfe

Ricordiamo che la somma delle serie di Taylor di una funzione *reale* di classe C^{∞} non coincide necessariamente con la funzione stessa (si veda l'Esempio 7.39). Ancora una volta si nota la grande differenza tra le funzioni olomorfe e le funzioni derivabili reali.

Dimostrazione**TEOREMA 18.16**

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $z_0 \in A$ e f olomorfa in A . Allora la serie di Taylor di f centrata in z_0 ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

converge nel più grande cerchio di centro z_0 contenuto in A alla somma $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{per ogni } z \in B_r(z_0) \text{ se } B_r(z_0) \subseteq A.$$

Inoltre, se in un intorno di z_0 risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

allora

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0).$$

Se $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, le derivate in senso complesso di f in x_0 coincidono con le derivate di f in x_0 pensata come funzione della variabile reale x . Quindi, le serie di Taylor complesse con $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ avranno gli stessi coefficienti delle serie di Taylor reali. In particolare si ha che

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{se } |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad \text{se } |z| < 1$$

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad \text{se } |z| < 1.$$

Determinare la serie di Taylor centrata in 0 delle seguenti funzioni:

- a) e^{-z^2} ; b) e^{iz} .

ESERCIZIO 18.14

Utilizzando la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w}$ se $|w| < 1$, determinare la serie di Taylor centrata in 0 delle seguenti funzioni:

- a) $\frac{1}{1+z}$; c) $\frac{1}{2-z}$;
 b) $\frac{1}{1-z^2}$; d) $\frac{1}{z+3i}$.

ESERCIZIO 18.15

Sapendo che $\frac{1}{z^2+5z+6} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$, determinare la serie di Taylor di $\frac{1}{z^2+5z+6}$ centrata in 0.

ESERCIZIO 18.16

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, aperto, $a \in A$ e

$$d(a, \partial A) = \sup\{r \in (0, \infty) : B_a(r) \subset A\}.$$

Sia f olomorfa in A con serie di Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$, ($c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$).

Utilizzare la (18.26) per dimostrare la seguente **stima di Cauchy** per c_k :

$$|c_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{se } 0 < r < d(a, \partial A)$$

dove

$$M(r) := \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

ESERCIZIO 18.17

Stima di Cauchy

18.8 Singolarità isolate: le serie di Laurent

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se f è olomorfa in $B_r(z_0)$, allora

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \text{se } z \in B_r(z_0)$$

dove, per la (18.26),

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw$$

per ogni cammino γ in $B_r(z_0)$ intorno a z_0 .

Il seguente teorema può essere interpretato come una generalizzazione di questo risultato al caso in cui f non è definita nel centro z_0 del cerchio, ovvero quando z_0 è una *singolarità isolata* di f .

Dimostrazione

TEOREMA 18.17 Sviluppo in serie di Laurent

Sia f olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Allora

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{se } 0 < |z - z_0| < r \quad (18.30)$$

dove

$$c_k := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad (18.31)$$

e γ è un qualunque cammino in $B_r(z_0)$ intorno a z_0 , orientato positivamente. Lo sviluppo in serie è unico, nel senso che se

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k (z - z_0)^k \quad \text{per } 0 < |z - z_0| < r$$

allora $d_k = c_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Segue dalla (18.23) che la definizione dei coefficienti c_k è consistente, ovvero non dipende dal cammino γ .

Se f è olomorfa in $B_r(z_0)$, cioè anche nel punto z_0 , la funzione $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ è olomorfa in $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ se $k = -1, -2, -3, \dots$; quindi, per il teorema di Cauchy, $c_k = 0$ se $k = -1, -2, \dots$ e ritroviamo lo sviluppo in serie di Taylor. La serie

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k &= \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} \\ &+ c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

si dice **serie di Laurent** di f centrata in z_0 .

ESEMPIO 18.14

La funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ed essendo $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$, risulta

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{6!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \quad \text{se } z \neq 0.$$

La funzione $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ e la serie di Laurent centrata in $z_0 = 1$ è

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-z}} &= 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{(1-z)^3} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(1-z)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^{-k}. \end{aligned}$$

Singolarità isolata

Una funzione complessa f ha una **singolarità isolata** in $z_0 \in \mathbb{C}$ se f è definita e olomorfa in

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \quad \text{per qualche } r > 0.$$

Per esempio, le funzioni

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{\sin z}{z^2}, \quad e^{1/z}, \quad \frac{1}{z - z^3}$$

hanno una singolarità isolata in $z = 0$. La funzione $\frac{1}{1 + z^2}$ ha due singolarità isolate, in $z = \pm i$, e la funzione $e^{\frac{1}{1-z}}$ ha una singolarità isolata in $z = 1$.

DEFINIZIONE 18.18

Sia z_0 una singolarità isolata di $f(z)$ e sia $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$ la serie di Laurent di f centrata in z_0 . Il punto z_0 si dice

- (i) **singolarità eliminabile** se $c_k = 0$ per $k = -1, -2, \dots$;
- (ii) **polo di ordine $m \geq 1$** se $c_{-m} \neq 0$ e $c_k = 0$ per $k < -m$;
- (iii) **singolarità essenziale** se $c_k \neq 0$ per infiniti valori negativi di k .

Per esempio, $\frac{\sin z}{z}$ ha una singolarità eliminabile in 0, $\frac{\sin z}{z^2}$ e $\frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z(1 - z^2)}$ hanno un polo di ordine 1 in 0, $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale in 0 (si veda l'Esempio 18.14).

ESEMPIO 18.15

La funzione $\frac{1}{z^2 + 1}$ ha due poli di ordine 1 in $z = \pm i$. Scriviamo per esempio la sua serie di Laurent in $B_2(i)$, ovvero nel più grande intorno sferico di i che non contiene l'altra singolarità $-i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 + 1} &= \frac{1}{(z + i)(z - i)} = \frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{z - i + 2i} = \frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - i}{2i}} \cdot \frac{1}{2i} \\ &= \frac{1}{z - i} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 - (z - i)\frac{i}{2}} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z - i} \sum_{k=0}^{\infty} \left((z - i)\frac{i}{2}\right)^k \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z - i} \left(1 + \frac{i}{2}(z - i) - \frac{1}{4}(z - i)^2 - \frac{i}{8}(z - i)^3 \dots\right) \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z - i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z - i) - \frac{1}{16}(z - i)^2 + \dots = -\sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+2} (z - i)^k. \end{aligned}$$

Si noti che per scrivere la serie di Taylor abbiamo utilizzato la stima $\left|\frac{z - i}{2i}\right| = \frac{1}{2}|z - i| < 1$, che è vera se $z \in B_2(i)$.

Una **funzione razionale** (complessa) è della forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{con } p \text{ e } q \text{ polinomi complessi.}$$

Le singolarità di f sono date dagli zeri di q . Essendo q un polinomio, esso ha un numero finito di zeri, quindi ogni singolarità è isolata. L'ordine m di uno zero z_0 di q è il numero intero positivo tale che

$$q(z) = (z - z_0)^m q_1(z)$$

per un certo polinomio q_1 che verifica $q_1(z_0) \neq 0$. Allora possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)^m q_1(z)}.$$

La funzione $\frac{p(z)}{q_1(z)}$ è olomorfa e quindi ammette uno sviluppo in serie di Taylor in un intorno di z_0 :

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{per } |z - z_0| < r.$$

Di conseguenza

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m}$$

e ci sono due possibilità: f ha una singolarità eliminabile in z_0 oppure un polo di ordine al più m . In altri termini

una funzione razionale non ha singolarità essenziali.

DEFINIZIONE 18.19

Una funzione definita in un insieme aperto e connesso $A \subseteq \mathbb{C}$, olomorfa tranne in eventuali singolarità isolate, si dice **meromorfa** se le singolarità non sono essenziali.

Dunque, ogni funzione razionale è meromorfa in \mathbb{C} .

ESERCIZIO 18.18

Trovare le singolarità isolate delle seguenti funzioni e determinarne la natura:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) $\frac{1}{z^2 + z + 1}$; | c) $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$; |
| b) $\frac{\sin z}{z^4 + 10z^3 + 25z^2}$; | d) $\frac{z}{\sin z}$. |

ESERCIZIO 18.19

Trovare la serie di Laurent centrata in 0 delle seguenti funzioni:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $z^3 \sin \frac{1}{z}$; | c) $\frac{\sin z - z}{z^5}$; |
| b) $\frac{1}{z^3(1 - z^2)}$; | d) $\frac{\cos(\pi z)}{z^2}$. |

18.9 Singolarità isolate: il teorema dei residui

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e f olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$. Per il Teorema 18.17, f è sviluppabile in serie di Laurent centrata in z_0 . Il coefficiente c_{-1} riveste un ruolo particolare in quanto, per definizione,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(w) dw$$

dove γ è un qualunque cammino in A intorno a z_0 orientato positivamente. Il coefficiente c_{-1} si dice **residuo di f nella singolarità isolata z_0** e si scrive

$$c_{-1} = \operatorname{Res} f(z_0) \quad \text{oppure} \quad c_{-1} = \operatorname{Res} f|_{z=z_0}.$$

Quindi

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f|_{z=z_0}.$$

Non è difficile generalizzare questo risultato al caso di più singolarità isolate di f appartenenti all'interno di γ .

TEOREMA 18.20 Teorema dei residui

Sia f olomorfa nell'insieme aperto e semplicemente connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ con l'eccezione delle singolarità isolate z_1, \dots, z_n . Sia γ un cammino in A intorno a $\{z_1, \dots, z_n\}$ orientato positivamente. Allora

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f|_{z=z_k}.$$

Per capire il teorema dei residui basta ripetere il ragionamento che è alla base della (18.23), mostrando che

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$$

dove $\gamma_k(t) = z_k + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, con $\rho > 0$ così piccolo che: (a) ciascun γ_k è un cammino nell'interno di A intorno a z_k ; (b) i sostegni di γ_k sono a due a due disgiunti (si veda Figura 18.10).

Se z_0 è un polo di ordine 1 (oppure una singolarità eliminabile), allora

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{se } 0 < |z - z_0| < \rho$$

ovvero

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+1} \rightarrow c_{-1} \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

Dunque, se z_0 è un polo di primo ordine di f , si ha che

$$\operatorname{Res} f|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

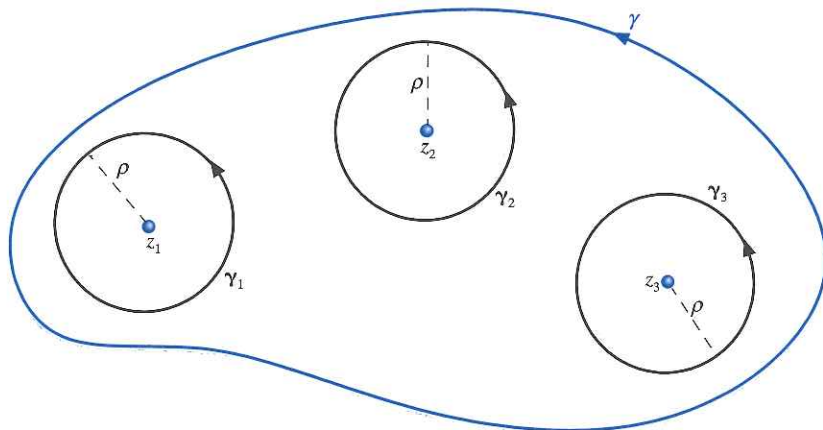


Figura 18.10

Dimostrazione

Calcolo dei residui

Non è difficile dimostrare un risultato leggermente più generale:

$$\text{se } z_0 \text{ è una singolarità isolata di } f \text{ e se esiste finito il limite} \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z), \text{ allora } \text{Res } f|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (18.32)$$

È frequente il caso in cui $f(z) = g(z)/h(z)$ e z_0 è uno zero isolato di h . Se $g(z)$ e $h(z)$ sono olomorfe in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$ e se $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{(z - z_0)(h'(z_0) + o(1))} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Quindi, per la (18.32),

$$\text{se } g \text{ e } h \text{ sono olomorfe in un intorno di } z_0 \in \mathbb{C} \text{ e} \\ \text{se } h(z_0) = 0 \text{ e } h'(z_0) \neq 0, \text{ allora } \text{Res } \frac{g}{h}|_{z=z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (18.33)$$

ESEMPIO 18.16

Si vuole calcolare

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)} dz, \quad \gamma(t) = \frac{i}{2} + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

La funzione integranda $f(z)$ ha tre possibili singolarità: $z = 0$ e $z = \pm i$. L'interno di γ è $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{i}{2}| \leq 1\}$. Quindi $-i$ è esterno a γ mentre 0 e i sono interni. Si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z(z^2 + 1)} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin z}{z^2(z + i)} = -\frac{\sin i}{2i}.$$

Poiché entrambi i limiti sono finiti, per la (18.32) 0 e i sono singolarità isolate di f e i valori del limite sono i corrispondenti residui: quindi segue dal Teorema dei residui che l'integrale vale

$$2\pi i \left(1 - \frac{\sin i}{2i} \right) = 2\pi i \left(1 + \frac{e^{-1} - e}{4} \right).$$

Se il limite nella (18.32) non esiste finito, significa che z_0 è un polo di ordine $m > 1$ o una singolarità essenziale. Nel primo caso vale la seguente formula:

$$\text{se } z_0 \text{ è un polo di ordine } m \text{ di } f, \text{ allora} \\ \text{Res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \right). \quad (18.34)$$

ESEMPIO 18.17

Si vuole calcolare

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2(z+4i)} dz, \quad \text{dove } \gamma = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

La funzione integranda $f(z)$ ha: una singolarità eliminabile in $z = 0$ (infatti $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = -i/4$); un polo di ordine 1 in $z = -4i$, che però si trova all'esterno di γ ; un polo di ordine 2 in $z = 1$, infatti

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z - 1}{z(z+4i)} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z^2 + (4i-2)z - 4i) + 2z + 4i}{z^2(z+4i)^2} = \frac{2 - e + 4i}{(1+4i)^2}.$$

Il valore del limite coincide con $\text{Res } f(1)$ e perciò l'integrale vale $2\pi(-4 + i(2 - e))/(1 + 4i)^2$.

Il teorema dei residui può essere usato per calcolare l'integrale improprio di una funzione razionale di una variabile reale, $P(x)/Q(x)$ (purché ovviamente la funzione sia integrabile). Si ricordi che comunque il calcolo può anche essere effettuato mediante integrazione diretta.

Integrali impropri di funzioni razionali

Si vuole calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx.$$

A questo scopo si considera l'integrale

$$\oint_{\gamma_R^+} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{\gamma_R^+} \frac{1}{1+z^4} dz$$

dove $\gamma_R^+(t) = Re^{it}$ per $0 \leq t \leq \pi$ e γ_R è la curva indicata in Figura 18.11. La funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ ha all'interno di γ_R due singolarità isolate, $\frac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$; quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(\text{Res } f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \text{Res } f|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) - \int_{\gamma_R^+} \frac{1}{1+z^4} dz.$$

Poiché, per la disuguaglianza triangolare,

$$|z^4| \leq |z^4 + 1| + 1$$

si ha che

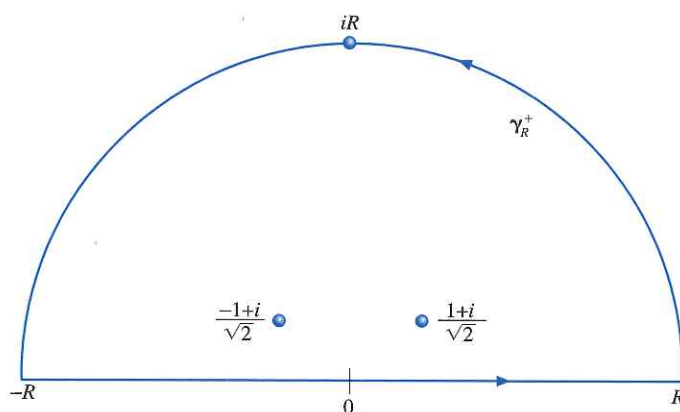
$$|1+z^4| \geq R^4 - 1 \quad \text{se } z \in \gamma_R^+ \quad (R > 1)$$

dunque, per la (18.18), risulta che, per $R \rightarrow +\infty$,

$$\left| \int_{\gamma_R^+} \frac{1}{1+z^4} dz \right| \leq \frac{1}{R^4 - 1} L(\gamma_R^+) = \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi i \left(\text{Res } f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \text{Res } f|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right).$$



Per la (18.32)

ESEMPIO 18.18

Figura 18.11 La curva $t \mapsto \gamma_R(t)$ dell'Esempio 18.18.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{1+z^4} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)} \end{aligned}$$

quindi il residuo vale $\frac{1}{4}\sqrt{2}/(-1+i)$. Si può anche utilizzare la (18.33):

$$\operatorname{Res} f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3} = \frac{\sqrt{2}}{4(-1+i)}.$$

Analogamente si calcola

$$\operatorname{Res} f|_{z=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4(1-i)}$$

quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{-1+i} + \frac{1}{1+i} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Nell'esempio precedente abbiamo dovuto stimare l'integrale su un semicerchio per mostrare che tendeva a zero per il raggio $R \rightarrow +\infty$. In generale segue dalla (18.18) che

$$\text{se } |f(z)| = o\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ per } z \rightarrow \infty, \text{ allora } \oint_{|z|=R} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty$$

(ovviamente la stima si basa sul fatto che il perimetro di una circonferenza è proporzionale al suo raggio). Una stima più raffinata è fornita dal seguente risultato.

Lemma di Jordan

Dimostrazione

TEOREMA 18.21 Lemma di Jordan

Siano $a \in \mathbb{R}$, $R_0 > 0$,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Im} z > -a\}$$

e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continua in A tale che

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in A}} f(z) = 0.$$

Per $R > R_0$, sia γ_R una parametrizzazione regolare dell'arco di cerchio di raggio R contenuto in A (si veda Figura 18.12a). Allora per ogni $\lambda > 0$ si ha che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

Sottolineiamo l'importanza del segno di λ e la posizione del semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -a\}$:

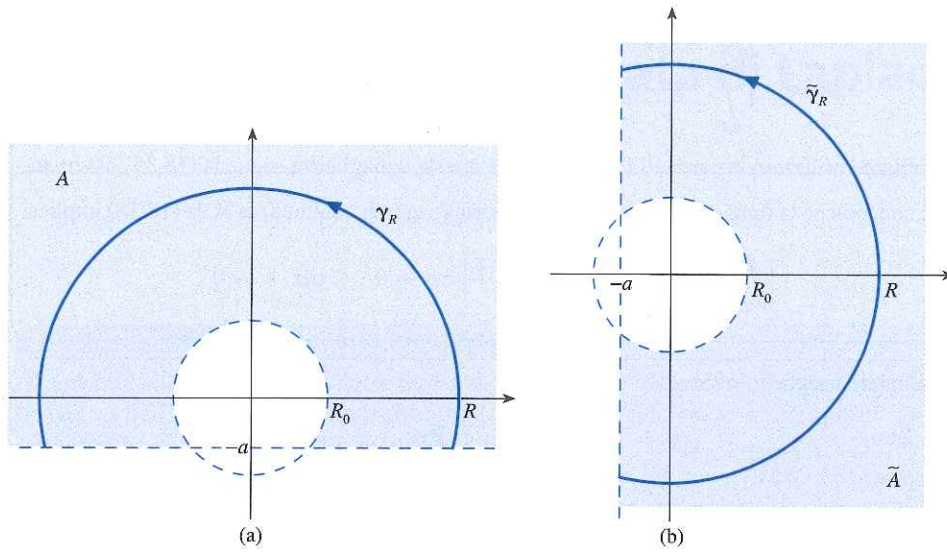
$$\lambda > 0 \Rightarrow |e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda(\operatorname{Im} z)} \rightarrow 0 \text{ per } \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty.$$

Infatti, sostituendo ad A l'insieme

$$\tilde{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Re} z > -a\}$$

si ottiene una versione diversa del lemma di Jordan: per $R > R_0$, sia $\tilde{\gamma}_R$ una parametrizzazione regolare dell'arco di cerchio di raggio R contenuto nella chiusura di \tilde{A} (si veda Figura 18.12b); allora per ogni $\lambda > 0$

Figura 18.12



$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} f(z) e^{-\lambda z} dz = 0.$$

Proviamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{18.35}$$

Ricordando che $\frac{\sin z}{z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz}$, l'idea è quella di ricondursi a un'applicazione del teorema dei residui e del lemma di Jordan. Siano $R > 0$, $\gamma_R^{(1)}(t) = Re^{it}$ per $0 \leq t \leq \pi$ e $\gamma_R^{(2)}(t) = Re^{it}$ per $-\pi \leq t \leq 0$. Siano inoltre $\tilde{\gamma}_{R,\epsilon}^{(1)}$ e $\tilde{\gamma}_{R,\epsilon}^{(2)}$ ($0 < \epsilon < R$) le curve chiuse indicate rispettivamente nelle Figure 18.13a e 18.13b. Per il teorema dei residui, si ha

$$\oint_{\tilde{\gamma}_{R,\epsilon}^{(1)}} \frac{e^{iz}}{iz} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{iz} \Big|_{z=0} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{i} = 2\pi, \quad \oint_{\tilde{\gamma}_{R,\epsilon}^{(2)}} \frac{e^{-iz}}{iz} dz = 0. \tag{18.36}$$

D'altra parte, per il lemma di Jordan,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{e^{iz}}{iz} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R^{(2)}} \frac{e^{-iz}}{iz} dz = 0.$$

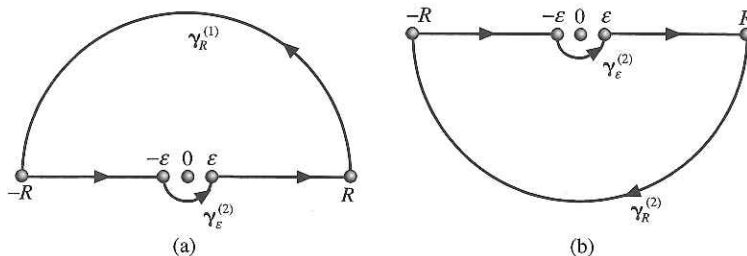


Figura 18.13 Le curve $t \mapsto \tilde{\gamma}_{R,\epsilon}^{(1)}$ (a) e $t \mapsto \tilde{\gamma}_{R,\epsilon}^{(2)}$ (b).

Perciò, sottraendo i due integrali nella (18.36) si ottiene

$$\begin{aligned}
 2\pi &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix} dx + \int_{\gamma_\varepsilon^{(2)}} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{iz} dz \\
 &= 4 \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + 2 \int_{\gamma_\varepsilon^{(2)}} \frac{\sin z}{z} dz
 \end{aligned}$$

(abbiamo utilizzato la parità di $(\sin x)/x$). Da questa uguaglianza segue la (18.35) osservando che, poiché la funzione $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ è olomorfa (e quindi continua) in \mathbb{R} , la (18.18) implica

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon^{(2)}} \frac{\sin z}{z} dz \right| \leq \max_{|z| \leq 1} \left| \frac{\sin z}{z} \right| \pi \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

ESERCIZIO 18.20

Calcolare i seguenti residui:

- a) $\text{Res} \frac{1}{z^2 + 1} \Big|_{z=+i}$; c) $\text{Res} \frac{1}{(z+1)^2} \Big|_{z=-1}$;
 b) $\text{Res} z^2 \sin \frac{1}{z} \Big|_{z=0}$; d) $\text{Res} \frac{1}{z^3 + z^2} \Big|_{z=0}$.

ESERCIZIO 18.21

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

- a) $\oint_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z(z+3)} dz$, dove $\gamma(t) = 5e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
 b) $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^3 - z} dz$, dove $\gamma = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
 c) $\oint_{\gamma} \frac{z^2 - 3z - e^{\frac{1}{z+1}}}{z} dz$, dove $\gamma(t) = \frac{1}{4}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
 d) $\oint_{\gamma} \frac{z^2}{z^2 - 7iz - 6} dz$, dove $\gamma(t) = 7e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
 e) $\oint_{\gamma} \frac{1}{\cos z} dz$, dove $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
 f) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^3 - 9i} dz$, dove $\gamma(t)$ è una curva di Jordan, regolare a tratti, orientata positivamente, il cui interno è $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3, \text{Im } z > 0\}$.

ESERCIZIO 18.22

Sia I il valore dell'integrale improprio convergente

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(3x^2 + 1)} dx.$$

a) Mostrare che

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(3x^2 + 1)} dx.$$

b) Mostrare che

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2 + 1)(3z^2 + 1)} dz \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty,$$

dove $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

c) Calcolare I .