

Appunti di Analisi e Calcolo Numerico

LS in Ingegneria Edile

AA 2007-2008

Docente : Dott. Ivelina Bobtcheva

Contenuti del corso

1. Equazioni differenziali del primo ordine (richiami di teoria)
 - (a) equazioni lineari
 - (b) equazioni a variabili separabili
 - (c) equazioni esatte
 - (d) teorema di esistenza e unicità della soluzione

2. Equazioni differenziali del primo ordine - metodi numerici (vedere gli appunti sui metodi numerici)
 - (a) radici di equazioni non-lineari: metodo del punto fisso e di Newton-Raphson;
 - (b) equazioni delle differenze finite
 - (c) metodo di Eulero esplicito ed implicito
 - (d) metodo di Crank-Nicolson
 - (e) metodo di Runge-Kutta del quart'ordine
 - (f) il problema della convergenza e stabilità dei metodi numerici
 - (g) metodi multistep: predictor-corrector

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine
 - (a) equazioni lineari omogenee
 - (b) equazioni lineari non omogenee: il metodo della variazione dei costanti; metodi elementari

(c) vibrazioni meccaniche: il disastro del ponte di Tacoma

4. Sistemi di equazioni differenziali

(a) richiami di algebra lineare

(b) il metodo degli autovalori-autovettori per trovare la soluzione di un sistema di equazioni differenziali

(c) soluzione fondamentale e^{At}

5. Teoria qualitativa delle equazioni differenziali. Sistemi dinamici.

(a) stabilità dei sistemi lineari

(b) il piano delle fasi

(c) proprietà qualitative delle orbite

(d) diagrammi di fase per i sistemi lineari

(e) cenni di teoria dei biforcamenti

6. Problemi al contorno a due punti. Autovalori e autofunzioni.

Libri di testo e referenze:

1. Martin Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, quarta edizione, 1992
2. S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison Wesley Publishing Company.
3. Anna Maria Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice Bologna, 2005
4. Maria Grazia Messia, *Appunti*.

Equazioni differenziali ordinarie

Definizione Un *equazione differenziale (ordinaria) di ordine n* è un'equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Una *soluzione* di questa equazione è una funzione $y(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che, sostituita nell'equazione, insieme con le sue prime n derivate, rende l'equazione vera per ogni $x \in [a, b]$.

La parola "ordinaria" indica che l'equazione coinvolge una funzione di una variabile $y(x)$ e le sue derivate. Esistono anche equazioni differenziali che coinvolgono una funzione di più variabili e le sue derivate parziali; incontreremo tali equazioni più avanti nel corso.

Esempio 1. L'equazione differenziale di ordine uno

$$y'(x) - x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

ha come possibili soluzioni le funzioni:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y'(x) - x = \frac{2x}{2} - x = 0$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \Rightarrow y'(x) - x = \frac{2x}{2} - x = 0$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + 3 \Rightarrow y'(x) - x = \frac{2x}{2} - x = 0$$

...

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y'(x) - x = \frac{2x}{2} - x = 0$$

dove C è una costante arbitraria.

Equazioni del primo ordine del tipo $y'(x) = b(x)$

L'equazione del primo ordine nell'Esempio 1 non coinvolge $y(x)$ ma soltanto $y'(x)$, e può essere scritta nella forma:

$$y'(x) = b(x) \quad (2)$$

Secondo il *Teorema Fondamentale del calcolo integrale*, tale equazione ha infinite soluzioni, ma ogni soluzione è data dalla funzione integrale $\int b(x) dx$ più una costante arbitraria C , detta *costante d'integrazione*:

$$y(x) = \int b(x) dx + C. \quad (3)$$

La formula (3) rappresenta la *soluzione o integrale generale* dell'equazione (2). Per fissare una *soluzione particolare*, cioè il valore di C , possiamo aggiungere all'equazione un'altra condizione detta *condizione iniziale*; per esempio che il valore $y(x_0) = y_0$.

Se all'equazione $y'(x) = x$ nell'Esempio 1 aggiungiamo la condizione iniziale $y(1) = 3/2$ fissiamo un'unica soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = x \\ y(1) = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = \frac{x^2}{2} + C \\ y(1) = 3/2 \end{cases}$$

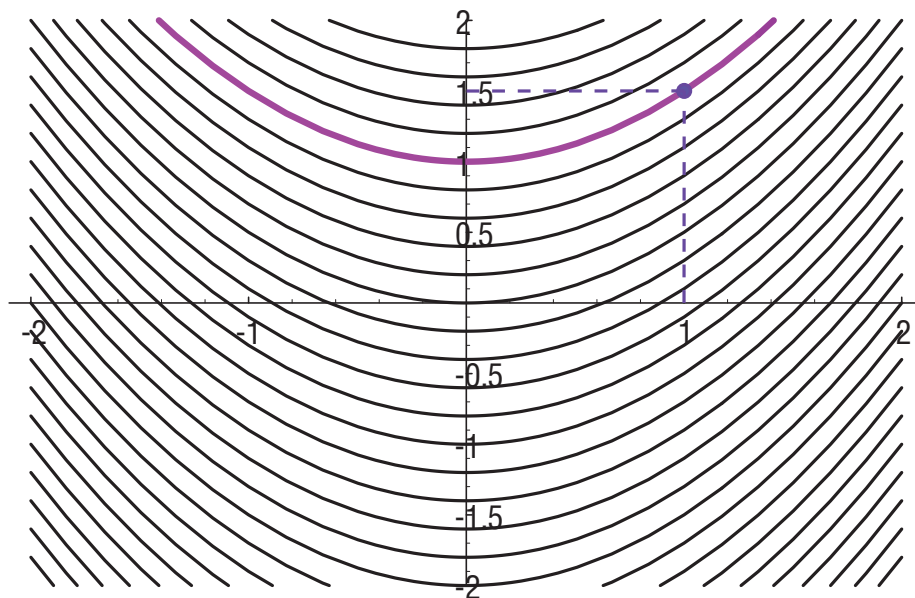
Risolviamo per trovare il valore di C :

$$\frac{1^2}{2} + C = 3/2 \Rightarrow C = 1$$

Quindi l'unica soluzione particolare che soddisfa la condizione iniziale è:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

La figura mostra l'insieme delle curve che rappresentano la soluzione generale al variare della costante d'integrazione C evidenziando la soluzione particolare trovata:



In generale, un'equazione differenziale di ordine n ha infinite soluzioni che dipendono dalla scelta di n costanti arbitrarie. Per fissare una soluzione particolare è necessario aggiungere n condizioni iniziali, per esempio specificando i valori $y(x_0)$, $y'(x_0)$, \dots , $y^{(n)}(x_0)$ per un certo x_0 .

Definizione Un *problema ai valori iniziali o di Cauchy* è un sistema di un'equazione differenziale di ordine n ed n condizioni iniziali relative a questa equazione:

$$\begin{cases} F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad \forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Purtroppo NON E' VERO che ogni problema di Cauchy ha una soluzione e non è neanche vero che se ha una soluzione, questa soluzione è unica.

Esempio 2. Verificare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 2\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ammette almeno due soluzioni: la funzione costante $y_1(x) = 0$ e la funzione

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Infatti, il problema ha infinite soluzioni.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Definizione. Un' equazione differenziale di primo ordine si chiama *lineare* se esprime $y'(x)$ come una funzione lineare di $y(x)$ e può essere messa nella forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x),$$

dove $a(x), b(x)$ sono funzione continue e $b(x)$ si chiama *termine noto* dell'equazione.

- Se $b(x) = 0$, l'equazione si chiama *omogenea*;
- se $b(x) \neq 0$, l'equazione si chiama *non omogenea*.

Il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare di primo ordine ha sempre un'unica soluzione. Noi arriveremo alla formula esplicita per la soluzione generale di tale equazione in due passi: prima affronteremo l'equazione omogenea e poi quella non omogenea.

Soluzione dell'equazione omogenea: $y'(x) + a(x)y(x) = 0$

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

Poichè $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{d \ln |y(x)|}{dx}$, abbiamo

$$\frac{d}{dx} \ln |y(x)| = -a(x)$$

$$\ln |y(x)| = - \int a(x) dx + c_1,$$

dove c_1 è una costante d'integrazione arbitraria. Prendendo l'esponenziale di tutti i due membri dell'equazione, otteniamo

$$|y(x)| = \exp \left(- \int a(x) dx + c_1 \right)$$

$$y(x) = C \exp \left(- \int a(x) dx \right),$$

dove $C = \pm e^{c_1}$, ed essendo c_1 una costante arbitraria, lo stesso vale anche per C .

Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Teorema 1 La soluzione generale dell'equazione differenziale lineare omogenea di primo ordine: $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ è

$$y(x) = C \exp \left(- \int a(x) dx \right),$$

dove C è una costante arbitraria.

Esempio 3. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y'(x) = -2x y(x).$$

Risoluzione Nella forma normale, l'equazione diventa:

$$y'(x) + 2x y(x) = 0$$

quindi $a(x) = 2x$ e $b(x) = 0$. Quindi abbiamo un'equazione differenziale lineare omogenea di primo ordine e la sua soluzione generale è:

$$y(x) = C e^{-\int 2x dx} = C e^{-x^2}.$$

Esempio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2x y(x) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione Nell'Esempio 3 abbiamo trovato la soluzione generale dell'equazione omogenea:

$$y(x) = C e^{-\int 2x dx} = C e^{-x^2}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 3$ determiniamo il valore della costante C :

$$y(1) = C e^{-1} = 3 \Rightarrow C = 3e.$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 3e e^{-x^2} = 3e^{1-x^2}.$$

Soluzione dell'equazione non omogenea:

$$\underline{y'(x) + a(x)y(x) = b(x)}$$

Lemma 1 La soluzione generale dell'equazione non omogenea

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad (4)$$

è la somma dell' soluzione generale dell'equazione omogenea ($b(x) = 0$) e una soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$$y(x) = y_{om}(x) + y_p(x).$$

Dimostrazione Sia $y_p(x)$ una soluzione particolare dell'equazione (4). Allora anche $y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$. soddisfa l'equazione non omogenea. Infatti,

$$\begin{aligned} & (y'_{om}(x) + y'_p(x)) + a(x)(y_{om}(x) + y_p(x)) \\ &= (y'_{om}(x) + a(x)y_{om}(x)) + (y'_p(x) + a(x)y_p(x)) \\ &= 0 + b(x) = b(x). \end{aligned}$$

Quindi, basterebbe dimostrare che ogni soluzione $z(x)$ della equazione (4) è la somma di $y_p(x)$ e una soluzione dell'equazione omogenea, cioè che la differenza $z(x) - y_p(x)$ soddisfa l'equazione omogenea:

$$\begin{aligned} & (z'(x) - y'_p(x)) + a(x)(z(x) - y_p(x)) \\ &= (z'(x) + a(x)z(x)) - (y'_p(x) + a(x)y_p(x)) \\ &= b(x) - b(x) = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorema 2 La soluzione generale dell'equazione differenziale di primo ordine

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad (5)$$

è data da:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(C + \int b(x) e^{A(x)} dx \right),$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria e $A(x) = \int a(x) dx$ è una primitiva per $a(x)$.

Dimostrazione Osserviamo che l'espressione proposta per la soluzione può essere scritta come una somma:

$$y(x) = y_{om}(x) + y_p(x),$$

dove $y_{om} = C e^{-A(x)}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea, e $y_p(x) = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx$. Lemma 1 implica che, per dimostrare il teorema basterebbe dimostrare che $y_p(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Infatti

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \left(\frac{d}{dx} e^{-A(x)} \right) \int b(x) e^{A(x)} dx + e^{-A(x)} \left(\frac{d}{dx} \int b(x) e^{A(x)} dx \right) \\ &= -A'(x) e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx + e^{-A(x)} b(x) e^{A(x)} \\ &= -A'(x) y_p(x) + b(x) \end{aligned}$$

Ma

$$A'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int a(x) dx \right) = a(x)$$

Quindi, $y_p'(x) = -a(x)y_p(x) + b(x)$. cioè $y_p(x)$ soddisfa l'equazione non omogenea. Q.E.D.

La formula nel Teorema 2 ha come casi particolari i due tipi di equazioni che abbiamo studiato precedentemente:

- $b(x) = 0$

integrale generale dell'equazione omogenea

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0:$$

$$y(x) = C e^{-A(x)}, \quad C \in R, \quad A(x) = \int a(x) dx$$

- $a(x) = 0$

integrale generale dell'equazione $y'(x) = b(x)$:

$$y(x) = \int b(x) dx + C, \quad C \in R.$$

Esempio 5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^3 - y/x \\ y(1) = 1/5 \end{cases} \quad x \in (0, +\infty).$$

Risoluzione Nella forma normale, l'equazione è:

$$y'(x) + y/x = x^3, \quad x \in (0, +\infty)$$

quindi $a(x) = 1/x$ e $b(x) = x^3$. Allora per l'integrale generale dell'equazione abbiamo:

$$A(x) = \int dx/x = \ln x.$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\ln x} \left(C + \int x^3 e^{\ln x} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C + \int x^3 x dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C + x^5/5 \right) \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1/5$ determiniamo il valore della costante C :

$$y(1) = 1(C + 1/5) = 1/5 \Rightarrow C = 0.$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = x^4/5.$$

Esercizi

1. Trova la soluzione generale di ciascun' equazione:

$$(a) \quad y'(x) + y(x) \cos(x) = 0$$

$$(b) \quad y'(x) + y(x) = x e^x$$

$$(c) \quad y'(x) + \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2. Trova la soluzione di ciascuno dei problemi di Cauchy:

$$(a) \quad \begin{cases} y'(x) + xy(x) = x \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y'(x) + \sqrt{1+x^2}y(x) = 0 \\ y(0) = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} y'(x) - y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Applicazione: Teoria della radioattività

Che cosa è la radioattività? Esistono degli elementi detti *radioattivi*, a cui gli atomi sono instabili e con il tempo spontaneamente si dividono disintegrandosi in atomi di altri elementi.

Equazione differenziale del decadimento radioattivo.

Sia $N(t)$ il numero di atomi di una data sostanza radioattiva presenti nel momento t . Secondo la teoria della radioattività il numero di atomi dN/dt che si disintegrano nell'unità di tempo è proporzionale ad $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t).$$

λ è una costante positiva che è caratteristica della velocità di decadimento: più grande è λ , più veloce è il processo di decadimento. Osserviamo che l'equazione che descrive il decadimento è una equazione differenziale lineare omogenea di primo ordine. Quindi la sua soluzione generale è:

$$N(t) = C e^{-\lambda t}.$$

Supponiamo che nel momento $t = t_0$ il numero di atomi era

$$N(t_0) = N_0 \quad \text{condizione iniziale}$$

allora abbiamo $C = N_0 e^{-\lambda t_0}$ e la soluzione del problema di Cauchy è:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Esempio 6. Trovare il valore della costante λ per il Radio -226, sapendo che in 1600 anni si disintegrano circa metà dei suoi atomi.

Risoluzione: Sappiamo che dopo $t - t_0 = 1600$ anni il numero di atomi rimasti $N(t)$ è circa metà degli atomi nel momento t_0 , cioè:

$$N_0/2 = N_0 e^{-1600\lambda}$$

$$e^{1600\lambda} = 2$$

$$1600\lambda = \ln 2$$

$$\lambda = \ln 2/1600 = 4,33 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{anni}}$$

Definizione Il periodo di tempo necessario per la disintegrazione di metà degli atomi di una certa sostanza radioattiva si chiama il *tempo di dimezzamento* di tale sostanza.

Esercizi

1. Trovare il valore della costante λ per il Piombo 210, sapendo che in 22 anni si disintegra circa metà dei suoi atomi.
2. Trovare il tempo di dimezzamento dell'Uranio-234 sapendo che in 1000 anni si disintegra circa 0.28% dei suoi atomi.

Equazioni differenziali di primo ordine a variabili separabili

Definizione Diciamo che un'equazione differenziale di primo ordine è a variabili separabili se si può scrivere nella forma:

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x), \quad (6)$$

dove $f(y)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue.

L'equazione 6 può essere risolta integrando i due membri rispetto ad x

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx + C, \quad (dy = y'(x) dx)$$

ottenendo y come una *funzione implicita* di x , che quando è possibile espliciteremo.

Esempio 7. Trovare la soluzione generale dell'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = x^2/y^2,$$

Risoluzione: Moltiplichiamo tutti i due membri dell'equazione con y^2 ottenendo:

$$y^2 \frac{dy}{dx} = x^2,$$

e integriamo

$$\begin{aligned} \int y^2 dy &= \int x^2 dx + C \\ y^3/3 &= x^3/3 + C \end{aligned}$$

In questo caso la soluzione può essere esplicitata per y :

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}$$

Esempio 8. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^y y'(x) - x - x^3 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione L'equazione può essere scritta nella forma:

$$e^y \frac{dy}{dx} = x + x^3$$

Integrando entrambi i membri otteniamo:

$$\int e^y dy = \int (x + x^3) dx + C$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

$$y(x) = \ln \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C \right)$$

Dalla condizione iniziale abbiamo:

$$y(1) = \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + C \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = e - \frac{3}{4}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \ln \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + e - \frac{3}{4} \right).$$

Esempio 9. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + e^y) y'(x) = \cos x \\ y(\pi/2) = 3 \end{cases}$$

Risoluzione Integrando entrambi i membri otteniamo:

$$\int (1 + e^y) dy = \int \cos x dx + C$$
$$y(x) + e^{y(x)} = \sin x + C$$

La soluzione non può essere esplicitata per y . Dalla condizione iniziale abbiamo:

$$y(\pi/2) + e^{y(\pi/2)} = \sin(\pi/2) + C$$
$$3 + e^3 = 1 + C$$
$$C = 2 + e^3$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy in forma implicita è

$$y(x) + e^{y(x)} = \sin x + 2 + e^3$$

Il problema del campo di esistenza della soluzione

Esempio 10. Risolvere i problemi di Cauchy

$$(i) \begin{cases} y'(x) = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} y'(x) = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione Dividiamo entrambi i membri per $1 + y^2$ e integriamo:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx + C$$

$$\arctan y = x + C$$

$$y(x) = \tan(x + C),$$

che rappresenta la soluzione generale dell'equazione $y'(x) = 1 + y^2$. Impostando la condizione iniziale (i) otteniamo che $C = 0$; quindi la soluzione dei due problemi di Cauchy è:

$$y_1(x) = \tan(x)$$

Il problema è che la soluzione trovata è definita come una funzione continua soltanto sull'intervallo aperto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; infatti

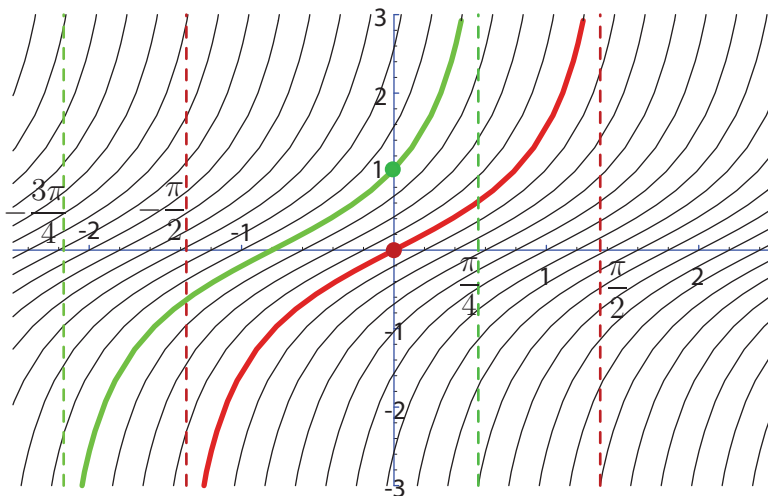
$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} y_1(x) = \pm \infty.$$

Abbiamo lo stesso problema con la soluzione del secondo problema di Cauchy (ii) per il quale otteniamo $C = \pi/4$ e per la seconda soluzione abbiamo

$$y_1(x) = \tan(x + \pi/4),$$

definita soltanto per $x \in (-3\pi/4, \pi/4)$.

La figura mostra l'insieme delle curve che rappresentano la soluzione generale al variare della costante d'integrazione C evidenziando le soluzioni particolari trovate:



Osserviamo che ciascuna delle soluzioni particolari ha come campo di esistenza un intervallo finito.

La soluzione di un problema di Cauchy in generale non sarà definita su tutto R , ma soltanto su un intervallo aperto (a, b) detto **campo di esistenza della soluzione**.

Equazioni omogenee

Un'equazione differenziale di primo ordine si chiama omogenea se può essere scritta nella forma:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7)$$

Strategia di risoluzione Un'equazione omogenea può essere trasformata in un'equazione a variabili separabili per la funzione $z(x) = y(x)/x$; infatti abbiamo:

$$y(x) = x z(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = z(x) + x z'(x)$$

Sostituendo nell'equazione (7) otteniamo:

$$z + x z'(x) = f(z) \quad \Rightarrow \quad x z'(x) = f(z) - z,$$

che è un'equazione a variabili separabili.

Esempio 11. Trova la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = y + \sqrt{y^2 + x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione L'equazione è omogenea perchè può essere scritta nella forma:

$$y'(x) = \frac{y}{x} + \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}$$

Eseendo la condizione iniziale imposta in $x = 1$ studiamo la soluzione per

$$x \geq 0 \Rightarrow |x|/x = 1.$$

Sia $z(x) = y(x)/x$; allora

$$y(x) = x z(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = z(x) + x z'(x)$$

e l'equazione diventa:

$$z + x z'(x) = z + \sqrt{z^2 + 1}$$
$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\operatorname{arcsinh}(z) = \ln x + C \quad \Rightarrow \quad z(x) = \frac{e^{c+\ln x} - e^{-c-\ln x}}{2}$$

$$z(x) = \frac{C x - 1/(C x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{(C x)^2 - 1}{2C}, \quad C = e^c,$$

che rappresenta la soluzione generale dell'equazione. Imponendo la condizione iniziale otteniamo $C = 1$; quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

Esercizi

1. Trova la soluzione generale di ciascun' equazione:

(a) $y'(x) = (1 + x)(1 + y)$

(b) $y'(x) = e^{x+y+3}$

2. Trova la soluzione di ciascuno dei problemi di Cauchy e il campo di esistenza della soluzione:

(a)
$$\begin{cases} 2y y'(x) + x^2(1 + y^2) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y'(x) = \frac{2x}{y+yx^2} \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y'(x) = (1 - y)(2 - y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 3xy'(x) = y \cos x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Equazioni esatte

Un'equazione differenziale di primo ordine $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ si chiama esatta se esiste una funzione $\Phi(x, y(x))$ di x e $y(x)$ tale che

$$F(x, y(x), y'(x)) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y(x)).$$

In particolare la soluzione dell'equazione può essere ottenuta **in forma implicita** integrando

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y(x)) = C. \quad (8)$$

Esempio 12. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y + (x + e^y)y'(x) = 0 \quad (9)$$

Risoluzione Sia

$$\Phi(x, y) = x y + e^y.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi(x, y(x)) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y) \frac{dy}{dx} \\ &= y + (x + e^y)y' \end{aligned}$$

Quindi, l'equazione (9) è esatta e la sua soluzione generale in forma implicita è

$$x y + e^y = C$$

L'equazione non può essere esplicitata per y , ma possiamo risolverla facilmente in modo numerico come vedremo più avanti.

Nell'esempio precedente abbiamo indovinato la forma dell'integrale $\Phi(x, y)$. Ma dal procedimento dovrebbe essere chiaro che se l'equazione è esatta può essere scritta nella forma:

$$M(x, y) + N(x, y) y'(x) = 0,$$

dove $M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y(x))$ e $N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y(x))$.

Il teorema seguente ci offre una condizione necessaria e sufficiente per verificare l'esattezza dell'equazione e apre la strada per calcolare l'integrale.

Teorema 2 Siano $M(x, y)$ e $N(x, y)$ due funzione continue con derivate continue in x e y per $x \in (a, b)$ e $y \in (c, d)$. Esiste una funzione $\Phi(x, y)$ tale che

$$M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y(x)) \quad \text{e} \quad N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y(x)) \quad (10)$$

se e solo se

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} M(x, y)$$

per ogni $x \in (a, b)$ e $y \in (c, d)$. In questo caso, l'equazione

$$M(x, y) + N(x, y) y'(x) = 0$$

è esatta; infatti

$$M(x, y) + N(x, y) y'(x) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y(x)) = 0,$$

e la sua soluzione generale è $\Phi(x, y) = C$.

Dimostrazione Supponiamo prima che esista una funzione $\Phi(x, y)$ tale che $M(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial x$ e $N(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial y$. Vogliamo dimostrare che $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$. Integrando la prima equazione otteniamo

$$\Phi(x, y) = \int M(x, y) dx + h(y),$$

dove $h(y)$ è una funzione arbitraria di y . Prendendo la derivata parziale dei entrambi i membri rispetto ad y otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + h'(y) \\ N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx &= h'(y) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \right] &= \frac{\partial h'(y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} &= 0 \quad \text{c.e.d.} \end{aligned}$$

Se, d'altra parte $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$, definiamo

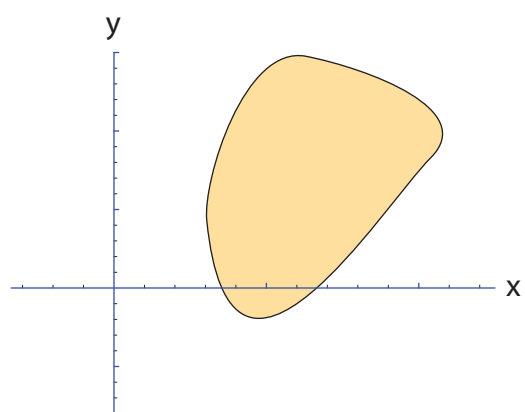
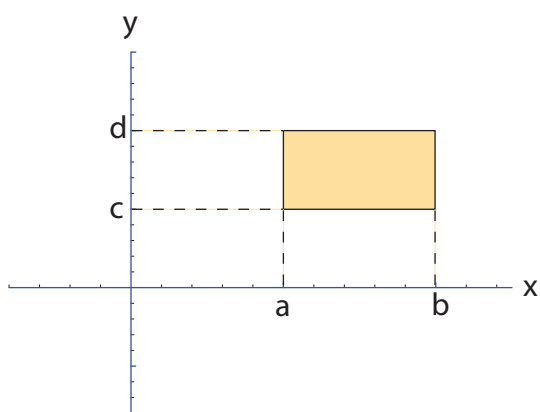
$$\Phi(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \right] dy.$$

Quindi,

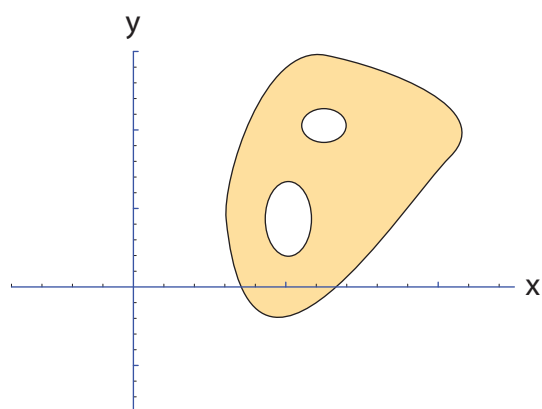
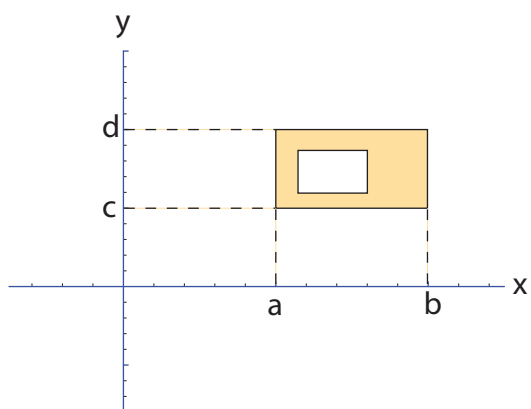
$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \int \frac{\partial M}{\partial y} dx + N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx = N(x, y) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= M(x, y) + \int \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right] dy = \\ &= M(x, y) + \int \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} \right] dy = M(x, y) \quad \text{c.e.d.} \end{aligned}$$

Commenti

1. Nel Teorema 2 abbiamo imposto la condizione (10) in un dominio a forma rettangolare ($x \in (a, b)$ e $y \in (c, d)$), ma il teorema rimane valido anche se la condizione viene imposta in un qualsiasi dominio semplicemente connesso (cioè senza buchi)



Domini semplicemente connessi.



Domini non semplicemente connessi.

2. Strategia per risolvere un'equazione esatta

(i) Verificare la condizione (10) del Teorema 2; se è soddisfatta, l'equazione è esatta e possiamo procedere;

(ii) Secondo il Teorema 2 esiste $\Phi(x, y)$ tale che $M(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial x$ e $N(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial y$; integrando una di queste due equazioni (per esempio la prima) otteniamo per $\Phi(x, y)$:

$$\Phi(x, y) = \int M(x, y) dx + h(y), \quad (11)$$

dove $h(y)$ è una funzione di y da determinare;

(iii) determiniamo $h(y)$ dalla condizione che $\partial\Phi(x, y)/\partial y$ (come calcolato in (11)) deve essere uguale a $N(x, y)$;

In (ii), invece della prima, possiamo integrare la seconda condizione ottenendo

(ii')

$$\Phi(x, y) = \int N(x, y) dy + g(x), \quad (12)$$

dove $g(x)$ è una funzione di x da determinare;

(iii') determiniamo $g(x)$ dalla condizione che $\partial\Phi(x, y)/\partial x$ (come calcolato in (12)) deve essere uguale a $M(x, y)$.

Esempio 13. Trova la soluzione generale dell'equazione

$$3y + e^x + (3x + \cos y)y'(x) = 0$$

Risoluzione

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 3y + e^x & N(x, y) &= 3x + \cos y \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= 3, & \frac{\partial N}{\partial x} &= 3, \end{aligned}$$

quindi l'equazione è esatta e esiste $\Phi(x, y)$ tale che

$$M(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial x \quad \text{e} \quad N(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial y$$

Integrando la prima condizione otteniamo:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int M(x, y) dx + h(y) \\ &= \int (3y + e^x) dx + h(y) \\ &= 3yx + e^x + h(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\Phi(x, y)/\partial y &= N(x, y) \\ 3x + h'(y) &= 3x + \cos y \\ h'(y) &= \cos y \\ h(y) &= \int \cos y dy = \sin y \end{aligned}$$

più una costante d'integrazione, che viene incorporata nella soluzione generale $\Phi(x, y) = C$. Quindi per la soluzione generale otteniamo

$$\Phi(x, y) = 3xy(x) + e^x + \sin y(x) = C,$$

che non può essere esplicitata.

La gran parte delle equazioni

$$M(x, y) + N(x, y) y'(x) = 0 \quad (13)$$

non sono esatte e quindi non possiamo usare il metodo del Teorema 2 per risolverle. Ma esistono due casi nei quali moltiplicando l'equazione (13) per una funzione appropriata μ , detta fattore integrale, possiamo trasformare l'equazione in un'equazione esatta.

Caso 1. Supponiamo che esista una funzione $R(x)$ di x tale che

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = R(x).$$

Sia $\mu(x) = e^{\int R(x) dx}$. Allora l'equazione

$$\mu(x)M(x, y) + \mu(x)N(x, y) y'(x) = 0$$

è esatta. Infatti $\mu'(x) = R(x)\mu(x)$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\mu(x)M) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x)N) &= \\ &= \mu(x) \frac{\partial M}{\partial y} - \mu'(x)N - \mu(x) \frac{\partial N}{\partial x} \\ &= \mu(x) \frac{\partial M}{\partial y} - R(x)\mu(x)N - \mu(x) \frac{\partial N}{\partial x} \\ &= \mu(x) \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} - R(x)N \right] = 0 \end{aligned}$$

Caso 2. Supponiamo che esista una funzione $Q(y)$ di y tale che

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = Q(y).$$

Sia $\mu(y) = e^{\int Q(y) dy}$. Allora l'equazione

$$\mu(y)M(x, y) + \mu(y)N(x, y) y'(x) = 0$$

è esatta. Infatti $\mu'(y) = Q(y)\mu(y)$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\mu(y)M) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu(y)N) &= \\ &= \mu(y) \frac{\partial M}{\partial y} + \mu'(y)M - \mu(y) \frac{\partial N}{\partial x} \\ &= \mu(y) \frac{\partial M}{\partial y} + Q(y)\mu(y)M - \mu(y) \frac{\partial N}{\partial x} \\ &= \mu(y) \left[\frac{\partial M}{\partial y} + Q(y)M - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned}$$

Esempio 14. Trova la soluzione generale dell'equazione

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y'(x) = 0 \quad (14)$$

Risoluzione Abbiamo

$$M(x, y) = y^2/2 + 2ye^x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = y + 2e^x$$

$$N(x, y) = y + e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x$$

L'equazione non è esatta ma $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 1$. Quindi, siamo nel Caso 1 e l'equazione ammette il fattore integrale:

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

Quindi l'equazione equivalente

$$e^x \frac{y^2}{2} + 2ye^{2x} + e^x(y + e^x)y'(x) = 0$$

è esatta, cioè esiste una funzione $\Phi(x, y)$ tale che

$$(i) \quad e^x \frac{y^2}{2} + 2ye^{2x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$(ii) \quad e^x y + e^{2x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Integrando (i) e confrontando con (ii) otteniamo

$$\Phi(x, y) = e^x \frac{y^2}{2} + ye^{2x} + h(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = ye^x + e^{2x} + h'(y) = e^x y + e^{2x} \Rightarrow h'(y) = 0$$

e quindi la soluzione generale di (14) è

$$\Phi(x, y) = e^x \frac{y^2}{2} + ye^{2x} = C$$

Esercizi

1. Dimostra che l'equazione a variabili separabili $g(x) + f(y) y'(x) = 0$ è esatta.
2. Per ciascuna equazione trova il valore di a per il quale l'equazione è esatta e poi trova la soluzione generale:
 - (a) $x + ye^{2xy} + axe^{2xy}y'(x) = 0$
 - (b) $x^{-2} + y^{-2} + \frac{ax+1}{y^3}y'(x) = 0$
3. Trova la soluzione generale di ciascuna equazione:
 - (a) $2x \sin y + y^3e^x + (x^2 \cos y + 3y^2e^x)y'(x) = 0$
 - (b) $y^2/2 - 2ye^x + (y - e^x)y'(x) = 0$
4. Trova la soluzione di ciascuno dei problemi di Cauchy:
 - (a)
$$\begin{cases} 2xy^3 + 3y^2x^2y'(x) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
 - (b)
$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + (2y + 2x^2)y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il problema dell'esistenza e l'unicità della soluzione

Abbiamo visto che

- only in casi particolari possiamo risolvere analiticamente un'equazione differenziale;
- anche quando possiamo risolvere l'equazione, la soluzione spesso si presenta in una forma implicita;

Quindi la necessità di sviluppare e applicare **metodi numerici** che ci permettono, dato un problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a dare una stima della soluzione esatta in un'intorno del punto (x_0, y_0) . Ma l'applicazione di metodi numerici potrebbe avere senso soltanto se:

- sappiamo che esiste una soluzione del problema di Cauchy;
- tale soluzione sia unica.

Purtroppo, come visto in Esempio 2, questo non è sempre vero:

Esempio 2. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

amette almeno due soluzioni: la funzione costante $y_1(x) = 0$ e la funzione

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Conclusione Dobbiamo stabilire dei criteri che ci permettano, prima ad applicare un metodo numerico, a verificare che il problema di Cauchy ha una soluzione e che tale soluzione sia unica.

Teorema di esistenza e unicità. Sia $f(x, y)$ sia una funzione continua nel rettangolo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ e siano

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|, \quad \alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right);$$

Supponiamo che esiste una costante $L > 0$ tale che

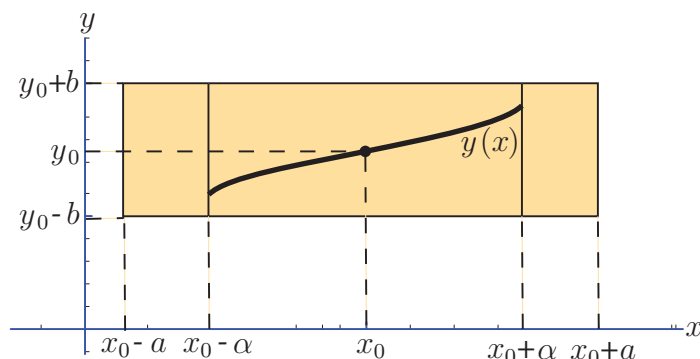
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (15)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in R$.

Allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $y(x)$ per $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.



Definizione: Una funzione di due variabili $f(x, y) : [x_0, x_1] \rightarrow R$ che soddisfa la condizione (15) nel teorema si chiama **Lipschitziana rispetto a y uniformemente per $x \in [x_0, x_1]$** .

Esercizio. Dimostrare che il problema di Cauchy in Esempio 2 non soddisfa le condizioni del teorema di esistenza e unicità.

Risoluzione Nel problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in R \Rightarrow f(x, y) = 2\sqrt{y}.$$

Siano $a = 1$ e $b < 1$. Prendiamo $y_1, y_2 \in R$ tali che $y_1, y_2 < \delta^2$ dove δ è un numero positivo < 1 :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2\sqrt{y_1} - 2\sqrt{y_2}| = 2 \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} > \frac{|y_1 - y_2|}{\delta}.$$

In particolare

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} > \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} = \infty,$$

quindi non può esistere una costante L che limita tale rapporto. Con ciò abbiamo dimostrato che il problema di Cauchy in Esempio 2 non soddisfa la condizione Lipschitziana.

Non è sempre facile da verificare la condizione Lipschitziana (15) nel Teorema di esistenza e unicità. Il corollario seguente ci offre una condizione sufficiente che in generale è più facile a verificare:

Corollario del teorema di esistenza e unicità. Sia $f(x, y)$ sia una funzione continua nel rettangolo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ con derivate parziali continue in R , e siano

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|, \quad \alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right);$$

Supponiamo che esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right| \leq L, \quad (16)$$

per ogni $(x, y) \in R$.

Allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $y(x)$ per $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Dimostrazione Secondo il teorema del valor medio, per ogni $y_0 - b \leq y_1 < y_2 \leq y_0 + b$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi) \right| \cdot (y_2 - y_1),$$

per un valore $\xi \in [y_1, y_2]$. Secondo l'ipotesi del corollario

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi) \right| \leq L \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_2 - y_1|.$$

Quindi, secondo il Teorema di esistenza e unicità la soluzione del problema di Cauchy esiste in un intorno del punto (x_0, y_0) ed è unica.

Esempio 15. Sia $a(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[x_0, x_1]$ (cioè $a(x) \in C^0[x_0, x_1]$). Verificare che il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x), & x \in [x_0, x_1] \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione la funzione costante $y(x) = 0$.

Soluzione La funzione costante $y(x) = 0$ ovviamente soddisfa l'equazione. Per dimostrare che questa soluzione è unica, dobbiamo soltanto verificare che la funzione $f(x, y) = a(x)y$ soddisfa le ipotesi del corollario. $f(x, y)$ è continua perchè essa è il prodotto di due funzioni continue. Poi,

$$\partial_y f(x, y) = a(x).$$

Essendo la funzione $a(x)$ continua su un intervallo chiuso, il Teorema di Weierstrass implica che $a(x)$ assume un massimo e un minimo, quindi è limitata in modulo: esiste $L > 0$ tale che

$$|a(x)| \leq L, \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

Quindi anche la condizione (16) è soddisfatta.

Esercizi

1. Dimostrare che ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy ha una soluzione sull'intervallo specificato:

$$(a) \begin{cases} y'(x) = y^2 + \cos x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in [0, 1/2];$$

$$(b) \begin{cases} y'(x) = e^{-x^2} + y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x \in [1, 1 + \sqrt{e}/2]$$

2. Dimostra che $y(x) = -1$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x(1 + y) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Equazioni differenziali lineari di secondo ordine

Definizione. Un' equazione differenziale di secondo ordine si chiama *lineare* se è del tipo:

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

dove $a_i(x), b(x) \in C^0[\alpha, \beta]$ (funzioni continue nell'intervallo $[\alpha, \beta]$).

La funzione $b(x)$ si chiama *termine noto*.

- Se $b(x) = 0$, l'equazione si chiama *omogenea*;
- se $b(x) \neq 0$, l'equazione si chiama *non omogenea*.

In generale saremmo in grado a risolvere in modo esplicito pochissimi equazioni di secondo grado. Per esempio potremo risolvere l'equazione $y''(x) = g(x)$ integrando due volte rispetto x .

Esempio 16. $y''(x) = x$. Integrando due volte rispetto x otteniamo

$$\begin{aligned}y''(x) = x &\Rightarrow \\ \int y''(x) dx &= \int x dx + C_1 \Rightarrow y'(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow \\ \int y'(x) dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx + C_2 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.\end{aligned}$$

Osserviamo che la soluzione generale contiene due costanti di integrazione. Per determinare una soluzione particolare abbiamo bisogno di due condizioni iniziali. Per esempio se fissiamo il valore della funzione $y(x)$ e il valore della sua derivata in un punto:

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases},$$

otteniamo

$$\begin{cases} y(1) = \frac{1^3}{6} + C_1 + C_2 = 1 \\ y'(1) = \frac{1^2}{2} + C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - \frac{1}{6} - C_1 = \frac{4}{3} \\ C_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

è

$$y(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}.$$

Teorema 1 (esistenza e unicità dell'equazione omogenea)

Siano $a_0(x)$ e $a_1(x)$ due funzioni continue nell'intervallo $\alpha < x < \beta$. Allora esiste una e solo una funzione $y(x)$ che soddisfa il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0, \quad x_0 \in (\alpha, \beta) \end{cases}$$

per ogni $\alpha < x < \beta$.

Corollario L'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0, \end{cases}$$

è la soluzione nulla: $y(x) = 0$.

Dimostrazione: Ovviamente $y(x) = 0$ è una soluzione e secondo il Teorema di esistenza e unicità tale soluzione è unica.

Insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

Date due funzioni $a_0(x), a_1(x)$ continue nell'intervallo $\alpha < x < \beta$, definiamo una applicazione L che a ogni funzione $y(x)$ (derivabile due volte con derivate continue) corrisponde un'altra funzione $L(y)$ dove

$$L(y) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x).$$

Quindi, l'equazione omogenea si può scrivere nella forma

$$L(y) = 0.$$

Teorema 2 L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$L(y) = 0$$

è uno *spazio lineare*, cioè se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due sue soluzioni, allora anche $c_1y_1 + c_2y_2$ è una sua soluzione.

$$\left. \begin{array}{l} L(y_1) = 0 \\ L(y_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow L(c_1y_1 + c_2y_2) = 0.$$

Dimostrazione: Basta osservare che l'applicazione L è un *operatore lineare*, cioè per ogni costante c , e per ogni due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$

$$L(c_1y(x)) = cL(y(x))$$

$$L(y_1(x) + y_2(x)) = L(y_1(x)) + L(y_2(x))$$

Questo fatto è una conseguenza diretta dal fatto che la differenziazione è un operatore lineare:

$$\frac{d}{dx}(c y(x)) = c \frac{dy}{dx} \quad \frac{d}{dx}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

Diciamo che le soluzioni particolari $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sono **linearmente dipendenti** se esistono costanti $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tale che

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Se tali costanti non esistono le funzioni si dicono **linearmente indipendenti**.

Osserviamo che, due soluzioni $y_1(x), y_2(x)$ sono linearmente dipendenti se e solo se una è multiplo dell'altra:

$$y_2(x) = c y_1(x), \quad c = c_1/c_2, \quad c_2 \neq 0.$$

Teorema 3 Siano $y_1(x), y_2(x)$ due soluzioni particolari e linearmente indipendenti dell'equazione:

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad \alpha < x < \beta \quad (17)$$

Allora la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Esempio 17 L'equazione $y''(x) + y(x) = 0$ ha due soluzioni linearmente indipendenti:

$$y_1(x) = \cos x, \quad \text{infatti } y_1''(x) = -\cos x = -y_1(x)$$

$$y_2(x) = \sin x, \quad \text{infatti } y_2''(x) = -\sin x = -y_2(x)$$

Allora secondo il Teorema 3, la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x;$$

cioè ogni altra soluzione è una combinazione lineare di y_1 e y_2 con coefficienti appropriati.

Dimostrazione del Teorema 3

Vogliamo prima dimostrare che se y_1 e y_2 sono indipendenti, allora per ogni $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Infatti, se la determinante era zero, il sistema omogeneo

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

avrebbe avuto soluzioni non nulle per c_1 e c_2 ; quindi $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ sarebbe stata una soluzione non nulla del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0, \end{cases}$$

e questo fatto contraddirebbe il Teorema 2. Quindi il determinante non è nullo.

Sia adesso $z(x)$ una soluzione qualsiasi dell'equazione (17). Vogliamo dimostrare che esistono c_1 e c_2 tali che

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Siano $z_0 = z(x_0)$ e $z'_0 = z'(x_0)$; allora il sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = z_0 \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = z'_0 \end{cases}$$

ha una soluzione per c_1 e c_2 perché il determinante della matrice dei coefficienti è non nulla. Quindi entrambe funzioni $z(x)$ e $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ sono due soluzioni del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = z'_0 \end{cases}$$

e secondo il Teorema 1 dovrebbero coincidere. c.e.d.

Equazione omogenea a coefficienti costanti

Teorema 4 Dato l'equazione differenziale

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad a_0, a_1 \in R, \quad (18)$$

e siano λ_1, λ_2 le due radici della sua *equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Allora per la soluzione generale di (21) abbiamo

(i) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in R$ (due radici reali)

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

(ii) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in \alpha \pm i\beta$ (due radici complessi)

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x);$$

(iii) se $\lambda_1 = \lambda_2$ (una radice reale)

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x};$$

Osservazione Anche nel caso in cui le due radici $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono complesse, la soluzione generale sul *campo dei numeri complessi* può essere presentata nella forma (i):

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in C;$$

ma essendo noi interessati soltanto in soluzioni reali dell'equazione differenziale, abbiamo estratto in (ii) la parte reale di tale soluzione usando le formule:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta, & e^{\lambda_1 x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta, & e^{\lambda_2 x} &= e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x). \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema 4

Prima verifichiamo che se λ è una radice dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

allora $y(x) = e^{\lambda x}$ è una soluzione particolare di (21). Infatti

$$\begin{aligned}y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0\end{aligned}$$

Quindi, se l'equazione caratteristica ha due radici distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

rappresentano due soluzioni particolari indipendenti, e secondo il Teorema 3, la soluzione generale é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Se, invece la discriminante dell'equazione caratteristica è uguale a 0, le due radici coincidono e sono uguali a

$$\lambda_1 = -a_1/2.$$

In questo caso dobbiamo trovare una seconda soluzione indipendente da $y_1(x)$. Proviamo con

$$y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}.$$

Sostituendo in (21) otteniamo:

$$y_2(x)' = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} = (1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x},$$

$$y_2(x)'' = (2\lambda_1 + \lambda_1^2 x) e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_2(x) =$$

$$= [2\lambda_1 + a_1 + x(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0)] e^{\lambda_1 x} = 0$$

Funziona! c.e.d.

Esempio 18. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Risoluzione L'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

ha due radici reali e distinti:

$$\lambda_1 = \frac{-4 + \sqrt{16 + 8}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$
$$\lambda_2 = \frac{-4 - \sqrt{16 + 8}}{2} = -2 - \sqrt{6}.$$

Quindi la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x}.$$

Determiniamo le costanti c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ (-2 + \sqrt{6})c_1 + (-2 - \sqrt{6})c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ (-2 + \sqrt{6})c_1 + (-2 - \sqrt{6})(1 - c_1) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 2\sqrt{6}c_1 = 4 + \sqrt{6} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} \right) e^{(-2+\sqrt{6})x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} \right) e^{(-2-\sqrt{6})x}.$$

Esercizi

1. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari omogenee:

(a) $y'' - 4y' = 0$

(b) $y'' - 2y' - 3y = 0$

(c) $y'' + 2y' + y = 0$

2. Trova la soluzione di ciascuno dei problemi di Cauchy:

(a)
$$\begin{cases} 5y'' + 5y' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 2y'' - 1y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Equazione lineare non omogenea di secondo ordine

Teorema 5 Sia

$$L(y) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \quad (19)$$

un'equazione lineare non omogenea di secondo ordine e sia $\psi(x)$ una soluzione particolare di (19).

Allora la soluzione generale di (19) è data dalla somma di $\psi(x)$ e la soluzione generale $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ dell'equazione omogenea:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \psi(x)$$

Esempio 19 Ricordiamo dall'Esempio 17 che l'equazione $y''(x) + y(x) = 0$ ha come soluzione generale:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x;$$

Allora, per trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea:

$$y''(x) + y(x) = x$$

basterebbe trovare una sua soluzione particolare. Per esempio

$$\psi(x) = x$$

la soddisfa perchè $\psi''(x) = 0$. Quindi, secondo il Teorema 4, la soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.$$

Dimostrazione del Teorema 5

Data una soluzione particolare $\psi(x)$ dell'equazione non omogenea (19), sia $y(x)$ un'altra sua soluzione arbitraria cioè

$$L(\psi) = b(x) \quad \text{e} \quad L(y) = b(x).$$

Vogliamo dimostrare che

$$y(x) = \phi(x) + \psi(x), \quad L(\phi) = 0,$$

dove $\phi(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea.

Osserviamo che $\phi(x) = y(x) - \psi(x)$ e usando le proprietà lineari del operatore L (vedi p.43) otteniamo

$$\begin{cases} L(y) = b(x) \\ L(\psi) = b(x) \end{cases} \Rightarrow L(y - \psi) = L(y) - L(\psi) = b(x) - b(x) = 0$$

Cioè $\phi(x)$ soddisfa l'equazione omogenea e secondo Teorema 3, $\phi(x)$ può essere presentata come combinazione lineare di due sue soluzioni linearmente indipendenti:

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

c.e.d.

Metodi per trovare la soluzione particolare $\psi(x)$

1. Metodo di variazione delle costanti (più generale ma richiede integrazione)
2. Indovinare la forma di $\psi(x)$ (applicabile in casi particolari quando l'equazione omogenea è a coefficienti costanti)

Osserviamo che se il termine noto è una somma di due termini, possiamo risolvere separatamente le equazioni per ciascun addente e poi prendere la somma delle soluzioni trovate:

Proposizione Sia $\psi_1(x)$ una soluzione particolare dell'equazione

$$L(y) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b_1(x),$$

e sia $\psi_2(x)$ una soluzione particolare dell'equazione

$$L(y) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b_2(x).$$

Allora $\psi_1(x) + \psi_2(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$L(y) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x).$$

Dimostrazione: Dal Teorema 2 segue che

$$L(\psi_1 + \psi_2) = L(\psi_1) + L(\psi_2) = b_1(x) + b_2(x).$$

c.e.d.

Metodo di variazione delle costanti

Cerchiamo la soluzione particolare $\psi(x)$ come una variazione delle costanti che appaiono nella soluzione generale dell'equazione omogenea, cioè nella forma

$$\psi(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \quad L(y_1) = L(y_2) = 0,$$

dove per poter determinare in modo unico le funzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ aggiungiamo la condizione che:

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Quindi,

$$\psi'(x) = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

$$\psi''(x) = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$$

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \psi''(x) + a_1(x)\psi'(x) + a_0(x)\psi(x) \\ &= u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) \\ &\quad + u_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) \\ &= u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 L(y_1) + u_2 L(y_2) \\ &= u_1' y_1' + u_2' y_2' = b(x) \end{aligned}$$

Quindi $L(\psi) = b(x)$ se u'_1 e u'_2 soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) = 0 \\ u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) = b(x) \end{cases}$$

Ricordiamoci (vedi p.45) che essendo y_1 e y_2 due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, la determinante della matrice di coefficienti del sistema

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Quindi, possiamo usare la formula di Cramer per scrivere la soluzione:

$$u'_1(x) = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y'_2(x) \end{bmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{y_2(x)b(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u'_2(x) = \frac{\det \begin{bmatrix} y_1(x) & 0 \\ y'_1(x) & b(x) \end{bmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1(x)b(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Da qui possiamo trovare $u_1(x)$ e $u_2(x)$ integrando.

Esempio 20. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y''(x) + y = 1/\sin x, \quad x \in (0, \pi) \quad (20)$$

Risoluzione Ricordiamo dall'Esempio 17 che le due soluzioni indipendenti l'equazione omogenea $y''(x) + y(x) = 0$ sono

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sin x;$$

Abbiamo

$$W(\cos x, \sin x) = \det \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Quindi, l'equazione non omogenea ha come soluzione particolare

$$\psi(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x,$$

dove

$$u_1'(x) = -\frac{\sin x}{\sin x} = -1$$

$$u_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Integrando questi equazioni

$$u_1(x) = -\int 1 dx = -x$$

$$u_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x|$$

In conclusione

$$\psi(x) = -x \cos x + \ln |\sin x| \sin x,$$

e la soluzione generale dell'equazione (20) è

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos x + \ln |\sin x| \sin x$$

Esercizi

1. Trova la soluzione generale di ciascun' equazione:

(a) $y''(x) + y(x) = 1/\cos(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

(b) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x e^{3x} + 1$

2. Trova la soluzione del problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = x^{5/2}e^{-2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Indovinare la forma di $\psi(x)$

Dato l'equazione differenziale omogenea a **coefficienti costanti**

$$y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0, \quad a_0, a_1 \in R, \quad (21)$$

siano λ_1, λ_2 le due radici della sua *equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Allora, nei seguenti casi, sappiamo che la soluzione particolare $\psi(x)$ dell'equazione non omogenea

$$y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x)$$

ha una forma simile alla forma del termine noto $b(x)$.

In particolare:

- quando $b(x) = e^{\mu x} p_m(x)$ dove $p_m(x)$ è un polinomio di grado m , abbiamo una soluzione particolare nella forma

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\mu x} q_m(x) & \text{se } \mu \neq \lambda_i \\ x^{r_i} e^{\mu x} q_m(x) & \text{se } \mu = \lambda_i \end{cases},$$

dove r_i è la molteplicità algebrica di λ_i .

- quando $b(x) = e^{\mu x}(p_m(x) \sin \omega x + p_l(x) \cos \omega x)$, dove p_m, p_l sono dei polinomi di gradi m, l , abbiamo una soluzione particolare nella forma

$$\psi(x) = e^{\mu x}(q_s(x) \sin \omega x + \bar{q}_s(x) \cos \omega x), \quad s = \max(m, l),$$

dove q_s, \bar{q}_s sono polinomi di grado $\leq s$ se $\mu + i\omega$ non è una radice dell'equazione algebrica;

Invece, se $\mu + i\omega = \lambda_i$ è una radice dell'equazione algebrica con molteplicità r_i , abbiamo una soluzione particolare nella forma

$$\psi(x) = x^{r_i} e^{\mu x}(q_s(x) \sin \omega x + \bar{q}_s(x) \cos \omega x), \quad s = \max(m, l),$$

Esempio 1. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y''(x) - 4y'(x) = x^2 + 1 \quad (22)$$

Risoluzione In questo caso l'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4) = 0,$$

Le radici dell'equazione sono: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$.

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{4x} = c_1 + c_2 e^{4x}.$$

Il termine noto dell'equazione non omogenea è nella forma:

$$b(x) = e^{0 \cdot x}(x^2 + 1),$$

ed essendo $0 = \lambda_1$ una delle radici dell'equazione caratteristica con molteplicità $r_1 = 1$, dobbiamo cercare la soluzione particolare nella forma:

$$\psi(x) = x^1(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Sostituendo ψ nell'equazione otteniamo:

$$(6ax + 2b) - 4(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 1$$

$$-12ax^2 + (6a - 8b)x + 2b - 4c = x^2 + 1$$

Quindi otteniamo il seguente sistema per i coefficienti a, b e c :

$$\begin{cases} -12a = 1 \\ 6a - 8b = 0 \\ 2b - 4c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/12 \\ b = -1/16 \\ c = -9/32 \end{cases}$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{4x} - x \left(\frac{x^2}{12} + \frac{x}{16} + \frac{9}{32} \right).$$

Esempio 2. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 8e^{3x} \quad (23)$$

Risoluzione In questo caso l'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

Le radici dell'equazione sono: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Il termine noto dell'equazione non omogenea è nella forma:

$$b(x) = e^{3 \cdot x} \cdot 8,$$

ed essendo $3 = \lambda_2$ una delle radici dell'equazione caratteristica con molteplicità $r_2 = 1$, dobbiamo cercare la soluzione particolare nella forma:

$$\psi(x) = x^1 e^{3x} \cdot a = a x e^{3x}.$$

Sostituendo ψ nell'equazione otteniamo:

$$(9axe^{3x} + 6ae^{3x}) - 2(ae^{3x} + 3axe^{3x}) - 3axe^{3x} = 8e^{3x}$$

$$(9a - 6a - 3a)x + (6a - 2a) = 8$$

$$a = 2$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + 2xe^{3x}.$$

Esercizi

1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni lineari non omogenee:

(a) $y'' - 4y' = x^2 + 1$

(b) $y'' - 3y' - 3y = \cos 2x$

(c) $y'' + 3y = x^3 - 1$

(d) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

(e) $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$

(f) $y'' + 4y = x \sin(2x)$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

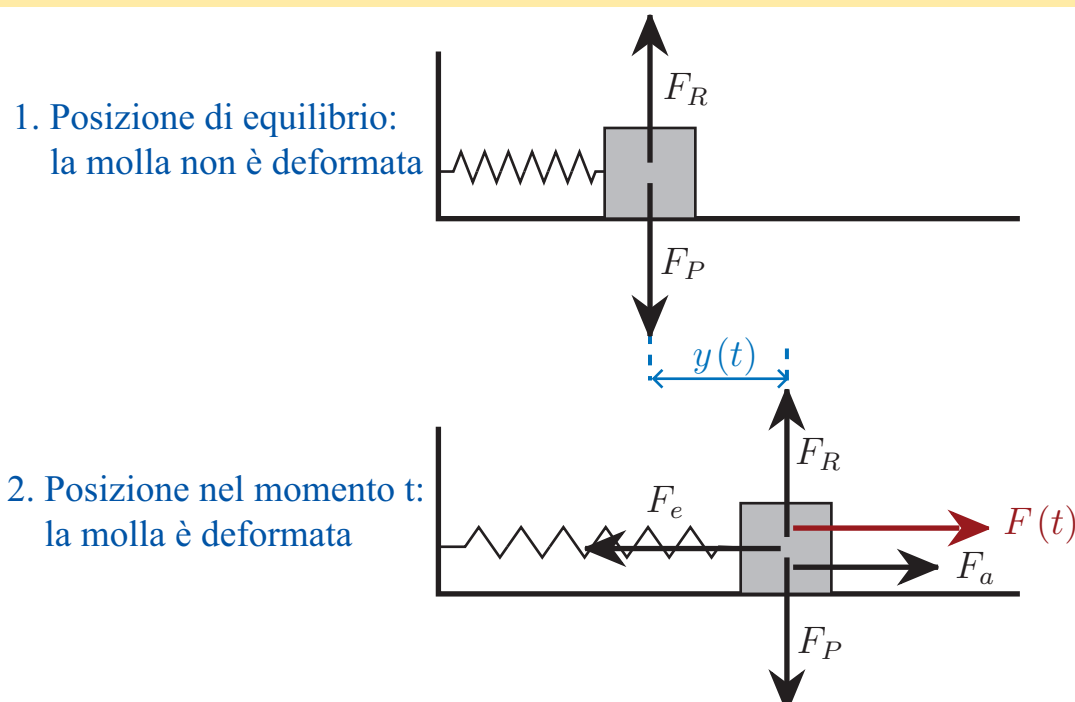
(a)
$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 + x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Vibrazioni meccaniche

Consideriamo un piccolo oggetto di massa m attaccato a una molla elastica. Nella posizione di equilibrio, sul corpo agiscono soltanto la forza peso e la reazione vincolare che si annullano a vicenda. Se il corpo viene spostato dalla posizione d'equilibrio, esso comincia ad oscillare e la funzione $y(t)$ descrive la posizione del corpo nel momento t rispetto all'equilibrio. Durante il movimento del corpo su di esso agiscono le seguenti forze:

- Forza elastica della molla: $F_e = -k y(t)$, $k > 0$
- Forza di attrito viscoso (proporzionale alla velocità del corpo nel mezzo): $F_a = -c y'(t)$, $c \geq 0$
- Forza peso: F_P
- Forza di reazione vincolante: $F_R = -F_P$
- Forza esterna (il suo verso e direzione possono cambiare con il tempo): $F(t)$



L'equazione che governa il movimento del corpo è la seconda legge della dinamica:

$$\text{massa} \cdot \text{accelerazione} = \text{forza risultante},$$

cioè:

$$m y''(t) = -ky(t) - cy'(t) + F(t)$$
$$y''(t) + \frac{c}{m} y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Quindi, l'equazione è un'equazione lineare di secondo ordine. Se non agisce una forza esterna ($F(t) = 0$), tale equazione è omogenea.

Oscillazioni libere in assenza di attrito: $F(t) = 0$ e $c = 0$.

L'equazione diventa: $y''(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ponendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, abbiamo che le due soluzioni indipendenti sono

$$y_1(t) = \cos(\omega_0 t), \quad y_2 = \sin(\omega_0 t).$$

Allora la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

Se nel momento iniziale il corpo si trovava nella posizione di equilibrio, ma aveva una velocità iniziale

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0,$$

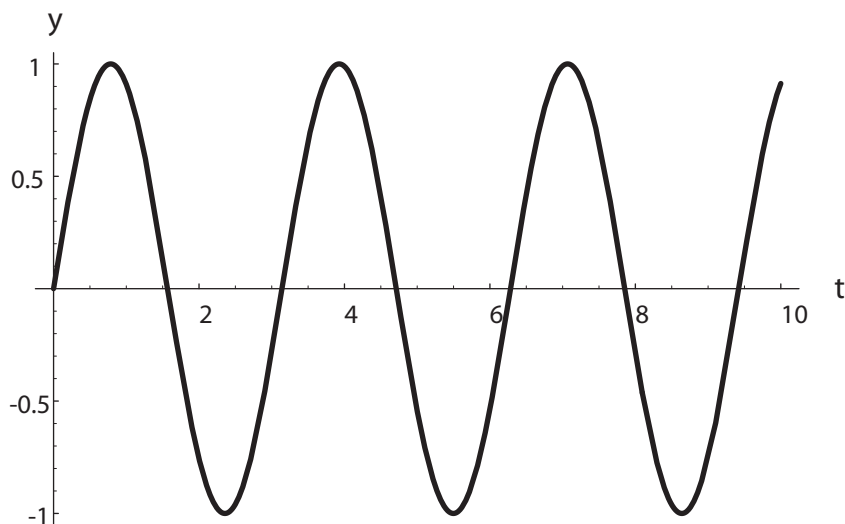
otteniamo per la soluzione del problema di Cauchy:

$$y(0) = c_1 = 0, \quad y'(0) = c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 \cdot 0) = v_0,$$

quindi $c_2 = v_0/\omega_0$ e

$$y(t) = v_0/\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Osserviamo che il movimento del corpo è periodico con periodo: $T = 2\pi/\omega_0$.



Oscillazioni libere smorzate: $F(t) = 0$ e $c > 0$.

L'equazione corrispondente è:

$$y''(t) + \frac{c}{m}y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0 \quad (24)$$

L'equazione caratteristica è:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

Caso 1. $c^2 - 4km > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}$ sono reali, distinti e negativi.

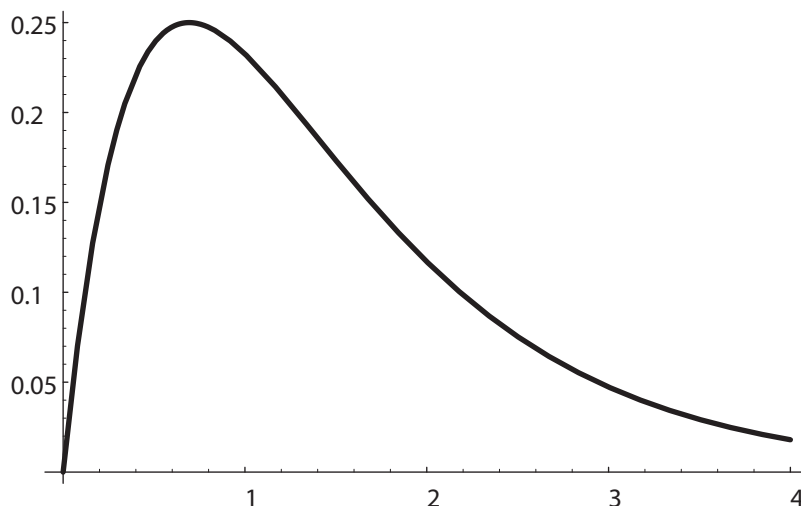
Quindi la soluzione generale diventa:

$$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}.$$

Caso 2. $c^2 - 4km = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ sono reali, distinti e negativi. Quindi la soluzione generale diventa:

$$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2te^{\lambda_1 t}.$$

In questi due casi le oscillazioni sono sovrasmorzate e se il corpo viene spostato dalla posizione di equilibrio, gradualmente ritorna ad essa.



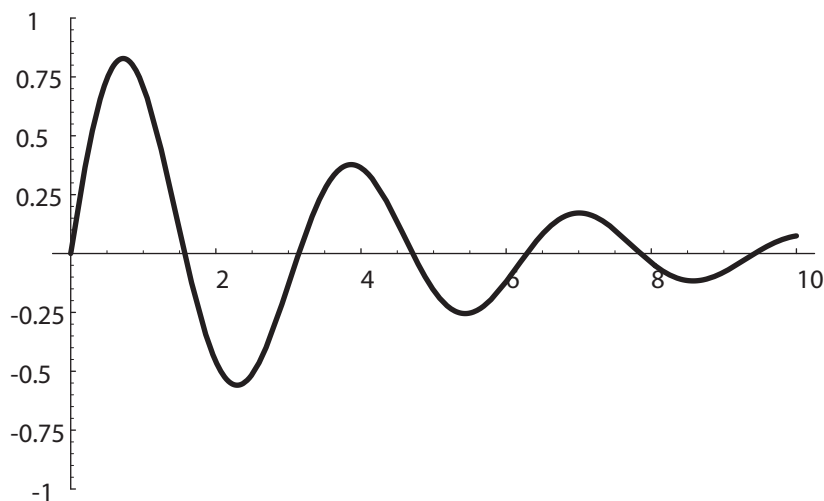
Caso 3. $c^2 - 4km < 0$. Le radici

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm I \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = -\sigma \pm I\mu$$

sono complesse. Quindi la soluzione generale diventa:

$$y(t) = e^{-\sigma t}(c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)).$$

In questo caso dopo la perturbazione iniziale le oscillazioni cominciano, ma con il tempo diminuiscono in ampiezza:



Oscillazioni libere forzate: $F(t) \neq 0$ e $c = 0$.

Consideriamo il caso in cui al sistema è applicata una forza periodica esterna $F = F_0 \cos(\omega t)$ con periodo $T = 2\pi/\omega$. L'equazione corrispondente è:

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Sappiamo già che le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ e la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

Caso 1 $\omega \neq \omega_0$. Cerchiamo la soluzione particolare nella forma: $\psi(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$.

Abbiamo

$$\psi''(t) + \omega_0^2 \psi(t) = (-\omega^2 + \omega_0^2) \psi(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Quindi, la soluzione particolare è

$$\psi(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

e per la soluzione generale dell'equazione non omogenea abbiamo

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

Osserviamo che più vicino è la frequenza della forza esterna alla frequenza propria del sistema, più significativo è il suo contributo:

$$|\omega - \omega_0| \ll 1 \Rightarrow \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \gg 1$$

Caso 2: Risonanza $\omega = \omega_0$. Cerchiamo la soluzione particolare nella forma:

$$\psi(t) = t(a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t)).$$

Dopo certi semplificazioni si ottiene

$$\psi''(t) + \omega_0^2 \psi(t) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t) + b\omega_0 \sin(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

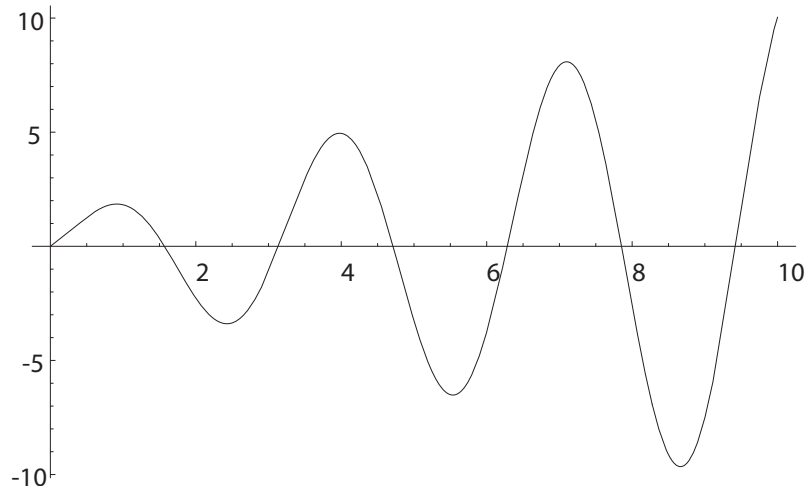
Quindi $a = F/(2m\omega_0)$, $b = 0$, e la soluzione particolare è

$$\psi(t) = \frac{tF_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

e per la soluzione generale dell'equazione non omogenea abbiamo

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{tF_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Osserviamo che il contributo della forza esterna cresce linearmente con il tempo. Quindi, le oscillazioni in questo caso aumentano in ampiezza e in questo consiste esattamente il fenomeno di risonanza:



Oscillazioni smorzate e forzate: $F(t) \neq 0$ e $c > 0$.

Consideriamo il caso in cui abbiamo attrito ed in più al sistema è applicata una forza periodica esterna $F = F_0 \cos(\omega t)$ con periodo $T = 2\pi/\omega$. L'equazione corrispondente è:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F_0 \cos(\omega t). \quad (25)$$

Sia $y_{om}(t)$ la soluzione generale dell'equazione omogenea (24). Allora la soluzione generale dell'equazione non omogenea (25) sarà

$$y(t) = y_{om}(t) + \psi(t),$$

dove cerchiamo la soluzione particolare $\psi(t)$ nella forma:

$$\psi(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t).$$

Calcolando le derivate di $\psi(t)$ e sostituendo in (25) otteniamo:

$$(bc\omega + a(k - m\omega^2)) \cos(\omega t) + (-ac\omega + b(k - m\omega^2)) \sin(\omega t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Uguagliamo i coefficienti davanti a $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} bc\omega + a(k - m\omega^2) = F_0 \\ -ac\omega + b(k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Risolviendo per a e b troviamo la soluzione particolare:

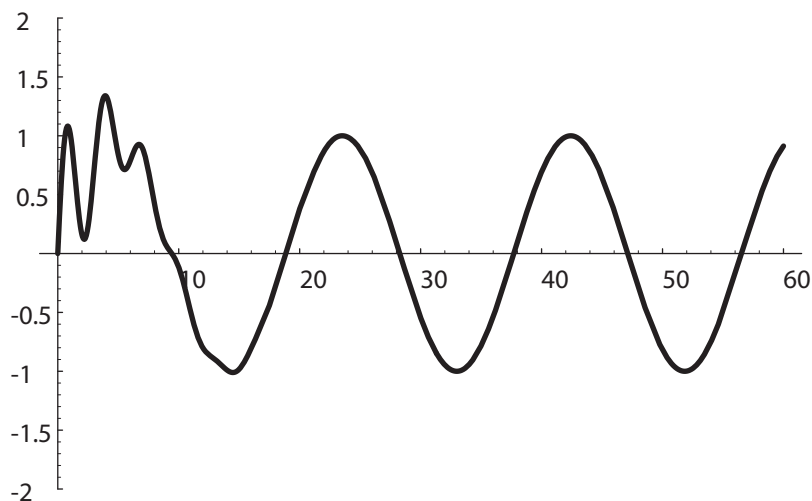
$$\psi(t) = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} [(k - m\omega^2) \cos(\omega t) + c\omega \sin(\omega t)].$$

Quindi, la soluzione generale dell'equazione non omogenea abbiamo

$$y(t) = y_{om}(t) + \psi(t),$$

dove $y_{om}(t)$ descrive degli oscillazioni con frequenza ω_0 , ma ampiezza che tende a zero quanto $t \rightarrow \infty$, mentre $\psi(t)$ descrive oscillazioni con frequenza ω (la frequenza della forza esterna) e ampiezza costante (perchè i coefficienti davanti a sin e cos non dipendono dal tempo). Per questo, $\psi(t)$ si chiama *la parte stabile della soluzione* ed è quella che descrive il comportamento del sistema per tempi molto lunghi.

La figura rappresenta la soluzione con $\omega_0 = 2$ e $\omega = 1/3$. Si vede che per $t > 20$ rimangono soltanto le oscillazioni con $\omega = 1/3$:



Esercizi 1

1. Un oggetto piccolo con massa $m = 1$ kg è attaccato ad una molla con costante elastica $k = 2$ N/m. Il sistema è immerso in un liquido viscoso con coefficiente di smorzamento $c = 3$ N.s/m. Nel momento $t = 0$ il corpo è spostato a $1/2$ m dalla posizione di equilibrio e rilasciato con velocità iniziale zero. Descrivere il moto del corpo per $t > 0$.
2. Un oggetto piccolo con massa $m = 1$ kg è attaccato ad una molla con costante elastica $k = 1$ N/m. Il sistema è immerso in un liquido viscoso con coefficiente di smorzamento $c = 2$ N.s/m. Nel momento $t = 0$ il corpo è spostato a $1/4$ m dalla posizione di equilibrio e rilasciato con velocità iniziale 1 m/s verso la posizione di equilibrio. Descrivere il moto del corpo per $t > 0$. Dimostra che il corpo attraversa soltanto una volta la posizione di equilibrio.
3. Un oggetto piccolo con massa $m = 1$ kg è attaccato ad una molla con costante elastica $k = 2$ N/m. Sul corpo è stata applicata una forza esterna costante $F = 2$ N. Nel momento $t = 0$ il corpo si trova nella posizione di equilibrio con velocità iniziale 1 m/s. Descrivere il moto del corpo per $t > 0$. Confrontare con il moto del corpo nell'assenza di una forza esterna.

Esercizi 2

1. Un oggetto piccolo con massa $m = 1$ kg è attaccato ad una molla con costante elastica $k = 4$ N/m. Sul corpo è stata applicata una forza esterna $F = \sin(2t)$ N. Nel momento $t = 0$ il corpo si trova nella posizione di equilibrio con velocità iniziale 1 m/s. Descrivere il moto del corpo per $t > 0$.

2. Trovare la particolare soluzione del problema di Cauchy:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F_0 \cos(\omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

nella forma $\psi(t) = A \cos(\omega t - \phi)$. Trovare il valore di ω tale che l'ampiezza A è massima. Analizzare la soluzione nel caso in cui $\omega_0 < c/(\sqrt{2}m)$ ($\omega_0^2 = k/m$).

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine n

Definizione. Un' equazione differenziale di secondo ordine si chiama *lineare a coefficienti costanti* se è del tipo:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x),$$

dove

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

sono dei costanti (non dipendono da x) e $b(x)$ è una funzione continua.

La funzione $b(x)$ si chiama *termine noto*.

- Se $b(x) = 0$, l'equazione si chiama *omogenea*;
- se $b(x) \neq 0$, l'equazione si chiama *non omogenea*.

Algoritmo per risolvere l'equazione lineare omogenea:

$$L(y) = y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (26)$$

In modo analogo del caso $n = 2$, si può dimostrare che

- L'insieme delle soluzioni dell'equazione (26) è uno *spazio lineare*, cioè se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due sue soluzioni, allora anche $c_1 y_1 + c_2 y_2$ è una sua soluzione;
- Se $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sono n soluzioni particolari e linearmente indipendenti dell'equazione (26), allora la sua soluzione generale è uguale a

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

dove c_i sono delle costanti arbitrari.

Possiamo trovare le n soluzioni particolari $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ come segue:

- (i) si risolve l'equazione algebrica associata (o l'equazione caratteristica):

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Allora il polinomio in λ si fattorizza come:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{r_i} \prod_{j=1}^l (\lambda - (\alpha_j + I\beta_j))^{s_j} (\lambda - (\alpha_j - I\beta_j))^{s_j} = 0,$$

dove λ_i sono k radici reali con molteplicità algebrica r_i e $(\alpha_j \pm i\beta_j)$ sono $2l$ radici complessi coniugati con molteplicità algebrica s_j e $I^2 = -1$.

- (ii) ad ogni radice reale λ_i con molteplicità algebrica $r_i \geq 1$ si associano r_i soluzioni linearmente indipendenti:

$$y_{i,1}(x) = e^{\lambda_i x}, \quad y_{i,2}(x) = x e^{\lambda_i x}, \dots, \quad y_{i,r_i}(x) = x^{r_i-1} e^{\lambda_i x}$$

- (iii) ad ogni copia di radici complessi coniugati $\alpha_j \pm i\beta_j$ con molteplicità algebrica $s_j \geq 1$ si associano $2s_j$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} y_{j,1}^1(x) &= e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), & y_{j,2}^2(x) &= e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \\ y_{j,2}^1(x) &= x e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x) & y_{j,2}^2(x) &= x e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x) \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y_{j,s_j}^1(x) &= x^{s_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x) & y_{j,s_j}^2(x) &= x^{s_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x) \end{aligned}$$

Esempio Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Soluzione In questo caso l'equazione caratteristica è:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

e può essere scritta come:

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0.$$

Le radici dell'equazione $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ sono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm I\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi, l'equazione caratteristica si fattorizza come:

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = \left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} + I\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} - I\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

Abbiamo le seguenti quattro soluzioni linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} y_{j,1}^1(x) &= e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2), & y_{j,2}^2(x) &= e^{-x/2} \sin(\sqrt{3}x/2), \\ y_{j,1}^1(x) &= x e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) & y_{j,2}^2(x) &= x e^{-x/2} \sin(\sqrt{3}x/2), \end{aligned}$$

e la soluzione generale è:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) + c_2 x e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) \\ &+ c_3 e^{-x/2} \sin(\sqrt{3}x/2) + c_4 x e^{-x/2} \sin(\sqrt{3}x/2) \\ &= (c_1 + c_2 x) e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) + (c_3 + c_4 x) e^{-x/2} \sin(\sqrt{3}x/2). \end{aligned}$$

Esercizi Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni lineari omogenee:

$$y''' - 4y' = 0$$

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

$$y''' - 5y'' = 0$$

Insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea

Theorema Siano $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ n soluzioni particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L(x) = 0$, e sia $\psi(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$L(x) = b(x).$$

Allora l'integrale generale dell'equazione non omogenea $L(x) = b(x)$ è

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + \psi(x).$$

Il teorema indica che per sapere l'integrale generale basterebbe risolvere l'equazione omogenea e trovare una soluzione particolare $\psi(x)$ dell'equazione non omogenea.

Per trovare $\psi(x)$ anche qui possiamo usare il metodo di variazione delle costanti o, nel caso in cui $b(x)$ è il prodotto di un polinomio con una esponente o una funzione trigonometrica (sin o cos), possiamo indovinare la forma di $\psi(x)$ e risolvere per i coefficienti. Vale lo stesso discorso come per le equazioni di secondo ordine (vedi il paragrafo *"Indovinare la forma di $\psi(x)$ "* sopra).

Esercizi

- Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni lineari non omogenee:

$$y''' - 4y' = x + 1$$

$$y''' - 3y'' = \cos 2x$$

- Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x} \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Sistemi di equazioni differenziali

Un sistema di equazioni differenziali di ordine uno consiste in un insieme di n equazioni differenziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = F_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad (27)$$

Risolvere un tale sistema significa trovare n funzioni $y_1(x)$, \dots , $y_n(x)$ che soddisfano simultaneamente tutti le equazioni del sistema.

[Esempio 21.](#) Il sistema di due equazioni differenziali di primo ordine

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = 1 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1, \end{array} \right.$$

puo' essere risolto facilmente integrando il primo equazione per trovare y_1 . Poi, sostituendo y_1 nella seconda equazione, la risolviamo per y_2 :

$$y_1(x) = \int 1 dx = x + c_1$$

$$y_2(x) = \int y_1(t) dx = \int (x + c_1) dx = x^2/2 + c_1x + c_2$$

Quindi la soluzione generale del sistema dipende da due costanti di integrazione.

In generale, per avere un'unica soluzione dobbiamo impostare un problema di Cauchy, aggiungendo al sistema di n equazioni (29), n condizioni iniziali:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, \quad y_2(x_0) = y_{2,0}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n,0}$$

che fissano il valore delle funzioni y_i in un punto dato x_0 .

Esempio 21'. Se aggiungiamo al sistema nell' Esempio 21, le due condizioni

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1, \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ 0^2/2 + c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è:

$$\begin{cases} y_1(x) = x \\ y_2(x) = x^2/2 + 1, \end{cases}$$

Sistemi di equazioni differenziali lineari

Un sistema di equazioni differenziali si chiama **lineare** se ciascuna funzione F_i è lineare nelle variabili y_i :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{1,1}(x)y_1 + \dots + a_{1,n}(x)y_n + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{2,1}(x)y_1 + \dots + a_{2,n}(x)y_n + b_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n,1}(x)y_1 + \dots + a_{n,n}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (28)$$

Diciamo che

- il sistema è **omogeneo** se $b_i(x) = 0$;
- il sistema è **a coefficienti costanti** se $a_{i,j}(x) = a_{i,j}$ sono dei costanti e non dipendono da x .

Un sistema omogeneo e la corrispondente condizione iniziale possono essere scritti nella forma matriciale:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad Y(x_0) = Y_0$$

dove

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \dots \\ y_{n,0} \end{bmatrix}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Teorema 1 (esistenza e unicità della soluzione del sistema omogeneo a coefficienti costanti) Esiste una e soltanto una soluzione del problema di Cauchy

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad Y(x_0) = Y_0$$

e tale soluzione è definita per ogni $x \in R$.

Corollario L'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad Y(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

è la soluzione nulla: $Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dimostrazione: Ovviamente

$$Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

è una soluzione e secondo il Teorema di esistenza e unicità tale soluzione è unica.

Insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

Teorema 2 L'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$Y'(x) = A \cdot Y(x)$$

è uno *spazio lineare*, cioè se $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ sono due sue soluzioni, $c_1Y_1 + c_2Y_2$ è anche essa una sua soluzione.

Dimostrazione: Se

$$Y_1'(x) = A \cdot Y_1(x)$$

$$Y_2'(x) = A \cdot Y_2(x),$$

allora

$$\begin{aligned}(c_1Y_1 + c_2Y_2)' &= c_1Y_1' + c_2Y_2' \\ &= c_1A \cdot Y_1 + c_2A \cdot Y_2 = A \cdot (c_1Y_1 + c_2Y_2)\end{aligned}$$

Teorema 3 (Test per l'indipendenza) Siano $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_k(x)$, k soluzioni particolari linearmente indipendenti del sistema omogeneo di n equazioni:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x).$$

Allora per ogni valore x_0 i vettori $Y_1(x_0), Y_2(x_0), \dots, Y_k(x_0)$ sono linearmente indipendenti.

Esempio 22. Il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2 \\ y_2'(x) = -y_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ha le seguenti due soluzioni:

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix}$$

Infatti,

$$Y_1(x)' = \begin{bmatrix} \cos(x)' \\ -\sin(x)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x) \\ -\cos(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix}.$$

In modo analogo si verifica che anche $Y_2(x)$ è una soluzione del sistema.

Secondo il Teorema 2, per verificare che le due soluzioni sono linearmente indipendenti, basterebbe verificare che i loro valori per un dato x_0 sono due vettori indipendenti.

Infatti, per $x_0 = 0$ otteniamo

$$Y_1(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ -\sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2(0) = \begin{bmatrix} \sin(0) \\ \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che sono sicuramente due vettori linearmente indipendenti.

Quindi $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti del sistema.

Teorema 4 Siano $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ n soluzioni particolari linearmente indipendenti del sistema omogeneo di n equazioni:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x).$$

Allora la soluzione generale del sistema è

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + \dots + c_n Y_n(x).$$

[Esempio 22'](#). Applicando il Teorema 3 al sistema nell' Esempio 22, otteniamo che Il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2 \\ y_2'(x) = -y_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ha come soluzione generale:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \\ -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \end{bmatrix}.$$

Cioè:

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \\ y_2(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x), \end{cases}$$

Teorema 5 Il vettore funzione

$$Y(x) = e^{\lambda x} \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad v_i \in R$$

è una soluzione del sistema omogeneo di n equazioni:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x).$$

se e solo se $\begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$ è un autovettore di A con autovalore λ ,
cioè:

$$A \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione

$$Y'(x) = \frac{d}{dx} e^{\lambda x} \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda x} \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

D'altra parte

$$A \cdot Y(x) = A e^{\lambda x} \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = e^{\lambda x} A \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Quindi $Y'(x) = A \cdot Y(x)$ se e solo se

$$A \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Teoremi 4 e 5 implicano che

Corollario Siano $v^1, v^2, \dots, v^n(x)$ n autovettori linearmente indipendenti di A con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Allora la soluzione generale del sistema

$$Y'(x) = A \cdot Y(x)$$

è

$$Y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 x} v^2 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} v^n.$$

Richiami di Algebra Lineare

Ricordiamo che data una matrice $n \times n$ A , si dice che il vettore v è **autovettore** di A con **autovalore** λ se

$$A \cdot v = \lambda v$$

Fatti:

- (i) gli autovalori di A sono le radici del **polinomio caratteristico**:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

dove I_n è la matrice d'identità $n \times n$;

- (ii) A ha al massimo n autovalori diversi; la **molteplicità algebrica** $m_a(\lambda)$ di un'autovalore λ è uguale alla sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico;
- (iii) se v^1 è un' autovettore con autovalore λ_1 e v^2 è una autovettore con autovalore λ_2 , dove $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora i vettori v^1 e v^2 sono linearmente indipendenti.
- (iv) l'insieme degli autovettori associati ad un dato autovalore λ è uno spazio lineare chiamato **autospatio** di λ e la sua dimensione $m_g(\lambda)$ viene chiamata **molteplicità geometrica** di λ ;
- (v) $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Esempio 23. Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Risoluzione Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 12 \\ 3 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 36 = (\lambda - 7)(\lambda + 5).$$

Quindi, le due radici sono

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 7.$$

e ciascuna di loro ha molteplicità algebrica 1.

- Per trovare gli autovettori associati all'autovalore $\lambda_1 = -5$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo lineare:

$$(A + 5I) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6v_1 + 12v_2 = 0 \\ 3v_1 + 6v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -2v_2$$

Quindi, l'autospazio di $\lambda_1 = -5$ consiste nell'insieme dei vettori

$$\alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

la dimensione di questo spazio lineare è 1 e quindi

$$m_a(-5) = m_g(-5) = 1$$

- Per trovare gli autovettori associati al autovalore $\lambda_1 = 7$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo lineare:

$$(A - 7I) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6v_1 + 12v_2 = 0 \\ 3v_1 - 6v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

Quindi, l'autospazio di $\lambda_1 = 7$ consiste nell'insieme dei vettori

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in R;$$

la dimensione di questo spazio lineare è 1 e quindi

$$m_a(7) = m_g(7) = 1$$

Esempio 23'. Trovare la soluzione generale del sistema

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Risoluzione La matrice A ha due autovettori linearmente indipendenti che abbiamo trovati sopra, quindi secondo il Corollario del Teorema 5, la soluzione generale del sistema è

$$Y(x) = c_1 e^{-5x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{7x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio 24. Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Risoluzione Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda).$$

Quindi, le due radici sono

$$\lambda_1 = 1, \quad m_a(1) = 2$$

$$\lambda_2 = 2, \quad m_a(2) = 1$$

- Per trovare gli autovettori associati al autovalore $\lambda_1 = 1$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo lineare:

$$(A - I) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi, l'autospazio di $\lambda_1 = 1$ consiste nell'insieme dei vettori

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in R;$$

la dimensione di questo spazio lineare è 1 e quindi

$$2 = m_a(1) > m_g(1) = 1$$

- Per trovare gli autovettori associati al autovalore $\lambda_2 = 2$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo lineare:

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Quindi, l'autospazio di $\lambda_2 = 2$ consiste nell'insieme dei vettori

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in R;$$

la dimensione di questo spazio lineare è 1 e quindi

$$m_a(2) = m_g(2) = 1$$

Osservazione Gli autovettori trovati nell'esercizio 24 non ci permettono di scrivere la soluzione generale del sistema

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La ragione è che la matrice è 3×3 , ma ha soltanto due autovettori linearmente indipendenti. Secondo il Teorema 4, per scrivere la soluzione generale abbiamo bisogno di 3 soluzioni linearmente indipendenti. Quindi, anche se sappiamo che

$$Y(x) = c_1 e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

è una soluzione del sistema, sappiamo anche che questa NON È la soluzione generale (manca un termine). Questo problema è ovviamente collegato al fatto che per un'autovalore $\lambda_1 = 1$,

$$m_a(\lambda_1) > m_g(\lambda_1).$$

Risoluzione di un sistema omogeneo

quando per un dato autovalore λ , $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$

Data una matrice $n \times n$ A , e un valore reale x , definiamo l'**esponenziale matriciale** e^{Ax} come la serie infinita:

$$e^{Ax} = I + Ax + \frac{A^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{A^k x^k}{k!} + \dots,$$

dove I è la matrice d'Identità $n \times n$

Si può dimostrare che la serie converge per ogni x .

Teorema 6 Per ogni vettore v , $e^{Ax}v$ è una soluzione del sistema

$$Y'(x) = A \cdot Y(x).$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{Ax}v &= \frac{d}{dx} \left(I + Ax + \frac{A^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{A^k x^k}{k!} + \dots \right) v \\ &= \left(A + \frac{A^2 \cdot 2x}{2!} + \dots + \frac{A^k \cdot kx^{k-1}}{k!} + \dots \right) v \\ &= A \cdot \left(I + Ax + \frac{A^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{A^k x^k}{k!} + \dots \right) v = A \cdot e^{Ax}v \end{aligned}$$

La matrice e^{Ax} è una **soluzione matriciale fondamentale** del sistema

$$Y'(x) = A \cdot Y(x),$$

in senso che le sue colonne rappresentano un insieme di n soluzioni linearmente indipendenti.

Sia λ una costante qualsiasi. Allora possiamo scrivere la soluzione $e^{Ax}v$ nella forma:

$$e^{Ax}v = e^{Ax - \lambda Ix + \lambda Ix}v = e^{(A - \lambda I)x}e^{\lambda Ix}v$$

Poi

$$\begin{aligned} e^{\lambda Ix}v &= \left(I + \lambda Ix + \frac{\lambda^2 I^2 x^2}{2!} + \dots \right)v \\ &= \left(1 + \lambda x + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \dots \right)Iv \\ &= e^{\lambda x}v \end{aligned}$$

Sostituendo otteniamo per la soluzione

$$\begin{aligned} e^{Ax}v &= e^{\lambda x}e^{(A - \lambda I)x}v \\ &= e^{\lambda x} \left(I + (A - \lambda I)x + \frac{(A - \lambda I)^2 x^2}{2!} + \dots + \right)v \end{aligned}$$

Quindi, se il vettore v è tale che per un certo m

$$(A - \lambda I)^m v = 0,$$

la serie diventa finita e possiamo scrivere la soluzione nella forma:

$$e^{Ax}v = e^{\lambda x} \left(I + (A - \lambda I)x + \dots + \frac{(A - \lambda I)^m x^m}{m!} \right)v$$

Questo fatto suggerisce la seguente strategia nel caso in cui $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$:

- Trovare i vettori v per quali

$$(A - \lambda I)^2 v = 0 \text{ e } (A - \lambda I) v \neq 0$$

Ogniuno di questi vettori porta ad una nuova soluzione indipendente:

$$e^{\lambda x} (v + x(A - \lambda I) v)$$

- Se ancora non abbiamo il numero di soluzioni sufficiente procediamo risolvendo per i vettori v tale che

$$(A - \lambda I)^3 v = 0 \text{ e } (A - \lambda I)^2 v \neq 0$$

Ogniuno di questi vettori porta ad una nuova soluzione indipendente:

$$e^{\lambda x} \left(v + x(A - \lambda I) v + \frac{(A - \lambda I)^2 x^2}{2!} v \right)$$

- ecc.

Esercizio 24' Trovare la soluzione generale dell sistema

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Risoluzione Nell'esercizio 24 abbiamo già trovato due soluzioni indipendenti. Ci manca un secondo vettore per $\lambda_1 = 1$.

Seguiamo la strategia indicata e cerchiamo soluzioni dell'equazione:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^2 v &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La soluzione ha due parametri che corrispondono a v_1 e v_2 e puo' essere scritta come la combinazione dei due vettori base:

$$v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ma il primo dei vettori è un autovettore e soddisfa $(A - \lambda I)v = 0$. Quindi, il vettore che ci serve è

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e ad esso viene associata la soluzione particolare:

$$\begin{aligned} e^x (v + x(A - \lambda I)v) &= \\ &= e^x \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= e^x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + xe^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi, la soluzione generale del sistema è

$$Y(x) = c_1 e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^x \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il caso di autovalori ed autovettori complessi

Se si cercano le soluzioni del sistema omogeneo lineare

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad A \in R^{n \times n}$$

sul campo dei numeri complessi, il caso di autovalori complessi viene affrontato come è stato descritto nelle sezioni precedenti, soltanto eseguendo i calcoli necessari con i numeri complessi. In particolare, Teorema 5 rimane valida anche se l'autovettore e l'autovalore siano complessi:

$$A \cdot v = \lambda v$$

dove

$$v = v^1 + i v^2, \quad v^1 - \text{parte reale}, v^2 - \text{parte immaginaria}$$

$$\lambda = \alpha + i \beta, \quad \alpha - \text{parte reale}, \beta - \text{parte immaginaria}$$

portano ad una soluzione complessa:

$$\begin{aligned} Y(x) &= e^{\lambda x} v = e^{\alpha x + i \beta x} (v^1 + i v^2) \\ &= e^{\alpha x} e^{i \beta x} (v^1 + i v^2) \\ &= e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) (v^1 + i v^2) \\ &= e^{\alpha x} (v^1 \cos(\beta x) - v^2 \sin(\beta x)) + \\ &\quad + i e^{\alpha x} (v^1 \sin(\beta x) + v^2 \cos(\beta x)) \\ &= Y_1(x) + i Y_2(x) \end{aligned}$$

Teorema 7 Se $Y(x) = Y_1(x) + i Y_2(x)$ è una soluzione complessa del sistema

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad A \in R^{n \times n}$$

allora $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ sono due sue soluzioni reali.

Dimostrazione

$$Y'(x) = (Y_1(x) + i Y_2(x))' = Y_1'(x) + i Y_2'(x)$$

$$A \cdot Y(x) = A \cdot (Y_1(x) + i Y_2(x)) = A \cdot Y_1(x) + i A \cdot Y_2(x)$$

Quindi uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dell'equazione otteniamo:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) \Rightarrow \begin{cases} Y_1'(x) = A \cdot Y_1(x) \\ Y_2'(x) = A \cdot Y_2(x) \end{cases},$$

cio'è $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ sono due sue soluzioni reali del sistema.

Corollario Ad ogni autovettore complesso $v = v^1 + i v^2$ con autovalore $\lambda = \alpha + i \beta$, possiamo associare due soluzioni reali linearmente indipendenti:

$$Y_1(x) = e^{\alpha x} (v^1 \cos(\beta x) - v^2 \sin(\beta x))$$

$$Y_2(x) = e^{\alpha x} (v^1 \sin(\beta x) + v^2 \cos(\beta x))$$

Osserviamo che l'autovalore coniugato $\bar{\lambda} = \alpha - i \beta$ ha come autovettori i vettori coniugati \bar{v} ; quindi $\bar{\lambda}$ non porta a nuovi soluzioni rispetto ad Y_1 e Y_2 .

Esempio 25 Risolvere il problema di Cauchy

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Risoluzione Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 5 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2.$$

Le due radici sono

$$\lambda_1 = -1 \pm i, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1$$

Autovettori associati a $\lambda_1 = -1 + i$:

$$(A - (-1 + i)I) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - i & -1 \\ 5 & -2 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (2 - i)v_1 - v_2 = 0 \\ 5v_1 + (-2 - i)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \frac{2 + i}{5} v_2$$

Quindi, il vettore base è

$$\begin{bmatrix} 2 + i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le due soluzioni reali sono:

$$Y_1(x) = e^{-x} \left(\cos x \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \sin x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$Y_2(x) = e^{-x} \left(\sin x \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \cos x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Abbiamo trovato due soluzioni linearmente indipendenti; possiamo così scrivere la soluzione generale in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} Y(x) &= c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) \\ &= c_1 e^{-x} \left(\cos x \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \sin x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad + c_2 e^{-x} \left(\sin x \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \cos x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Che scritto in termini di componenti diventa:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-x} ((2c_1 + c_2) \cos x + (2c_2 - c_1) \sin x) \\ y_2(x) &= 5e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali portano al seguente sistema per determinare le costanti:

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 1 \\ 5c_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-x} (\cos x - 3 \sin x) \\ y_2(x) &= 5e^{-x} (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Esercizi

1. Trovare la soluzione generale delle seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee:

$$(a) \begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y_1' = -7y_1 + 6y_3 \\ y_2' = 5y_2 \\ y_3' = 6y_1 + 2y_3 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

2. Trova la soluzione di ciascuno dei problemi di Cauchy:

$$(a) \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 2y_3 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = -y_2 - 2y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = -2 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 5 \end{cases}$$

Sistemi lineari non omogenei di primo ordine a coefficienti costanti

Un sistema di equazioni differenziali si chiama **lineare** se ciascuna funzione F_i è lineare nelle variabili y_i :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{1,1}(x)y_1 + \dots + a_{1,n}(x)y_n + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{2,1}(x)y_1 + \dots + a_{2,n}(x)y_n + b_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n,1}(x)y_1 + \dots + a_{n,n}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (29)$$

Diciamo che

- il sistema è **non omogeneo** se esiste i tale che $b_i(x) \neq 0$;
- il sistema è **a coefficienti costanti** se $a_{i,j}(x) = a_{i,j}$ sono dei costanti e non dipendono da x .

Un sistema non omogeneo puo' essere scritto nella forma matriciale:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x)$$

dove

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{bmatrix}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che secondo Teorema 4, la soluzione generale del sistema omogeneo :

$$Y'(x) = A \cdot Y(x),$$

è

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + \dots + c_n Y_n(x),$$

dove $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ sono n soluzioni particolari linearmente indipendenti del sistema. Tale soluzione può essere scritta nella forma matriciale come

$$Y(x) = \Upsilon(x) \cdot C,$$

dove $\Upsilon(x) = [Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)]$ è la soluzione fondamentale matriciale, cioè la matrice che ha come colonne i vettori $Y_i(x)$, mentre

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

è il vettore colonna che ha come componenti i costanti c_i .

Teorema 8 La soluzione generale del sistema non omogeneo

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x).$$

è

$$Y(x) = \Upsilon(x) \cdot C + \Psi(x),$$

dove $\Upsilon(x) \cdot C$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato, e $\Psi(x)$ è una soluzione particolare del sistema non omogeneo.

Metodo della variazione delle costanti per trovare la soluzione particolare $\psi(x)$

Sia $\Upsilon(x) \cdot C$ la soluzione generale del sistema omogeneo:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x).$$

Allora cerchiamo la soluzione particolare del sistema non omogeneo nella forma

$$\Psi(x) = \Upsilon(x) \cdot U(x), \quad U(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \dots \\ u_n(x) \end{bmatrix}$$

che è ottenuta da $\Upsilon(x) \cdot C$, sostituendo il vettore delle costanti C con il vettore $U(x)$ che ha come componenti le funzioni $u_i(x)$.

Teorema 9 $\Psi(x) = \Upsilon(x) \cdot U(x)$ è una soluzione particolare del sistema non omogeneo

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x)$$

se e sole se

$$U(x) = \int \Upsilon^{-1}(x) \cdot B(x) dx.$$

Dimostrazione Per ipotesi, $\Upsilon(x) \cdot C$ è una soluzione del sistema omogeneo per ogni vettore C ; quindi se prendiamo come vettori C le colonne della matrice d'Identità I otteniamo

$$(\Upsilon(x) \cdot I)' = A \cdot \Upsilon(x) \cdot I \Rightarrow \Upsilon'(x) = A \cdot \Upsilon(x)$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= \Upsilon'(x) \cdot U(x) + \Upsilon(x) \cdot U'(x) \\ &= A \cdot \Upsilon(x) \cdot U(x) + \Upsilon(x) \cdot U'(x) \\ &= A \cdot \Psi(x) + \Upsilon(x) \cdot U'(x). \end{aligned}$$

Quindi

$$\Psi'(x) = A \cdot \Psi(x) + B(x) \Leftrightarrow \Upsilon(x) \cdot U'(x) = B(x).$$

Ricordiamo che secondo il Teorema 3, le colonne della matrice $\Upsilon(x)$ sono linearmente indipendenti per ogni valore di x ; quindi per ogni x la matrice è invertibile, e possiamo risolvere l'equazione sopra per $U'(x)$

$$U'(x) = \Upsilon^{-1}(x) \cdot B(x) \Rightarrow U(x) = \int \Upsilon^{-1}(x) \cdot B(x) dx.$$

Calcolo della matrice inversa

La matrice quadrata

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

si chiama invertibile o non singolare, se esiste una matrice A^{-1} tale che

$$A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$$

Allora A^{-1} si chiama la matrice inversa di A ed è unica.

A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Il *complemento algebrico* A_{ij} del elemento a_{ij} di A , si definisce come il determinante della sottomatrice ottenuta da A cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna e moltiplicata per $(-1)^{i+j}$.

Si può provare che la matrice inversa di A è uguale a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1,n} & A_{2,1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Nel caso di una matrice 2×2 otteniamo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

Esempio 26. Trovare la soluzione generale del sistema

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 12y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) + e^x \end{cases}$$

Risoluzione Nella forma matriciale il sistema può essere scritto come $Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x)$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^x \end{bmatrix}$$

In Esercizio 24' abbiamo già trovato la soluzione generale del sistema omogeneo

$$c_1 e^{-5x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{7x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cioè la soluzione fondamentale matriciale è:

$$\Upsilon(x) = \begin{bmatrix} -2e^{-5x} & 2e^{7x} \\ e^{-5x} & e^{7x} \end{bmatrix}$$

$$\det \Upsilon(x) = -2e^{-5x}e^{7x} - 2e^{7x}e^{-5x} = -4e^{2x}$$

$$\Upsilon^{-1}(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} \begin{bmatrix} e^{7x} & -2e^{7x} \\ -e^{-5x} & -2e^{-5x} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{5x} & 2e^{5x} \\ e^{-7x} & 2e^{-7x} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon^{-1}(x) \cdot B(x) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{5x} & 2e^{5x} \\ e^{-7x} & 2e^{-7x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^x \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{5x} + 2e^{6x} \\ e^{-7x} + 2e^{-6x} \end{bmatrix}$$

$$U(x) = \frac{1}{4} \int \begin{bmatrix} -e^{5x} + 2e^{6x} \\ e^{-7x} + 2e^{-6x} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \int (-e^{5x} + 2e^{6x}) dx \\ \frac{1}{4} \int (e^{-7x} + 2e^{-6x}) dx \end{bmatrix}$$

$$U(x) = \begin{bmatrix} -\frac{e^{5x}}{20} + \frac{e^{6x}}{12} \\ -\frac{e^{-7x}}{28} - \frac{e^{-6x}}{12} \end{bmatrix}$$

Per la soluzione particolare dell'equazione non omogenea otteniamo:

$$\Psi(x) = \Upsilon(x) \cdot U(x) = \begin{bmatrix} -2e^{-5x} & 2e^{7x} \\ e^{-5x} & e^{7x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{e^{5x}}{20} + \frac{e^{6x}}{12} \\ -\frac{e^{-7x}}{28} - \frac{e^{-6x}}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} - \frac{e^x}{6} - \frac{1}{14} - \frac{e^x}{6} \\ -\frac{1}{20} + \frac{e^x}{12} - \frac{1}{28} - \frac{e^x}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{35} - \frac{e^x}{3} \\ -\frac{3}{35} \end{bmatrix}$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$Y(x) = c_1 e^{-5x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{7x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{35} - \frac{e^x}{3} \\ -\frac{3}{35} \end{bmatrix},$$

che scritta in termini di componenti diventa:

$$y_1(x) = -2c_1 e^{-5x} + 2c_2 e^{7x} + \frac{1}{35} - \frac{e^x}{3}$$

$$y_2(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{7x} - \frac{3}{35}$$

Esercizi

Trovare la soluzione generale delle seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari non omogenee:

$$1. \begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - x \\ y_2' = -2y_1 + y_2 + t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2 + \cos x \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

Teoria qualitativa delle equazioni differenziali

Dato un sistema arbitrario di equazioni differenziali di ordine uno, in generale noi non sappiamo risolverlo neanche quando il numero di equazioni è soltanto due:

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(t, x, y) \\ y'(t) = F_2(t, x, y) \end{cases} .$$

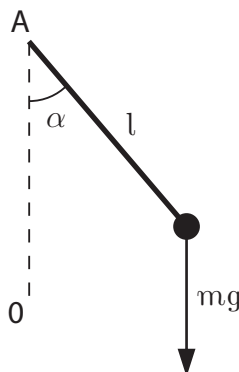
Vogliamo almeno descrivere qualitativamente lo spazio delle soluzioni, rispondendo ad alcune domande importanti per le applicazioni. Nelle applicazioni spesso la variabile indipendente x corrisponde al tempo e quindi abbiamo cambiato notazione:

$$x = t \quad (\text{tempo}),$$

mentre $x(t)$ e $y(t)$ descrivano l'evoluzione di diverse grandezze fisiche o dei parametri di un sistema biologico, sociale o economico con il tempo.

Esempi

1. Se le equazioni esprimono le leggi che governano l'interazione tra due specie diverse che convivono in un ambiente naturale, $x(t)$ e $y(t)$ corrispondono alle due popolazioni nell'istante di tempo t ;
2. Il sistema meccanico presentato nel disegno consiste in un punto materiale di massa m collegato ad un'asta rigida (di massa 0) che può ruotare nel piano intorno al punto A .



L'equazione di moto, cioè l'uguaglianza della variazione del momento della quantità del moto e il momento della forza peso, ci porta al seguente equazione differenziale di secondo ordine:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \alpha(t)$$

L'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) \end{cases}, \quad (30)$$

dove $x(t) = \alpha(t)$, mentre $x'(t) = \alpha'(t)$ è la velocità angolare del punto.

Domande a quale vogliamo rispondere

Domanda 1 Esistono soluzioni costanti per il nostro sistema:

$$x(t) = \xi_1, \quad y(t) = \xi_2?$$

In Esempio 1 tale soluzione corrisponderebbe al fatto che le due popolazioni non cambiano con il tempo: nessuna di loro cresce o diminuisce, ossia si trovano in equilibrio una con l'altra.

In Esempio 2 la soluzione costante significherebbe che il punto materiale si trova in stato d'equilibrio ossia la sua posizione e la sua velocità non cambiano con il tempo.

Definizione Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(t, x, y) \\ y'(t) = F_2(t, x, y) \end{cases}, \quad (31)$$

Una coppia ordinata di valori (ξ_1, ξ_2) si chiama **punto d'equilibrio** o **punto fisso** del sistema se

$$x(t) = \xi_1, \quad y(t) = \xi_2$$

è una sua soluzione costante.

Proposizione Una coppia ordinata di valori (ξ_1, ξ_2) è un punto fisso del sistema di equazioni differenziali (31) se e solo se è una soluzione del sistema algebrico:

$$\begin{cases} F_1(t, x, y) = 0 \\ F_2(t, x, y) = 0 \end{cases}, \quad (32)$$

cioè $F_1(t, \xi_1, \xi_2) = 0$ e $F_2(t, \xi_1, \xi_2) = 0$.

Dimostrazione: Supponiamo per primo che (ξ_1, ξ_2) è un punto fisso, cioè

$$x(t) = \xi_1, \quad y(t) = \xi_2$$

è una soluzione costante del sistema (31). Allora

$$x'(t) = 0, \quad y'(t) = 0$$

e sostituendo nel sistema (31) otteniamo che

$$\begin{cases} 0 = F_1(t, \xi_1, \xi_2) \\ 0 = F_2(t, \xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

D'altra parte se $F_1(t, \xi_1, \xi_2) = 0$ e $F_2(t, \xi_1, \xi_2) = 0$ ovviamente le due funzioni costanti $x(t) = \xi_1$ e $y(t) = \xi_2$ soddisfano il sistema (31).

Quindi, possiamo trovare i punti d'equilibrio del pendolo:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\frac{g}{l} \sin x = 0 \end{cases},$$

Abbiamo due soluzioni: $P_1(0, 0)$ e $P_2(\pi, 0)$.

Domanda 2 Se il sistema subisce una piccola perturbazione ed esce dallo stato d'equilibrio, con passare del tempo tornerà a questo stato o si allontanerà di esso? Cioè vogliamo analizzare se i punti d'equilibrio trovati sono punti d'equilibrio stabili o instabili.

Nell' Esempio 2, $P_1(0, 0)$ è un punto stabile, mentre $P_2(\pi, 0)$ è instabile.

Una importante generalizzazione di Domanda 2 é la seguente: come cambia la soluzione di un problema di Cauchy se la condizione iniziale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ subisce una piccola perturbazione? Se anche la soluzione subisce una perturbazione "piccola", parliamo di *soluzione stabile*, altrimenti – di *soluzione instabile*.

Domanda 3 Cominciando con valori iniziali

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

arbitrari, vogliamo sapere il *comportamento asintotico* del sistema, cioè che cosa succede quando $t \rightarrow \infty$. Il sistema si avvicinerà ad un punto d'equilibrio o magari ad una soluzione periodica?

Possiamo rispondere in modo soddisfacente a queste domande soltanto se la parte destra del sistema non dipende in modo esplicito dal tempo t , cioè ci concentriamo sui sistemi del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(x, y) \\ y'(t) = F_2(x, y) \end{cases},$$

detti **sistemi autonomi**.

Analisi qualitativa delle soluzioni di un'equazione differenziale di primo ordine (sistema uno-dimensionale)

Esempio 26 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$x'(t) = \sin x, \quad x(0) = x_0$$

Risoluzione L'equazione è a variabili separabili:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln |\tan(x/2)| = t + C$$

Ponendo le condizioni iniziali abbiamo:

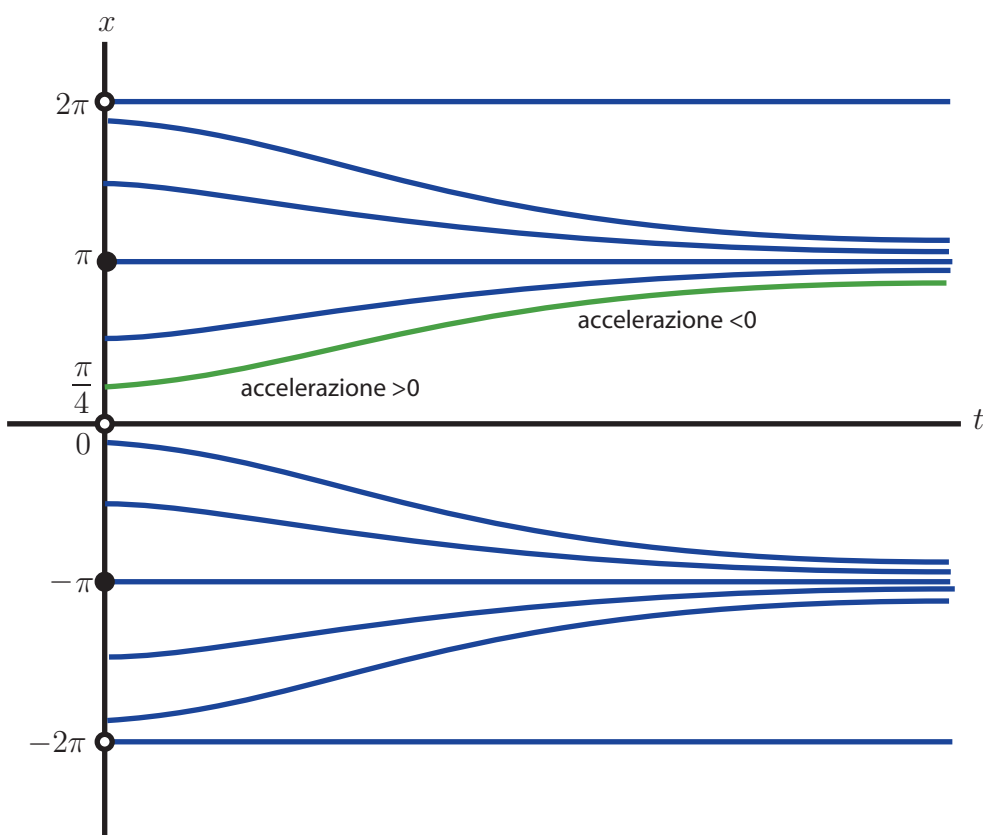
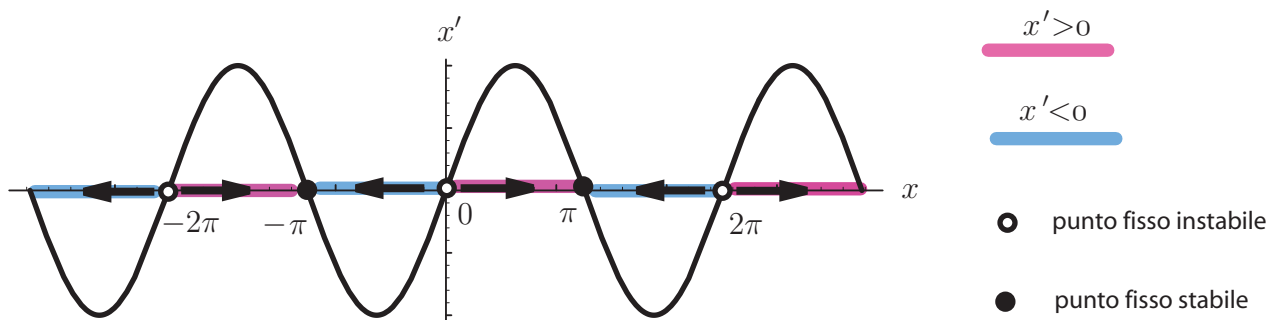
$$\ln \left| \frac{\tan(x/2)}{\tan(x_0/2)} \right| = t$$

Supponiamo adesso che l'equazione descrive il movimento di una particella e che la sua posizione iniziale è

$$x_0 = \pi/4.$$

Vogliamo sapere dove si troverà la particella quando $t \rightarrow \infty$. La soluzione esplicita non aiuta. Proviamo approccio grafico:

- rappresentiamo la velocità $x'(t) = \sin x$ della particella come un **campo vettoriale** sulla retta delle x ;
- individuiamo i punti fissi: $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$
- partendo dal punto iniziale, guardiamo dove ci porta il **flusso** del campo.



Osserviamo che le traiettorie non si intersecano mai perchè l'equazione soddisfa le condizioni di esistenza e unicità: infatti, se per assurdo ipotizziamo che due traiettorie si intersecano e prendiamo il punto d'intersezione come punto iniziale, da esso partirebbero due soluzioni diverse che contraddirebbe l'unicità della soluzione.

Le stesse considerazioni possiamo fare per una qualsiasi equazione di primo ordine

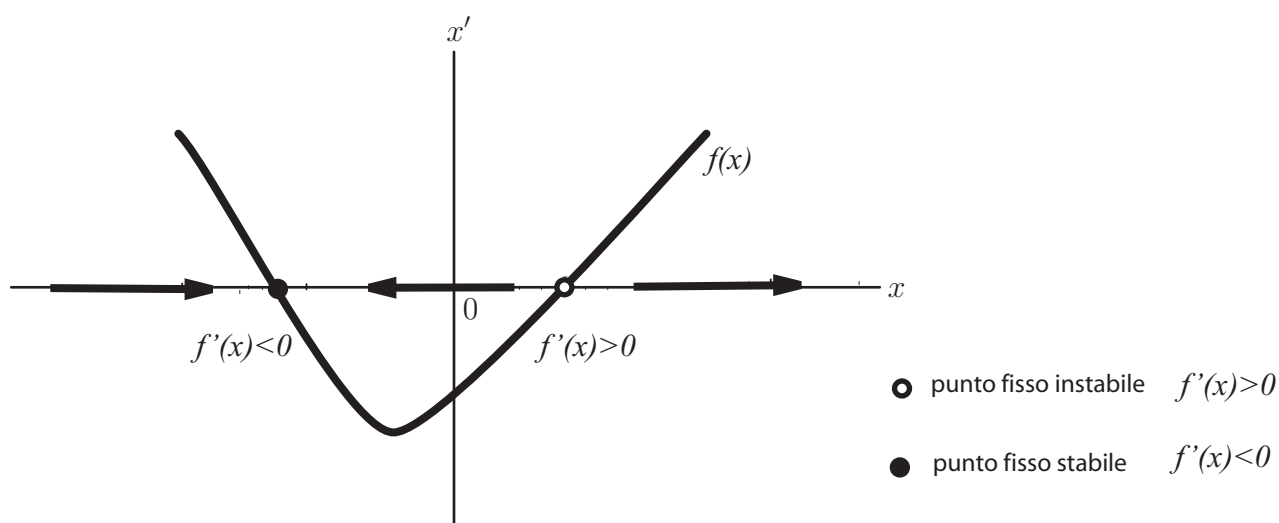
$$x'(t) = f(x)$$

Per analizzare l'insieme delle sue soluzioni

- rappresentiamo il **campo vettoriale** sulla retta delle x ;
- individuiamo i punti fissi:

$$f(x) = 0$$

- partendo da un punto iniziale, guardiamo dove ci porta il **flusso** del campo.



Analisi quantitativa dei punti fissi - linearizzazione

Sia x^* un punto fisso dell'equazione:

$$x'(t) = f(x), \quad f(x^*) = 0.$$

Sia $\eta(t) = x(t) - x^*$ una piccola perturbazione nell'intorno del punto fisso. Per vedere se il punto fisso è stabile o no dobbiamo analizzare se questa perturbazione decade o cresce con il tempo.

$$\eta'(t) = x'(t) = f(x) = f(\eta + x^*).$$

Dallo sviluppo di f con la formula di Taylor in un intorno di x^* otteniamo:

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + f'(x^*)\eta + O(\eta^2)$$

Poichè $f(x^*) = 0$, trascurando il termine $O(\eta^2)$ otteniamo:

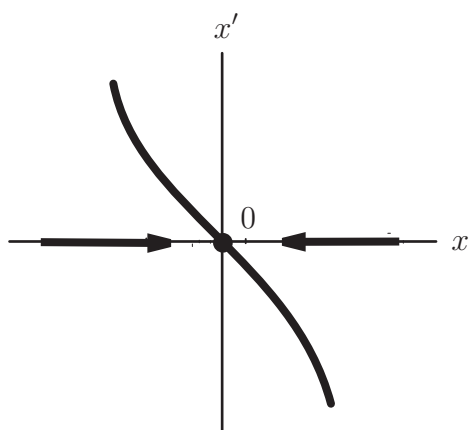
$$\eta'(t) = f'(x^*)\eta \Rightarrow \eta(t) = e^{f'(x^*)t}$$

Concludiamo che:

- se $f'(x^*) > 0$ la perturbazione cresce esponenzialmente, quindi x^* è punto fisso instabile; $|f'(x^*)|$ determina la velocità di crescita;
- se $f'(x^*) < 0$ la perturbazione decade esponenzialmente, quindi x^* è punto fisso stabile; $|f'(x^*)|$ determina la velocità di decadimento;

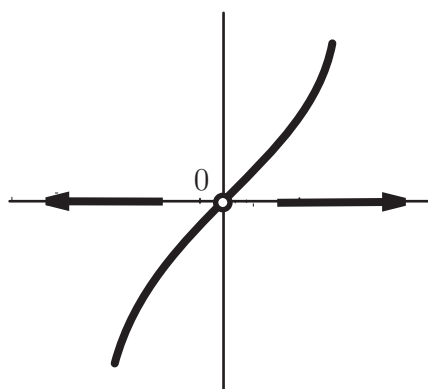
- se $f'(x^*) = 0$ ci sono diverse possibilità:

$$x'(t) = -x^3$$



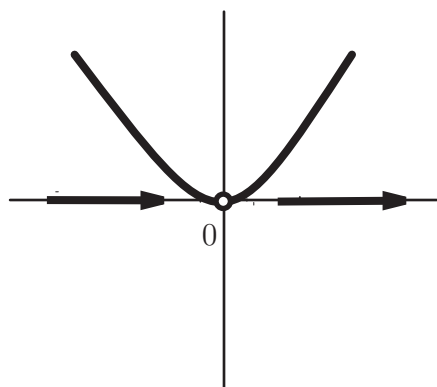
punto fisso stabile

$$x'(t) = x^3$$



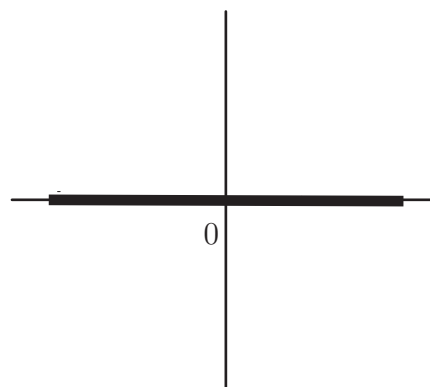
punto fisso instabile

$$x'(t) = x^2$$



punto fisso stabile a metà

$$x'(t) = 0$$



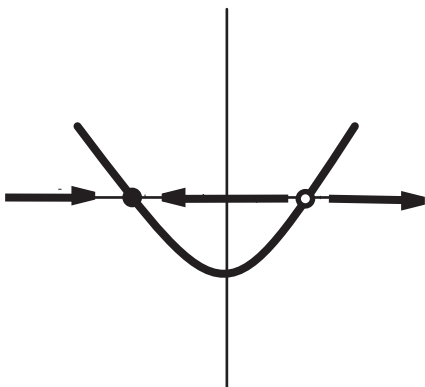
linea di punti fissi

Biforcazioni

Se nel nostro equazione compare un parametro, i cambiamenti dei valori di tale parametro possono portare alla apparizione di nuovi punti critici o alla distruzione dei punti esistenti. Tali cambiamenti nel quadro delle soluzioni si chiamano **biforcazioni** e i valori del parametro per i quali vengono osservati si chiamano **punti di biforcazione**.

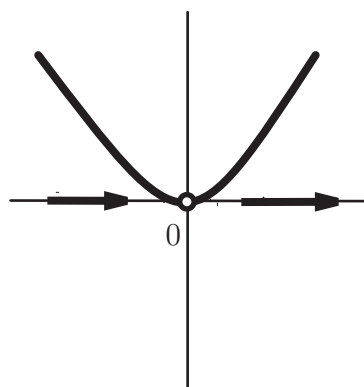
Biforcazione sella-nodo in $r = 0$
distruzione di una copia di un punto stabile e uno instabile

$$x'(t) = x^2 + r, \quad r < 0$$



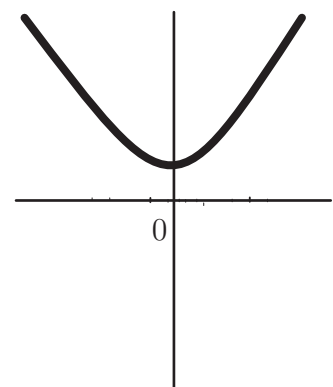
un punto fisso stabile e
un punto fisso instabile

$$x'(t) = x^2$$

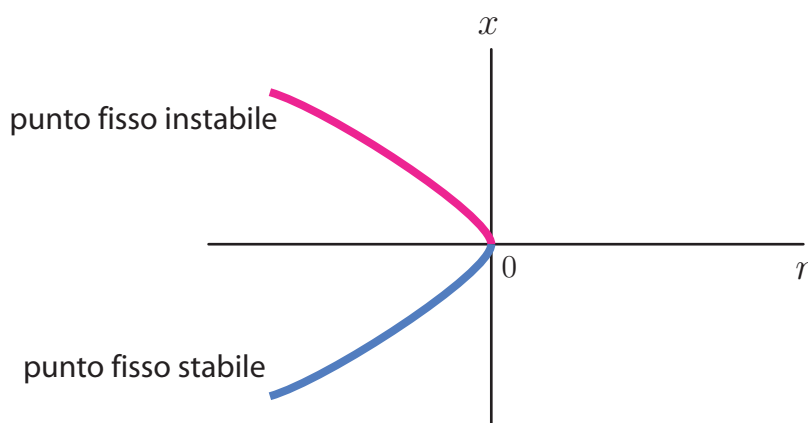


punto fisso stabile a metà

$$x'(t) = x^2 + r, \quad r > 0$$

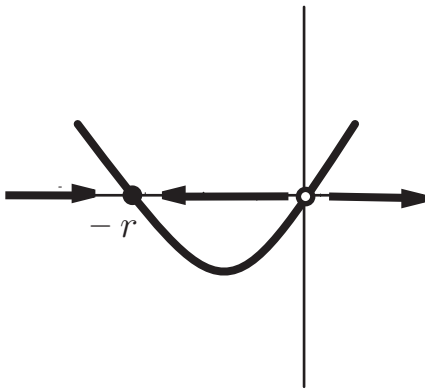


non ci sono punti fissi



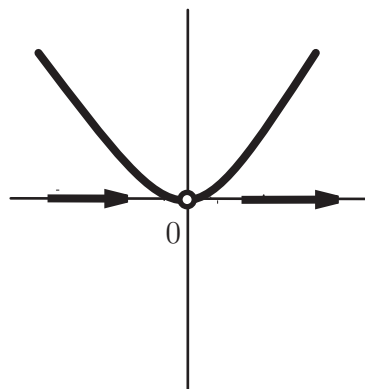
Biforcazione transcritica in $r = 0$
 scambio di stabilità tra due punti fissi

$$x'(t) = x^2 + x \quad r, r > 0$$



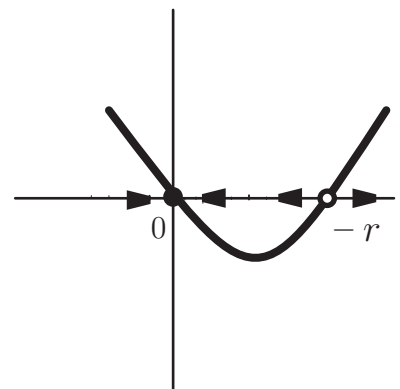
un punto fisso stabile e
 un punto fisso instabile

$$x'(t) = x^2$$

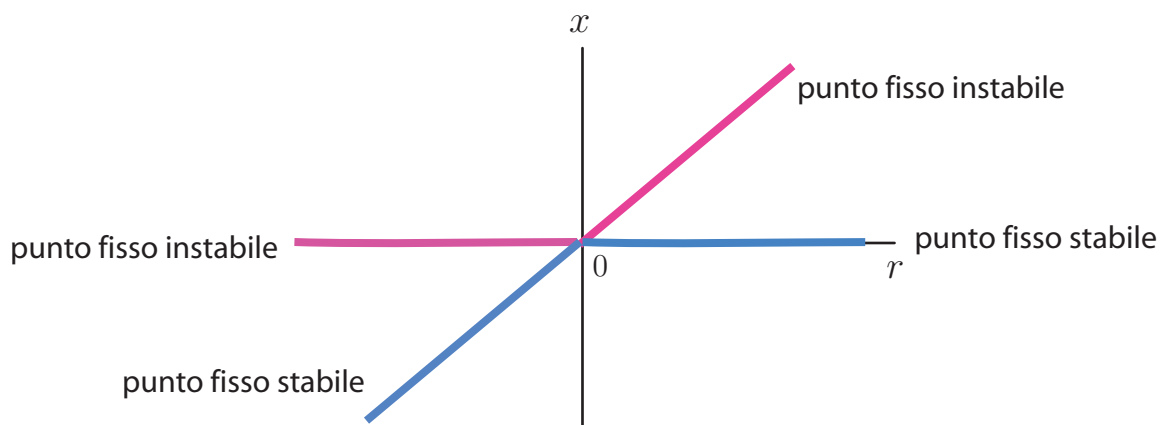


punto fisso stabile a metà

$$x'(t) = x^2 + rx, \quad r < 0$$

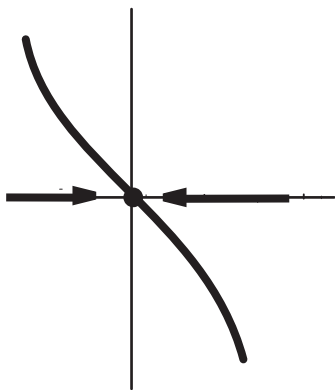


un punto fisso stabile e
 un punto fisso instabile



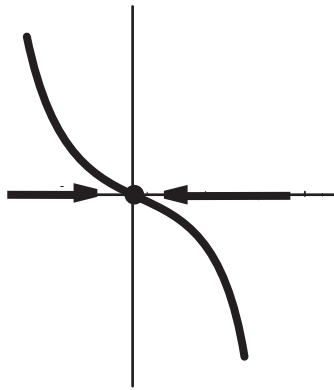
Biforcazione a forchetta supercritica in $r = 0$
 apparizione due punti fissi stabili
 e la trasformazione di uno stabile in instabile

$$x'(t) = rx - x^3 \quad r < 0$$



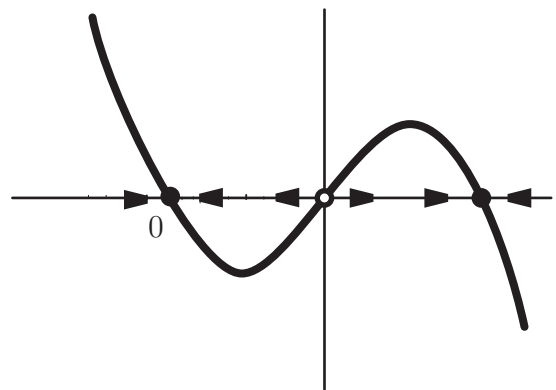
un punto fisso stabile

$$x'(t) = x^3 \quad r = 0$$

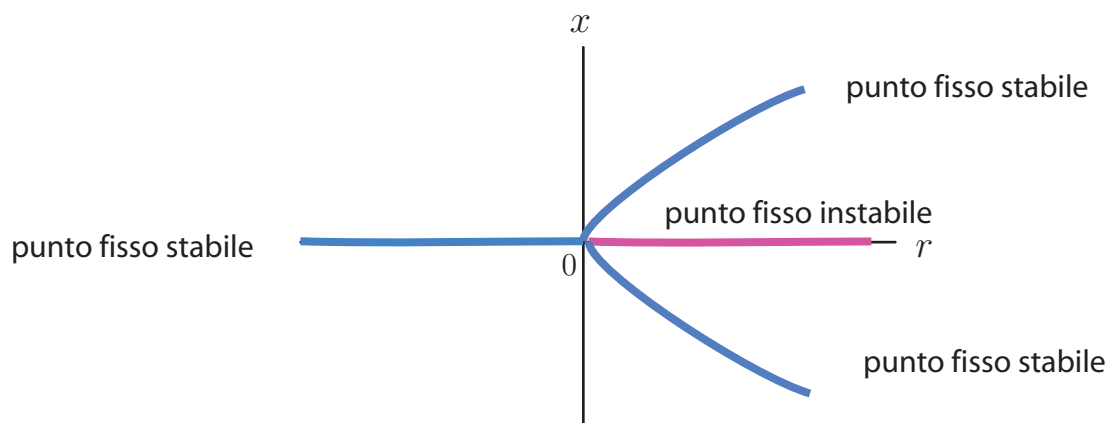


punto fisso stabile

$$x'(t) = rx - x^3, \quad r > 0$$



due punti fissi stabili e
 un punto fisso instabile



Analisi qualitativa delle soluzioni di un sistema autonomo di due equazioni di primo ordine
(sistema bi-dimensionale)

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(x, y) \\ y'(t) = F_2(x, y) \end{cases},$$

Descriveremmo le soluzioni del sistema nello spazio xy , detto *spazio delle fasi*. In particolare, la soluzione $(x(t), y(t))$ del problema di Cauchy con condizione iniziale $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ rappresenta una curva (orbita) nello spazio delle fasi che comincia nel punto (x_0, y_0) . Con una freccia indichiamo il verso in quale si muove il punto $(x(t), y(t))$ sull'orbita a crescere del tempo t .

Definizione Sia $P = (\xi_1, \xi_2)$ un punto fisso del sistema autonomo.

(a) P si chiama **attrattore** se tutte le orbite che cominciano nelle vicinanze di P tendono a P per $t \rightarrow \infty$; cioè esiste $\delta > 0$ tale che se $\|(x_0 - \xi_1, y_0 - \xi_2)\| < \delta$,

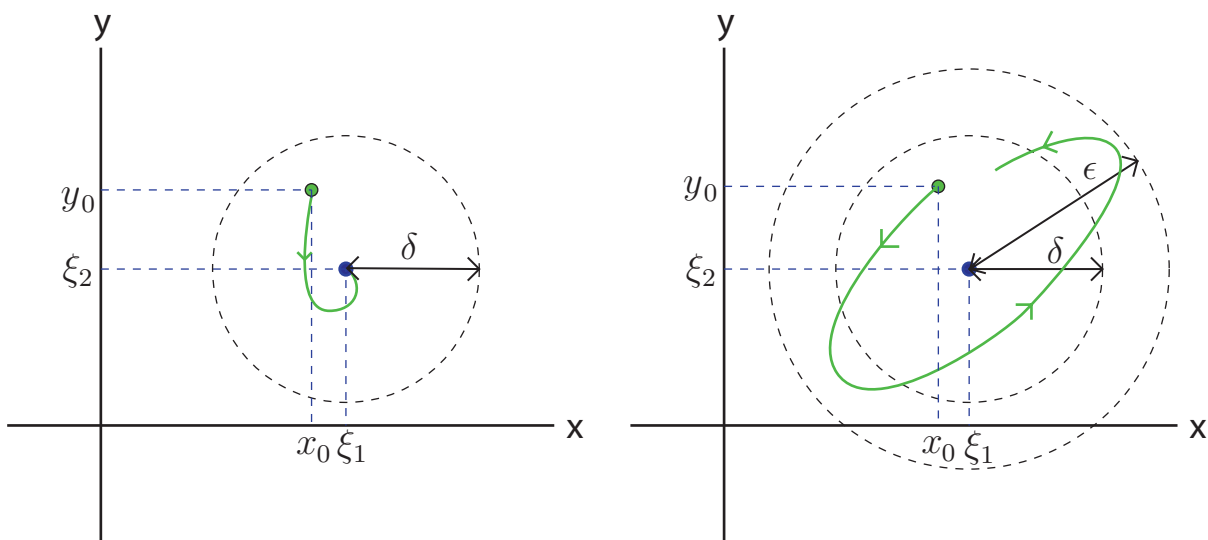
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0).$$

(b) P si chiama **stabile** se tutte le orbite che cominciano nelle vicinanze di P non si allontanano mai troppo da P ; cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|(x_0 - \xi_1, y_0 - \xi_2)\| < \delta$, allora

$$\|(x(t) - \xi_1, y(t) - \xi_2)\| < \epsilon \quad \text{per ogni } t > 0.$$

(c) P si chiama **asintoticamente stabile** se è stabile ed è anche un attrattore;

(d) P si chiama **instabile** se non è ne' un attrattore ne' stabile;



Classificazione dei punti fissi di un sistema lineari

Sia dato un sistema di equazioni differenziali lineari di ordine uno:

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by \\ y'(t) = cx + dy \end{cases}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ricordiamo che per risolvere il sistema dobbiamo trovare le autovalori della matrice A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb) = 0.$$

L'equazione per gli autovalori può essere scritta nella forma

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0,$$

dove $\tau = a+d$ è la traccia della matrice A , mentre $\delta = ad - cb$ è la sua determinante. Allora gli autovalori sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

Indichiamo con λ_1 l'autovalore minore in valore assoluto:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$$

Adesso dobbiamo considerare i seguenti casi:

Caso 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. In questo caso $\tau = \delta = 0$.

(a) Se la matrice A è nulla; il sistema diventa:

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 \\ y(t) = C_2 \end{cases};$$

quindi, $x(t)$ e $y(t)$ sono costanti e ogni punto è punto fisso (se nel momento $t = 0$ il sistema si trova in un punto, rimane per sempre in esso).

(b) Se la matrice A non è nulla, deve essere nella forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \quad \det A = -a^2 - bc = 0.$$

Per trovare i punti fissi dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by = 0 \\ y'(t) = cx - ay = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x \quad (\text{se } b \neq 0)$$

Quindi, abbiamo una retta di punti fissi. Questa retta coincide con l'autospazio dell'autovalore $\lambda = 0$, cioè $v^1 = (b, -a)$. Abbiamo per la prima soluzione:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_1 = c_1 \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \quad (\text{soluzione costante: p.f.})$$

Osserviamo che la molteplicità algebrica di $\lambda = 0$ è 2, mentre la sua molteplicità geometrica è 1. Tenendo conto che

$$(A - \lambda I)^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

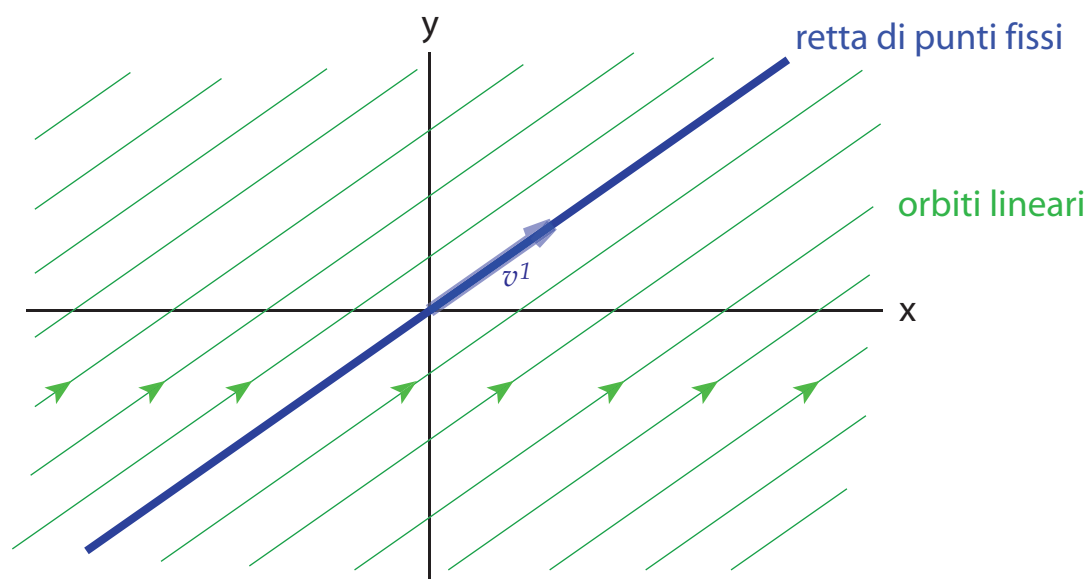
il sistema $(A - \lambda I)^2 v = 0$ ha come soluzioni tutti i vettori e quindi, vettore v^2 può essere scelto di essere un vettore qualsiasi indipendente da v^1 . Scegliamo $v^2 = (b, 0)$. Applicando la formula on p.99, otteniamo per la seconda soluzione:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_2 = v^2 + t(A - \lambda I)v^2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} + at \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

Quindi, la soluzione generale del sistema di eq.differenziali è:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2 at) \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, per avere una soluzione che non è costante, dobbiamo avere che $c_2 \neq 0$. In questo caso l'orbita è una retta parallela all'autospazio:



$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 \quad m_g(\lambda_1) = 1$$

Caso 2: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \tau$ In questo caso $\delta = 0$ e $\tau \neq 0$.

Per trovare i punti fissi dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by = 0 \\ y'(t) = cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x \text{ (se } b \neq 0)$$

Essendo $\det A = 0$ abbiamo una retta di punti fissi. Questa retta coincide con l'autospazio dell'autovalore $\lambda_1 = 0$, cioè i vettori multipli di $v^1 = (b, -a)$. Sia v^2 l'autovettore di λ_2 ; allora la soluzione generale del sistema è

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 v^1 + c_2 e^{\tau t} v^2$$

Osserviamo che nel momento iniziale $t = 0$

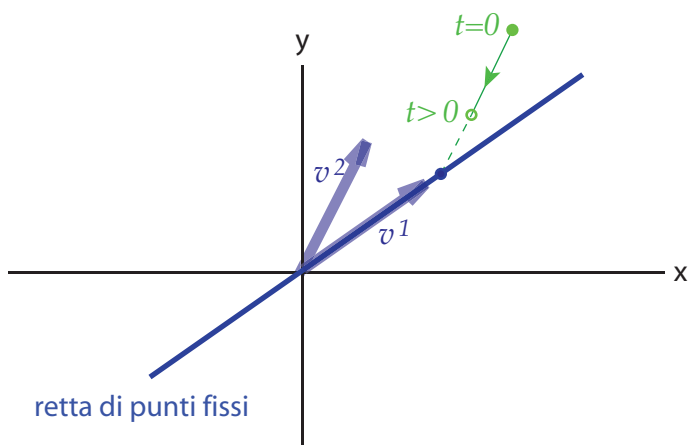
$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = c_1 v^1 + c_2 v^2;$$

poi con crescere del t , se $\tau > 0$ il punto $(x(t), y(t))$ si allontana dalla retta di punti fissi nella direzione del vettore v^2 . Se, invece $\tau < 0$, $(x(t), y(t))$ si avvicina a tale retta, seguendo sempre la direzione di v^2 :

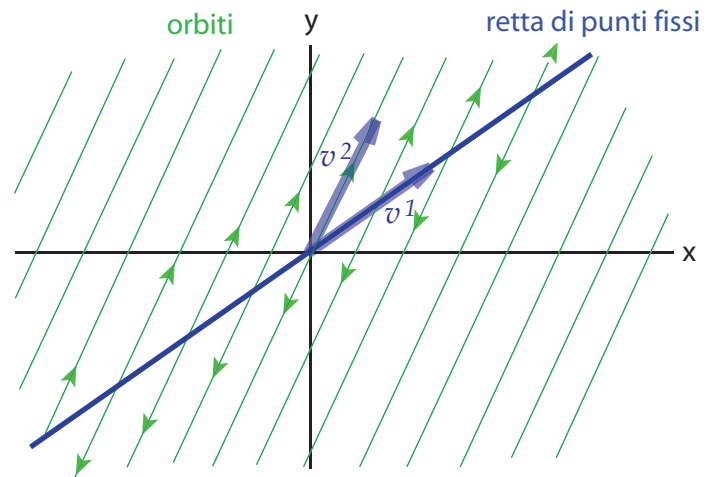
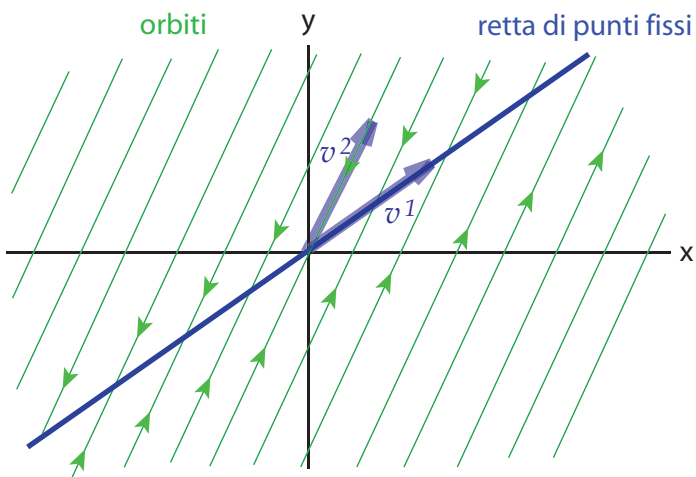
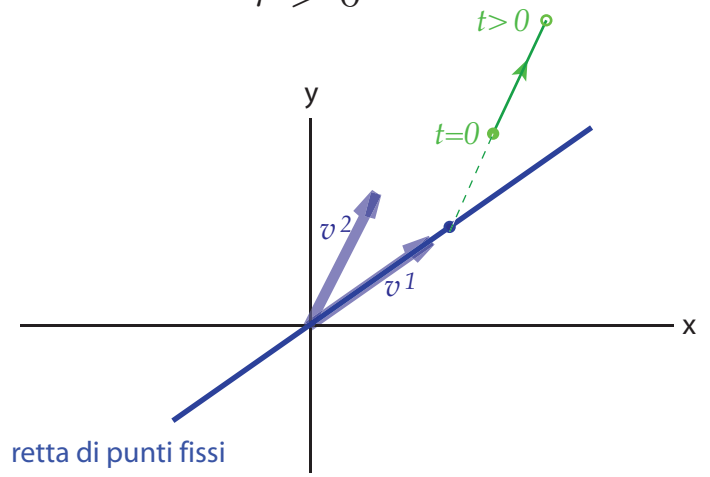
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 v^1 + c_2 e^{\tau t} v^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c_1 v^1, \quad \text{se } \tau < 0$$

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 \quad m_g(\lambda_1) = 2 \quad (\text{retta di punti fissi})$$

$$\tau < 0$$



$$\tau > 0$$



Caso 3: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **reali e** $\neq 0$ In questo caso $\tau^2 - 4\delta > 0$ e $\delta \neq 0$. Per trovare i punti fissi dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by = 0 \\ y'(t) = cx + dy = 0 \end{cases}$$

Essendo $\det A = \delta \neq 0$ abbiamo soltanto la soluzione nulla: $x = 0$ e $y = 0$. Siano v^1 e v^2 gli autovettori di λ_1 e λ_2 ; allora la soluzione generale del sistema è

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2$$

Analizziamo la famiglia di soluzioni con condizione iniziale:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \alpha v^1, \Rightarrow c_1 = \alpha, c_2 = 0$$

La soluzione particolare del problema di Cauchy è:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha e^{\lambda_1 t} v^1$$

Quindi, se nel momento iniziale $(x(0), y(0))$ giace sulla retta determinata da v^1 (l'autospazio di λ_1), allora per ogni t il punto $(x(t), y(t))$ giace su tale retta e se $\lambda_1 > 0$ con crescere di t esso si allontana dall'origine, mentre se $\lambda_1 < 0$ si avvicina:

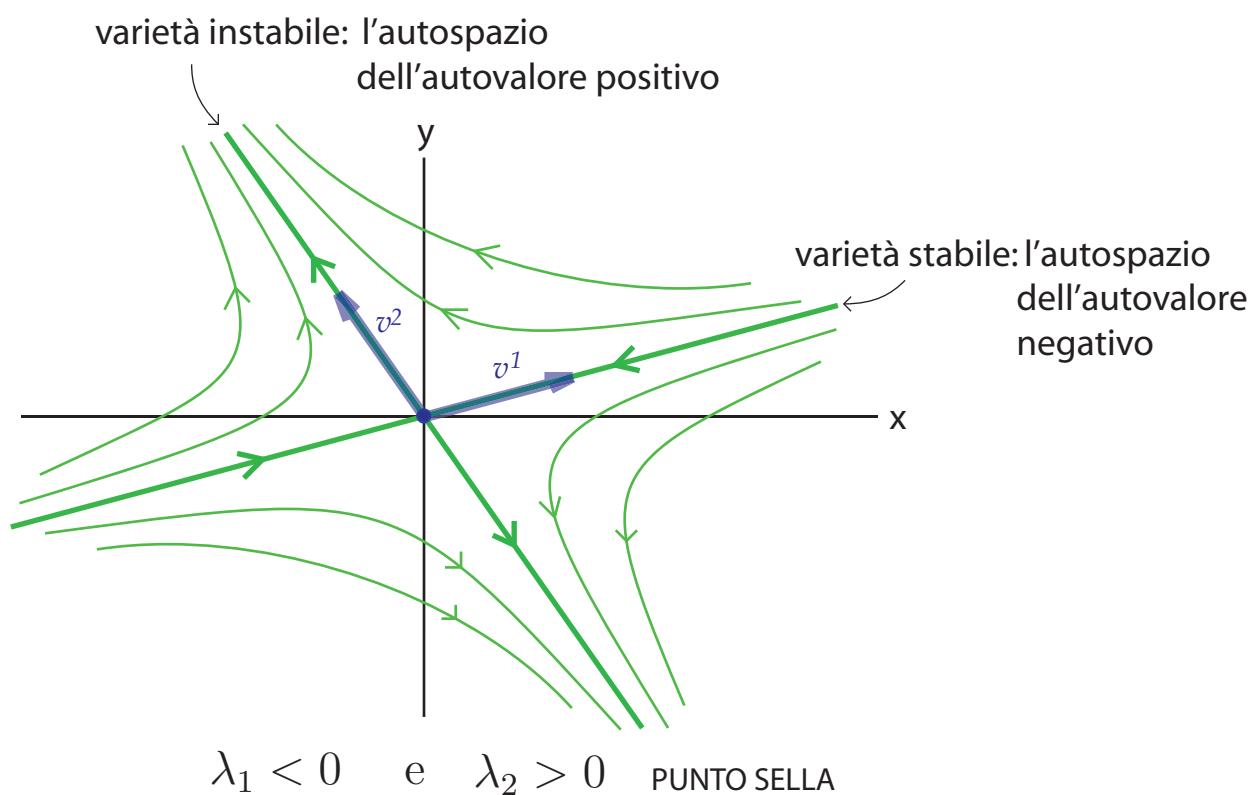
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha e^{\lambda_1 t} v^1 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{se } \lambda_1 < 0$$

La situazione è analoga quando nel momento iniziale il punto $(x(0), y(0))$ giace sulla retta determinata da v^2 ; allora per ogni t il punto $(x(t), y(t))$ giace su tale retta e se $\lambda_2 > 0$ con crescere di t esso si allontana dall'origine, mentre se $\lambda_2 < 0$ si avvicina.

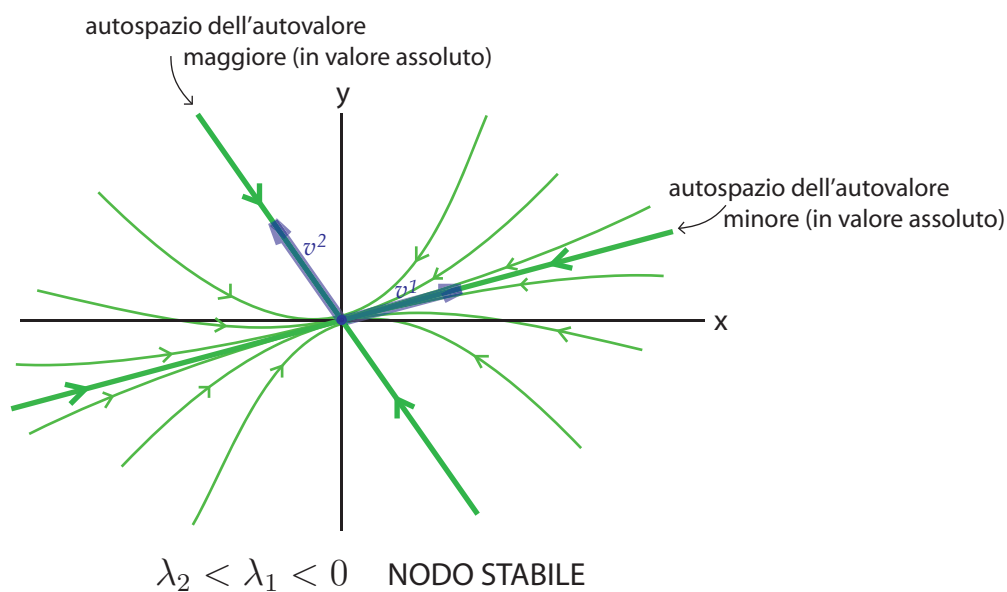
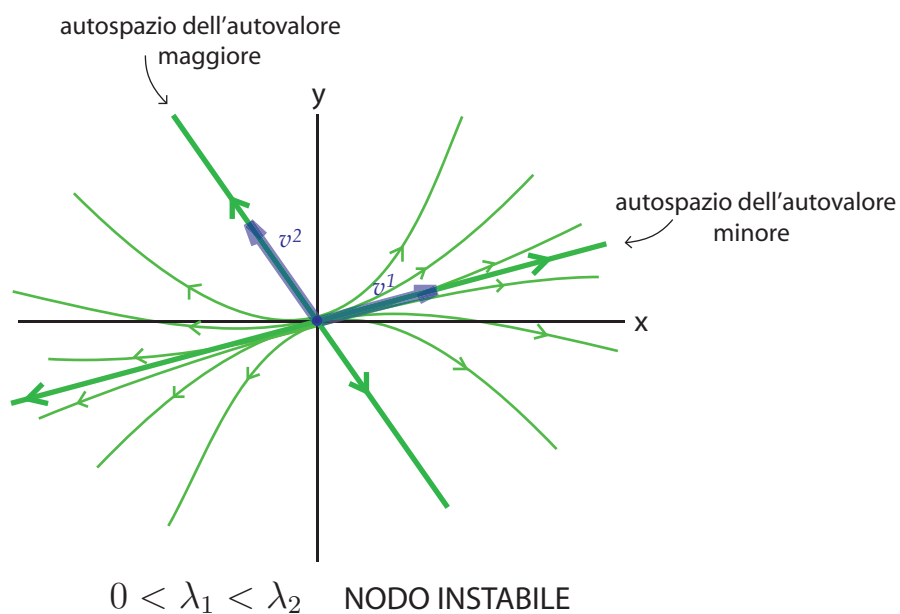
Concludiamo che se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono reali e $\neq 0$, le orbite che cominciano su un'autospazio, sono tutte contenute in tale autospazio e si allontanano (avvicinano) dall'origine se $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

La forma delle orbite che cominciano fuori degli autospazi dipende dal fatto se λ_1 e λ_2 sono concordi o discordi (in segno)

(a) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$; in questo caso $\delta < 0$.



(b) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$; in questo caso $\delta > 0$.



Osserviamo che vicino all'origine le orbite sono tangenti all'autospazio dell'autovalore minore, che si chiama *autodirezione lenta*; mentre l'autospazio dell'autovalore maggiore si chiama *autodirezione veloce*.

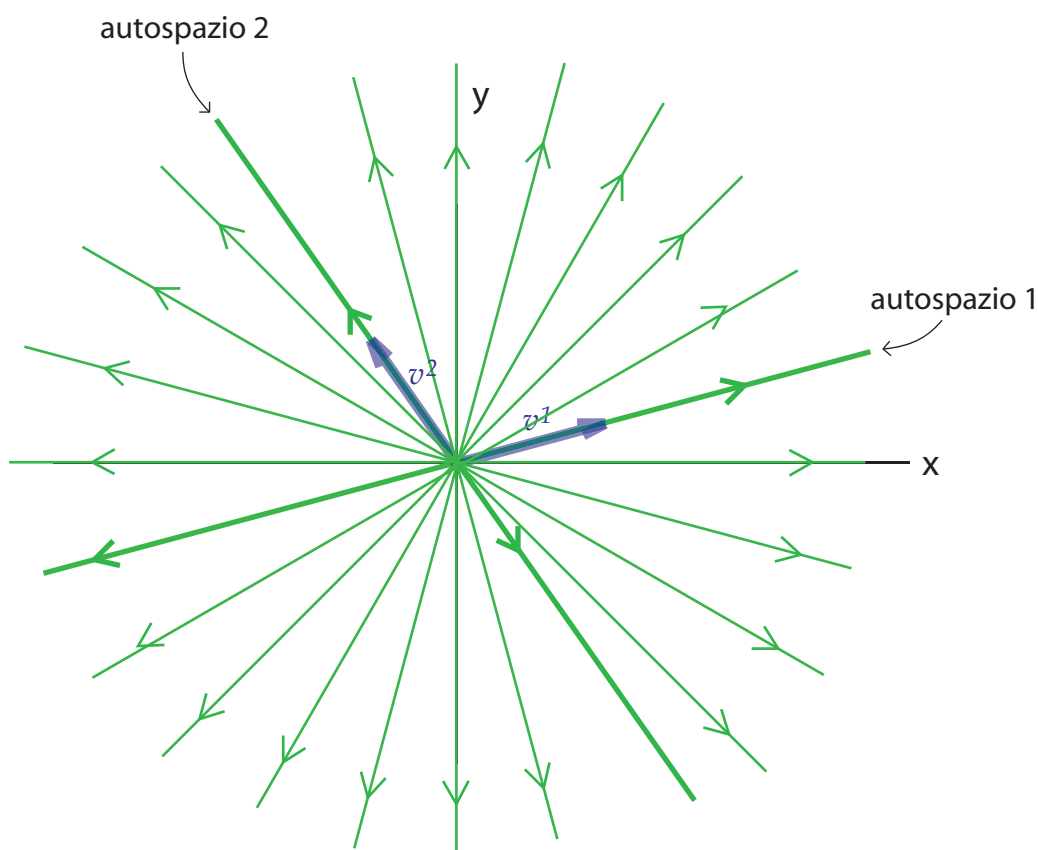
Caso 4: $\lambda_1 = \lambda_2$ **reali e** $\neq 0$; in questo caso $\tau^2 - 4\delta = 0$ e $\delta \neq 0$.

Essendo $\delta \neq 0$ abbiamo di nuovo un'unico punto fisso: $(0,0)$. La soluzione generale del sistema dipende dalla molteplicità geometrica di λ_1 .

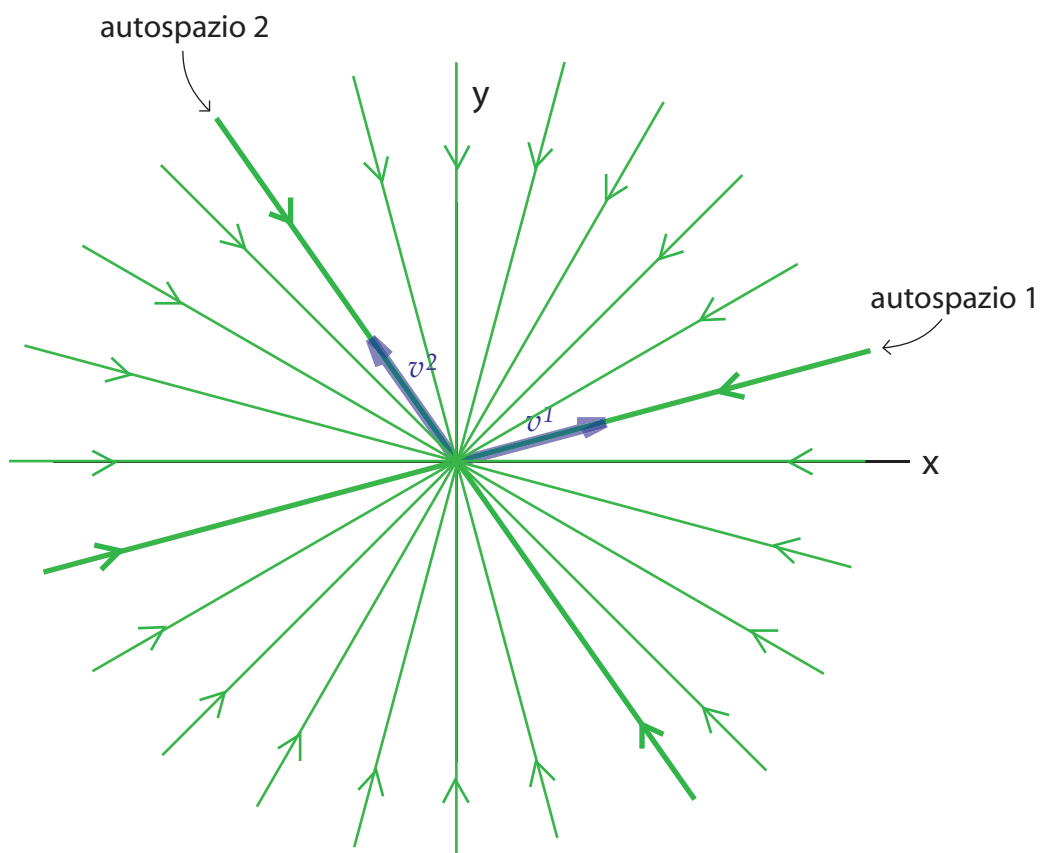
(a) se $m_g(\lambda_1) = 2$ abbiamo due linearmente indipendenti autovettori v^1 e v^2 e la soluzione è:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_1 t} v^2$$

Essendo il rapporto delle velocità di spostamento nella direzione di v^1 e v^2 costante, le orbite sono linee rette:



$0 < \lambda_1 = \lambda_2, m_g(\lambda_1) = 2$ NODO A STELLA INSTABILE

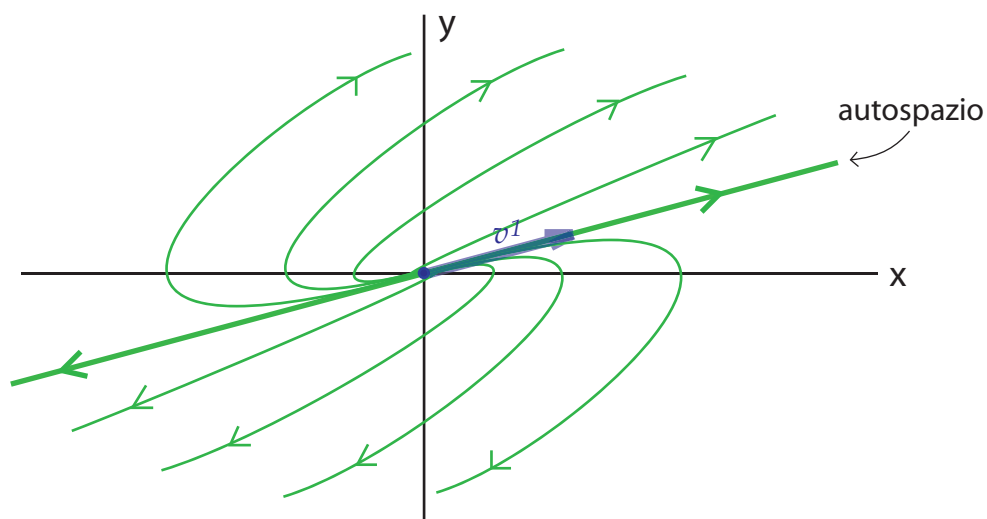


$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, $m_g(\lambda_1) = 2$ NODO A STELLA STABILE

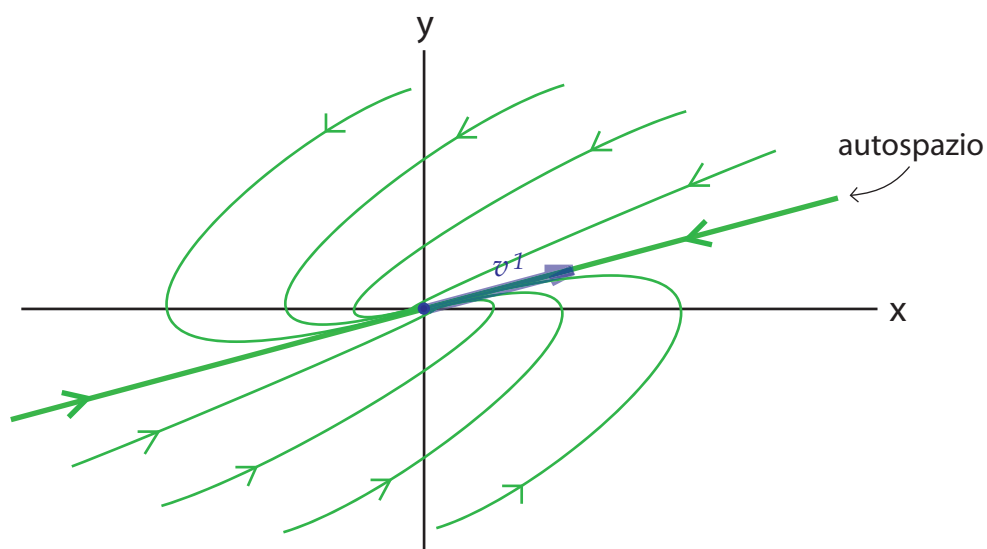
(b) se $m_g(\lambda_1) = 1$ abbiamo solo un autovettore v^1 e la soluzione è:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_1 t} (v^2 + (A - \lambda_1 I)v^2)$$

Si può dimostrare che in un intorno dell'origine tutte le orbite sono tangenti all'autospazio determinato da v^1 :



$0 < \lambda_1 = \lambda_2, m_g(\lambda_1) = 1$ NODO DEGENERE INSTABILE



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, m_g(\lambda_1) = 1$ NODO DEGENERE STABILE

Caso 5: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ **sono complesse**; in questo caso $\tau^2 - 4\delta < 0$ e $\delta \neq 0$.

Anche in questo caso, essendo $\delta \neq 0$ abbiamo un'unico punto fisso: $(0, 0)$. Il comportamento asintotico delle orbite dipende dal valore di α . Per capire come sono fatte le orbite prendiamo un esempio:

Esempio Vogliamo descrivere l'orbita del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x + \beta y, & x(0) = a, \\ y'(t) = -\beta x + \alpha y, & y(0) = 0 \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2 = 0$$

Quindi, abbiamo due radici complesse $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Per trovare l'autovettore dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -i\beta v_1 + \beta v_2 = 0 \\ -\beta v_1 - i\beta v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = iv_1$$

Quindi, l'autovettore è

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v^1 + i v^2$$

La soluzione generale è

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \cos(\beta t)(c_1 v^1 + c_2 v^2) + e^{\alpha t} \sin(\beta t)(-c_1 v^2 + c_2 v^1)$$

Ponendo la condizione iniziale abbiamo che $c_2 = 0$ e $c_1 = a$.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a e^{\alpha t} \cos(\beta t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - a e^{\alpha t} \sin(\beta t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix}$$

Osserviamo che nel momento t il punto $(x(t), y(t))$ si trova a distanza

$$d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = a e^{\alpha t} (\cos(\beta t)^2 + \sin(\beta t)^2) = a e^{\alpha t}$$

- (a) $\alpha = 0$: il punto rimane sempre alla stessa distanza; l'orbita è una circonferenza.
- (b) $\alpha > 0$: il punto si allontana dal centro seguendo una spirale;
- (b) $\alpha < 0$: il punto si avvicina al centro seguendo una spirale.

Classificazione dei punti fissi di un sistema lineari: riassunto


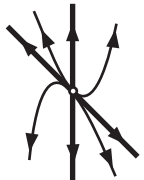
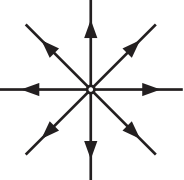
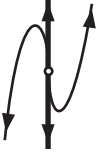
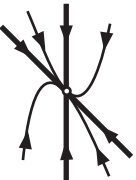
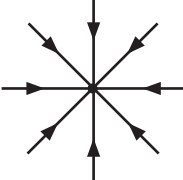

Sia dato un sistema di equazioni differenziali lineari di ordine uno:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (34)$$




L'unico punto fisso è $(0, 0)$ ($x = 0, y = 0$). Il carattere del punto fisso dipende dagli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Autovalori reali diversi da 0

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$		$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	
<p>sella</p> 	<p>$\lambda_1 \neq \lambda_2$ nodo instabile</p> 	<p>$\lambda_1 = \lambda_2$ stella/nodo deg. instabile</p>  	<p>$\lambda_1 \neq \lambda_2$ nodo stabile</p> 	<p>$\lambda_1 = \lambda_2$ stella/nodo deg. stabile</p>  

Autovalori complessi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$
vortice instabile	vortice stabile	centro
		

Studio dei punti fissi di un sistema di due equazioni differenziali autonomi non lineare tramite la linearizzazione

Sia dato un sistema di equazioni differenziali di ordine uno:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases}, \quad (35)$$

Sia (x^*, y^*) un punto fisso del sistema, cioè:

$$f_1(x^*, y^*) = 0 \quad f_2(x^*, y^*) = 0$$

Siano

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*$$

piccole perturbazioni dal punto fisso. Per poter analizzare come queste perturbazioni evolvono nel tempo, dobbiamo trovare le equazioni differenziali per u e v :

$$u'(t) = x'(t) = f_1(x^* + u, y^* + v).$$

Dallo sviluppo di f con la formula di Taylor in un intorno di x^* otteniamo:

$$f_1(x^* + u, y^* + v) = f_1(x^*, y^*) + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x} u + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y} v + O(u^2, v^2, uv)$$

Poichè $f_1(x^*, y^*) = 0$, trascurando il termine $O(u^2, v^2, uv)$ otteniamo:

$$u'(t) = \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x} u + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y} v$$

In modo analogo troviamo l'equazione per v :

$$v'(t) = \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x} u + \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y} v$$

Quindi a meno di termini di secondo ordine in u e v , l'evoluzione della perturbazione (u, v) viene governata dal sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

dove la matrice dei coefficienti è il valore della matrice Jacobiana nel punto (x^*, y^*) .

Teorema 1 Se il punto fisso $(0,0)$ del sistema lineare (36) è sella, nodo o vortice, allora anche il punto fisso (x^*, y^*) del sistema non lineare (35) è sella, nodo o vortice.

Nel caso in cui, invece il punto fisso $(0,0)$ del sistema lineare (36) è una stella, nodo degenerato, centro o se appartiene a una linea di punti fissi, il punto fisso del sistema non-lineare potrebbe essere di tipo diverso.

Esempio 27 Classificare i punti fissi del sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = x(3 - x - 2y) \\ y'(t) = y(2 - x - y) \end{cases}$$

Il sistema è stato usato da Lotka e Volterra per descrivere la convivenza tra due specie, per esempio conigli e pecore che sono in competizione per il cibo.

Idea del modello:

- ogni specie, riproducendosi, cresce proporzionalmente alla sua popolazione:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= 3x && \text{conigli,} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= 2y && \text{pecore} \end{aligned}$$

- i membri di ciascuna specie sono in competizione per il cibo tra essi e l'effetto di tale competizione è negativo sulla crescita della popolazione ed è proporzionale alla probabilità di scontrarsi:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= 3x - x^2, && \text{conigli} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= 2y - y^2 && \text{pecore} \end{aligned}$$

- la competizione per il cibo con i membri dell'altra specie porta ad analogo effetto; più forte sui conigli che sono più piccoli:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= 3x - x^2 - 2xy && \text{conigli,} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= 2y - y^2 - xy && \text{pecore} \end{aligned}$$

Risoluzione Troviamo prima i punti fissi risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x(3 - x - 2y) = 0 \\ y(2 - x - y) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo 4 soluzioni: $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,1)$. Il Jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{bmatrix}$$

Analisi dei punti fissi:

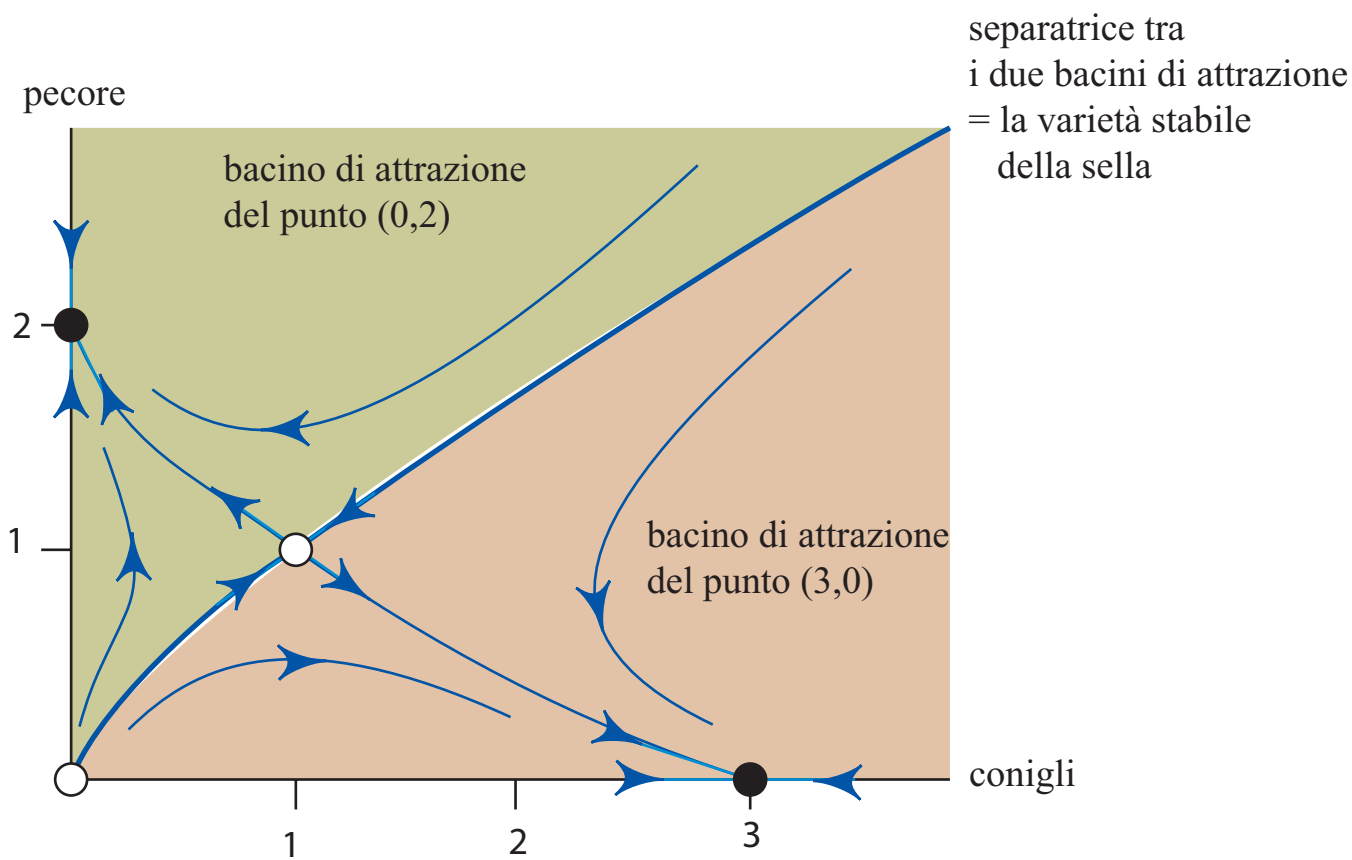
punto fisso	$(0,0)$ (no conigli, no pecore)
Jacobiano	$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
autovalori	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$
autovettori	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
tipo	nodo instabile

punto fisso	$(0, 2)$ (solo pecore)
Jacobiano	$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$
autovalori	$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -2 < 0$
autovettori	$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
tipo	nodo stabile

punto fisso	$(3, 0)$ (solo conigli)
Jacobiano	$J = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
autovalori	$\lambda_1 = -3 < 0, \lambda_2 = -1 < 0$
autovettori	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$
tipo	nodo stabile

punto fisso	$(1, 1)$ (conigli = pecore)
Jacobiano	$J = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
autovalori	$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} < 0, \lambda_2 = -1 + \sqrt{2} > 0$
autovettori	$v_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
tipo	sella

P.F.	(0,0)	(0,2)	(3,0)	(1,1)
J	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
λ_1 v_1	$3 > 0$ (1,0)	$-1 < 0$ (0,1)	$-3 < 0$ (1,0)	$-1 - \sqrt{2} < 0$ $(\sqrt{2}, 1)$
λ_2 v_2	$2 > 0$ (0,1)	$-2 < 0$ (-1,2)	$-1 < 0$ (-3,1)	$-1 + \sqrt{2} > 0$ $(-\sqrt{2}, 1)$
tipo	nodo instabile	nodo stabile	nodo stabile	sella



Esercizi

Trovare e classificare i punti critici dei sistemi autonomi e tracciare un grafico qualitativo delle curve di fase.

$$\begin{cases} x' = xy + x + 2y + 3 \\ y' = x + y + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 5 \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x^2 + y - 6 \\ y' = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x^2 + y - 2 \\ y' = y - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x^3 + y - 2x \\ y' = y - x^2 \end{cases}$$

Esempi quando la linearizzazione non funziona

Ricordiamo che secondo il Teorema 1 quando il punto fisso $(0,0)$ del sistema lineare è una **stella**, **nodo degenerato**, **centro** o **se appartiene a una linea di punti fissi**, il punto fisso del sistema non-lineare potrebbe essere di tipo diverso. In questi casi, per poter classificare il punto fisso del sistema non lineare dobbiamo effettuare uno studio teorico più approfondito o trovare la soluzione numerica.

Esempio 28 Classificare i punti fissi dei sistemi:

$$(a) \begin{cases} x'(t) = -y + x(x^2 + y^2) \\ y'(t) = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x'(t) = -y - x(x^2 + y^2) \\ y'(t) = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Risoluzione di (a) Troviamo prima i punti fissi risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -y + x(x^2 + y^2) = 0 \\ x + y(x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x + y(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo 1 soluzione: $(0,0)$.

Il Jacobiano del sistema è:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 & -1 + 2xy \\ 1 - 2xy & x^2 + 3y^3 \end{bmatrix}$$

Analisi del punto fisso del sistema lineare $Y' = J \cdot Y$:

punto fisso	$(0, 0)$
Jacobiano	$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
autovalori	$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$
autovettori	$v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$
tipo	centro

Essendo il punto fisso del sistema lineare un centro, il punto fisso del sistema non lineare potrebbe essere sia centro, sia vortice stabile o instabile. Approfondiamo trasformando il sistema in coordinate polari:

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

In questi coordinate il sistema diventa:

$$\begin{cases} \rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta = -\rho \sin \theta + \rho^3 \cos \theta \\ \rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta = \rho \cos \theta + \rho^3 \sin \theta \end{cases}$$

Da qui esprimendo ρ' e θ' otteniamo:

$$\begin{cases} \rho' = \rho^3 > 0 \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Quindi il raggio dell'orbita $\rho(t)$ cresce con il tempo, cioè abbiamo un vortice instabile.

Soluzione di (b) Anche il sistema (b) ha come punto fisso $(0,0)$, e la linearizzazione porta allo stesso Jacobiano, cioè il sistema lineare ha un centro. Mentre il passaggio in coordinate polari trasforma il sistema (b) nel sistema:

$$\begin{cases} \rho' = -\rho^3 < 0 \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Quindi il raggio dell'orbita $\rho(t)$ diminuisce con il tempo, cioè abbiamo un vortice stabile.

Conclusione Se la linearizzazione porta ad un centro, il punto fisso del sistema non lineare potrebbe essere sia un centro, sia un vortice stabile, sia un vertice instabile.

Cicli limiti

Un **ciclo limite** è un'orbita chiusa isolata nello spazio delle fasi. Isolata significa che le orbite nelle vicinanze non sono chiuse.

Ci sono tre possibilità:

- ciclo stabile: quando le orbite in un intorno del ciclo sono dei spirali che si avvicinano assintoticamente al ciclo;
- ciclo instabile: quando le orbite in un intorno del ciclo sono dei spirali che si allontanano dal ciclo;
- ciclo semistabile: quando una parte delle orbite si avvicinano mentre altri si allontanano;

L'esistenza dei cicli limiti è un fenomeno che si osserva **soltanto** nei sistemi non lineari e purtroppo non esiste un metodo generale che permette di dire se un dato sistema ammette o no dei cicli limite.

Esempio 29 Dato l'equazione di van der Pol di secondo ordine:

$$x''(t) + \epsilon(x^2 - 1)x'(t) + x(t) = 0, \quad \epsilon > 0.$$

Studiare numericamente il comportamento asintotico ($t \rightarrow \infty$) della soluzione del problema di Cauchy con $\epsilon = 1,5$ e condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$. Confrontare con la soluzione quando $\epsilon = 0$.

Risoluzione Trasformato in sistema di primo ordine tramite la sostituzione: $y(t) = x'(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = y, & x(0) = 0.5 \\ y'(t) = -\epsilon(x^2 - 1)y - x, & y(0) = 0 \end{cases}$$

Per $\epsilon = 0$ il sistema è lineare:

$$\begin{cases} x'(t) = y, \\ y'(t) = -x, \end{cases}$$

la soluzione generale (cf. Esempio 22') è

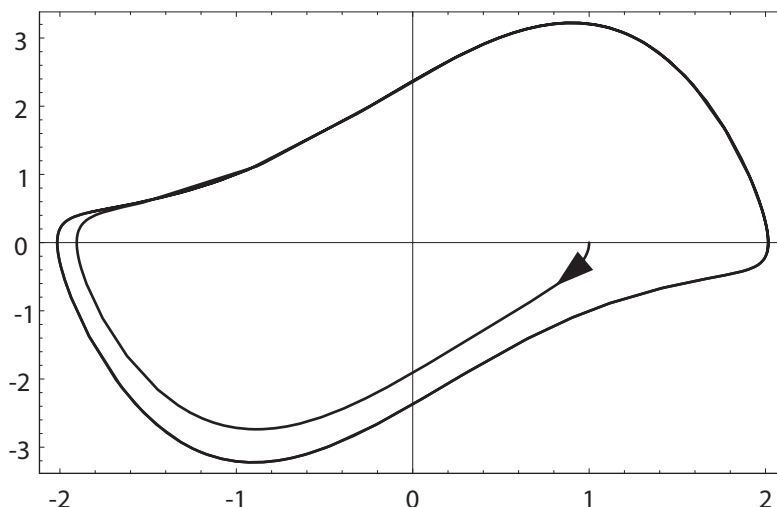
$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \\ y(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t), \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = -\sin(t), \end{cases}$$

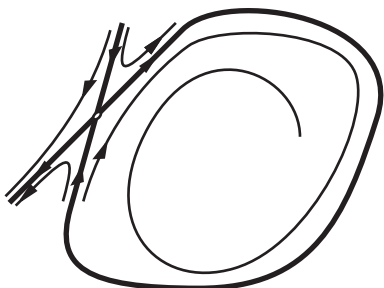
L'orbita nello spazio delle fasi è determinata dall'equazione: $x^2 + y^2 = 1$, cioè è una circonferenza di raggio 1.

Per $\epsilon = 1.5$ invece si osserva che l'orbita converge ad un ciclo limite stabile che ha una forma non circolare e raggio medio 2:

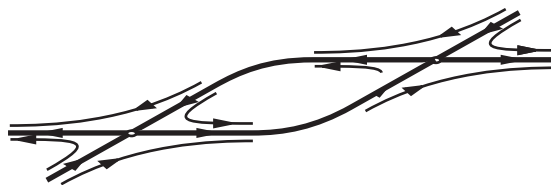


Studio globale dello spazio delle fasi per un sistema non lineare

1. Determinare e classificare i **punti fissi**.
2. Determinare le **varietà invarianti** dei punti cella.
3. Determinare e classificare eventuali **cicli limite**.
4. Individuare le **regioni invarianti**, dove una regione invariante consiste da tutti i punti nello spazio delle fasi che danno inizio a orbite di analogo comportamento asintotico (per $t \rightarrow \infty$). Le **curve separatrici** delle regioni invarianti potrebbero essere
 - varietà stabili di punti sella;
 - cicli limite;
 - orbite eterocline, che collegano due punti sella diverse;
 - orbite omocline , che collegano la varietà stabile e la varietà instabile dello stesso punto sella.



orbita omocline



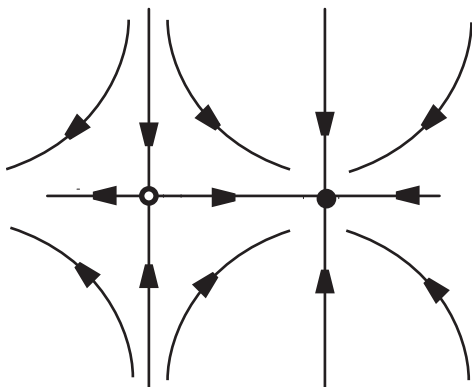
orbite eterocline

Esempi di Biforcazioni in dimensione 2

Se nel nostro equazione compare un parametro, i cambiamenti dei valori di tale parametro possono portare alla apparizione di nuovi punti critici o alla distruzione dei punti esistenti. Tali cambiamenti nel quadro delle soluzioni si chiamano **biforcazioni** e i valori del parametro per i quali vengono osservati si chiamano **punti di biforcazione**.

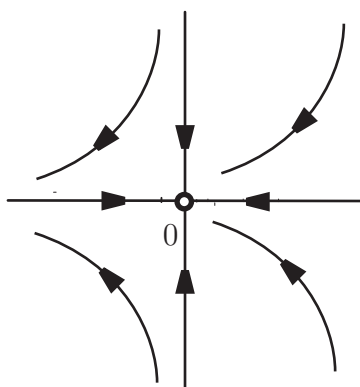
Esempio: biforcazione sella-nodo in $r = 0$
distruzione di una coppia di un punto sella e un nodo

$$\begin{aligned} x'(t) &= r - x^2, & r > 0 \\ y'(t) &= y \end{aligned}$$



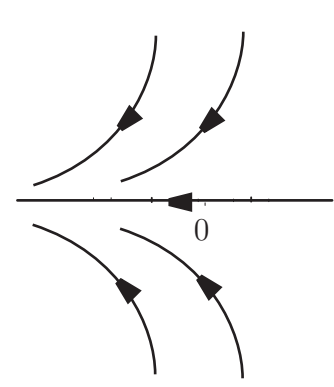
un nodo stabile e
un punto sella

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2 \\ y'(t) &= y \end{aligned}$$

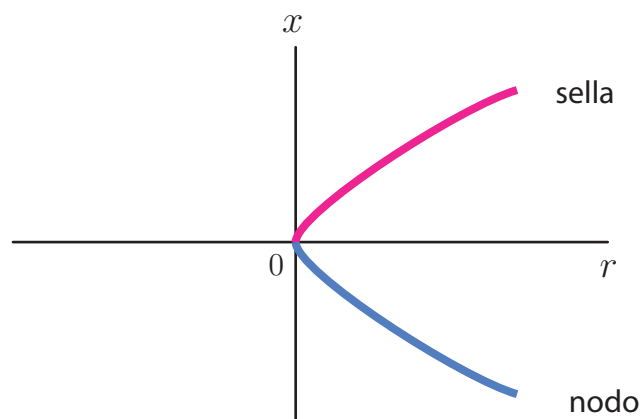


nodo stabile a metà

$$\begin{aligned} x'(t) &= r - x^2, & r < 0 \\ y'(t) &= y \end{aligned}$$



non ci sono punti fissi

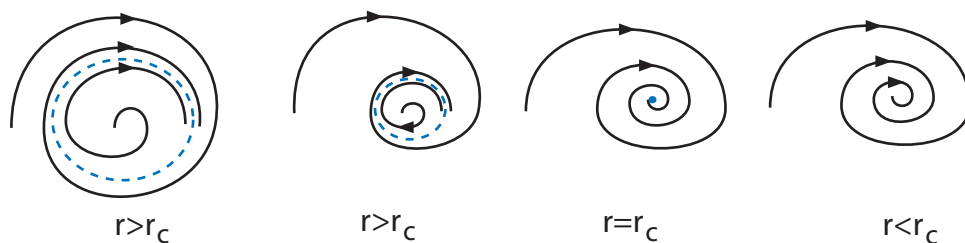


Biforcazione di Hopf in $r=r_c$:

trasformazione di un vertice stabile in un vertice instabile o vice versa (la parte reale degli autovalori cambia segno)

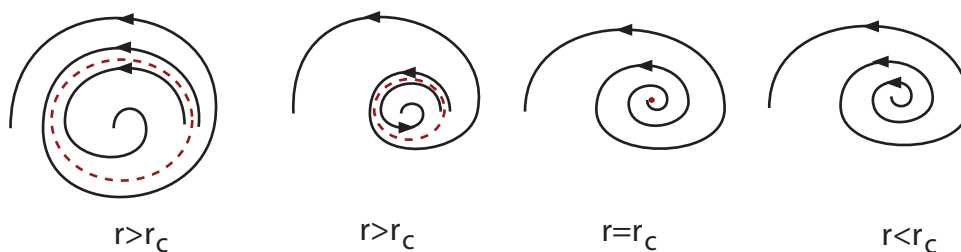
Biforcazione di Hopf Supercritical:

un ciclo limite stabile si restringe ad un punto lasciando un vortice stabile



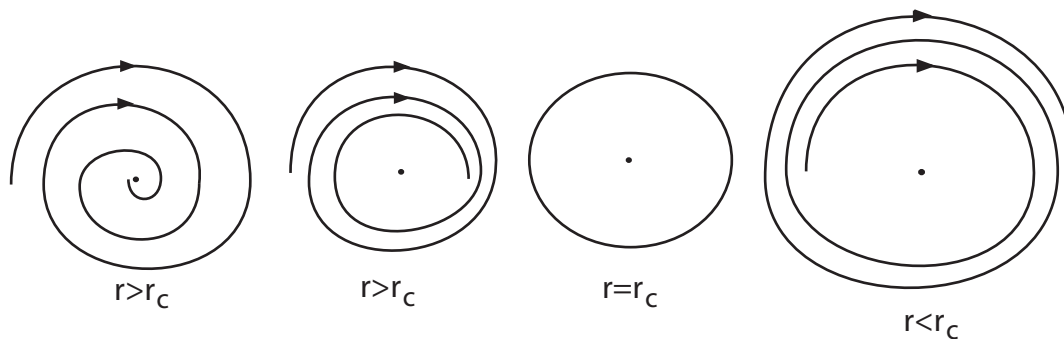
Biforcazione di Hopf Subcritical:

un ciclo limite instabile si restringe ad un punto lasciando un vortice instabile



Biforcazione di Hopf Degenerata

un vortice stabile si trasforma in vortice instabile passando per un centro



Problemi di contorno

Sappiamo che la soluzione generale di un'equazione differenziale di ordine n

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, x) = 0$$

dipende da n costanti di integrazione. Per fissare una soluzione particolare abbiamo bisogno di aggiungere n condizioni, che fino adesso erano sempre "condizioni iniziali" che fissano il valore della funzione e le sue prime $n - 1$ derivate in un dato punto x_0 . Ma spesso nelle applicazioni, invece di sapere il valore della funzione e le sue prime $n - 1$ derivate in un punto, noi sappiamo i valori della funzione e/o i valori di qualcuna delle sue derivate in più punti.

Definizione. Dato un'equazione differenziale di ordine ≥ 2 , il *problema di valori al contorno* consiste nella ricerca di soluzioni dell'equazione data che assumono esse stesse e le loro derivate dei valori assegnati in corrispondenza di più punti.

Per equazione di ordine due $y''(x) = f(x, y, y')$ sono di interesse i seguenti problemi al contorno:

- condizione di Dirichlet: $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$;
- condizione di Neumann: $y'(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1$;
- condizione di Sturm-Leouville: $ay(x_0) + by'(x_0) = y_0, cy(x_1) + dy'(x_1) = y_1$;

Esempio 30 Trova per i quali valori di λ , il problema al contorno

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

ha soluzioni non nulle.

Risoluzione

$$\lambda = 0 \quad y'' = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2$$

$$y(0) = c_2 = 0, \quad y(l) = c_1 l = 0$$

Quindi, in questo caso non ci sono soluzioni non nulle.

$$\lambda < 0 \quad y'' = -\lambda y \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(l) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni non nulle per c_1 e c_2 se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{bmatrix} = e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0,$$

cioè

$$e^{\sqrt{-\lambda}l} = e^{-\sqrt{-\lambda}l} \Rightarrow e^{2\sqrt{-\lambda}l} = 1$$

Questo è impossibile per chè $2\sqrt{-\lambda}l > 0$. Quindi, il determinante è $\neq 0$ e l'equazione ha soltanto la soluzione nulla.

$$\lambda > 0 \quad y'' = -\lambda y \Rightarrow y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(l) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

Quindi, il sistema ha soluzioni non nulle soltanto se

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \lambda = n^2\pi^2/l^2$$

e per tali valori di λ l'equazione differenziale ha infinite soluzioni:

$$y(x) = c_2 \sin(n\pi x/l)$$

Teorema Il problema di Sturm-Leouville

$$y''(x) + \lambda x = 0, \quad a y(0) + b y'(0) = 0, \quad c y(l) + d y'(l) = 0 \quad (37)$$

ha soluzioni soltanto per un insieme numerabile di valori di λ :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

detti **autovalori** di (37), mentre le soluzioni non nulle si chiamano **autofunzioni** di (37).

Secondo la terminologia del teorema, gli autovalori del problema nell'Esercizio 29 sono:

$$\pi^2/l^2, 2^2\pi^2/l^2, 3^2\pi^2/l^2 \dots$$

mentre i corrispondenti autofunzioni sono multipli di:

$$\sin(\pi x/l), \sin(2\pi x/l), \sin(3\pi x/l) \dots$$

Esercizi

1. Trovare gli autovalori e gli autofunzioni del problema al contorno

- $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0$

- $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0$

- $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$

2. Per quali valori di λ il problema al contorno

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

ha soluzioni non nulle.