Appunti di Analisi e Calcolo Numerico
Metodi numerici per la soluzione delle equazioni differenziali

LS in Ingegneria Edile AA 2007-2008

Docente : Dott. Ivelina Bobtcheva

Contenuti

1. Radici di equazioni non-lineari:
   (a) metodo di Newton-Raphson
   (b) metodo del punto fisso
2. Equazioni differenziali del primo ordine
   (a) metodo di Eulero esplicito
   (b) tipi di errori: errori di discretizzazione locali e globali; errori di arrotondamento; metodi consistenti
   (c) metodi impliciti: Eulero implicito e Crank-Nicolson
   (d) stabilità e convergenza dei metodi numerici
   (e) metodi di secondo e di quarto ordine: Eulero modificato e Runge-Kutta del quart'ordine
   (f) il problema della convergenza e stabilità dei metodi numerici
3. Equazioni alle differenze e Metodi multistep:
   (a) equazioni alle differenze omogenee
   (b) equazioni alle differenze non omogenee
   (c) metidi lineari a k passi;
   (d) metodo del predictor-corrector

Metodi numerici per la soluzione delle equazioni differenziali di primo ordine

Si consideri l'equazione differenziale di primo ordine

$$(1) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x,y), \quad f : R \to R, \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Si supponga che f soddisfa le condizioni nel Teorema di esistenza e unicità della soluzione

$$y = y(x)$$

dell'equazione in $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$.

Ricorriamo ad una soluzione approssimata (numerica) del problema (1) se è difficile o impossibile trovare la soluzione esatta (analitica) per semplice integrazione.

Per procedura numerica per risolvere il problema ai valori iniziali (1), si intende una procedura per costruire valori approssimati

$$\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$$

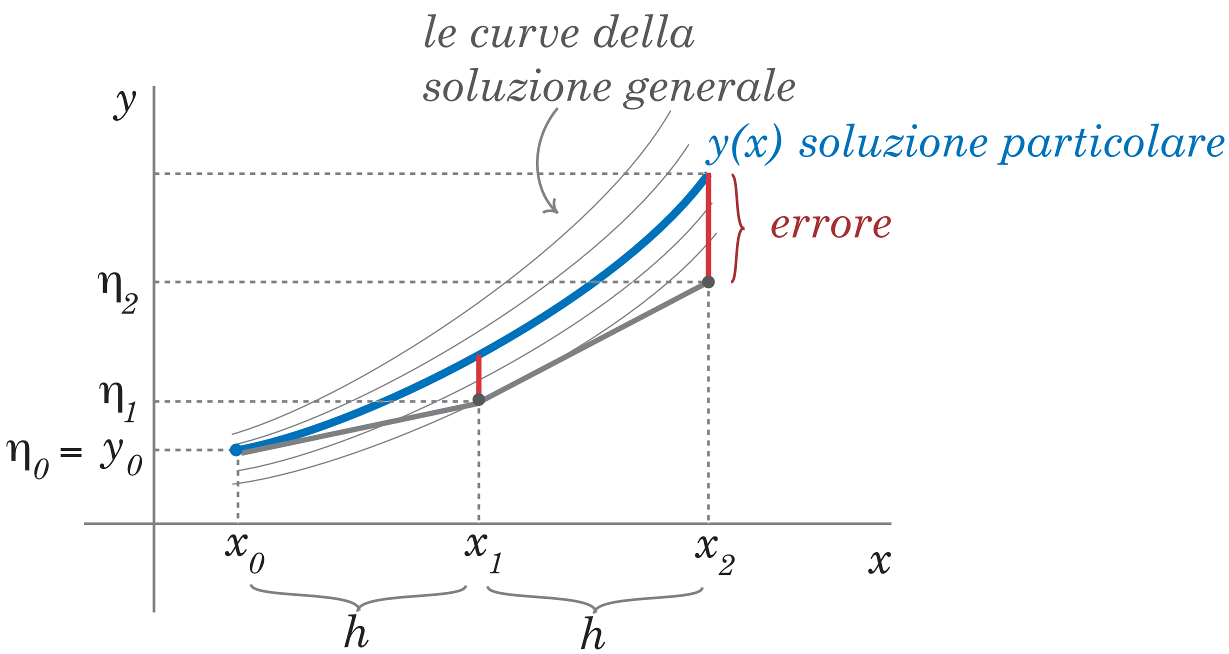
della soluzione $y(x)$ nei punti

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Allora l'errore della stima nel punto x_i è il valore assoluto della differenza tra il valore approssimato ed il valore esatto:

$$\Delta_i = |\eta_i - y(x_i)|.$$

Significato geometrico del metodo di Eulero esplicito



Esempio Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x + y, \\ y(0) = 1 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}.$$

Approssimare il valore di $y(0.5)$ con il metodo di Eulero espicito con $h = 0.1$ e con $h = 0.05$. Confrontare con la soluzione esatta.

Soluzione La soluzione esatta (analitica) del problema è:

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Controlliamo:

$$y' = 2e^x - 1 = (2e^x - x - 1) + x = y + x.$$

Ripetiamo la stima con $h = 0.05$ e osserviamo che l'errore è diminuito:

i	x_i	η_i	$y(x_i)$	$\Delta_i = \lvert\eta_i - y(x_i)\rvert$
0	0	1	1	0
1	0.05	1.05	1.05254	0.00254
2	0.1	1.105	1.11034	0.00534
3	0.15	1.16525	1.17367	0.00841
4	0.2	1.23101	1.24281	0.01179
5	0.25	1.30256	1.31805	0.01548
6	0.3	1.38019	1.39972	0.01952
7	0.35	1.4642	1.48814	0.02393
8	0.4	1.55491	1.58365	0.02873
9	0.45	1.65266	1.68662	0.03396
10	0.5	1.75779	1.79744	0.03965

Metodi di approssimazione consistenti ed errore di discretizzazione locale

Consideriamo l'equazione differenziale di primo ordine

$$(1) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \qquad f \,:\, D \to R, \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Tutti i metodi ad un solo passo sono caratterizzati da una funzione $\Phi(x, y, h)$ in modo che i valori approssimati per $y(x_i)$ si ottengono usando l'algoritmo:

$$\eta_0 = y_0$$
$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\,\Phi(x_i, \eta_i; h),$$
$$x_{i+1} = x_i + h.$$

Nel metodo di Eulero abbiamo

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y)$$

indipendente da h.

Poichè

$$\lim_{h\to 0} \Delta(\overline{x},\overline{y};h) = y'(\overline{x}) = f(\overline{x},\overline{y}),$$

abbiamo che il metodo è consistente se e solo se

$$\lim_{h\to 0} \Phi(\overline{x},\overline{y};h) = y'(\overline{x}) = f(\overline{x},\overline{y}).$$

Se $\Phi(\overline{x},\overline{y};h)$ è una funzione continua questo implica che

$$\Phi(\overline{x},\overline{y};0) = f(\overline{x},\overline{y}).$$

Il metodo si chiama di ordine p se

$$\tau(\overline{x},\overline{y};h) = \mathcal{O}(h^p),$$

cioè l'errore di discretizzazione locale è di ordine $p+1$.

Errore di discretizzazione globale

Consideriamo il metodo ad un passo

$$
\begin{aligned}
&\eta_0 = y_0 = y(x_0) \\
&\eta_{i+1} = \eta_i + h\,\Phi(x_i, \eta_i; h), \\
&x_{i+1} = x_i + h.
\end{aligned}
$$

Vogliamo studiare la convergenza del metodo, cioè se quando $h \to 0$ i valori di η tendono alla soluzione esatta. Per questo fissiamo x e supponiamo che abbiamo bisogno di n passi per arrivare ad x, cioè

$$x = x_n, \; h = h_n = \frac{x - x_0}{n} \text{ e poniamo } \eta(x; h_n) = \eta_n$$

L'errore di discretizzazione globale è la differenza tra il valore approssimato ed il valore esatto della funzione in x:

$$\epsilon(x; h_n) = \eta(x; h_n) - y(x).$$

Il metodo è convergente se

$$\lim_{n \to \infty} \epsilon(x; h_n) = 0$$

per ogni x nel intervallo considerato ed $f \in C^1(D)$.

Esempio. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - x + 4y, \\ y(0) = 1 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}.$$

Approssimare il valore di $y(0.2)$ con il metodo di Eulero espicito con $h = 0.1$. Dare una stima dell' errore locale e confrontare con l'errore effettivo.

Soluzione La soluzione esatta (analitica) del problema è:

$$y(x) = \frac{19}{16}e^{4x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$

Controlliamo: $y(0) = 19/16 - 3/16 = 1$ e

$$y' = \frac{19}{4}e^{4x} + \frac{1}{4} = 4y(x) - x - 1.$$

Allora calcoliamo

$$y(0.1) = 1.60904$$

$$y(0.2) = 2.50533$$

Prendiamo $h = 0.1$. Quindi con il metodo di Eulero otteniamo

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & \eta_0 &= 1 \\ x_1 &= 0.1 & \eta_1 &= \eta_0 + h(1 - x_0 + 4y_0) = 1 + 0.1 \times 5 = 1.5 \\ x_2 &= 0.2 & \eta_2 &= \eta_1 + h(1 - x_1 + 4y_1) = 1.5 + 0.1 \times 6.9 = 2.19 \end{aligned}$$

Stimiamo adesso l'errore di discretizzazione locale con la formula

$$e \leq M\, h^2/2$$

dove M è il massimo valore di $y''(x)$ per $0 \leq x \leq 0.1$.

Metodi impliciti

Per trovare una soluzione approssimata del problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x,y), & f\,:\,D \to R, \\ y(x_0) = y_0 & \text{(condizione iniziale)} \end{cases} ,$$

fissiamo un passo h (sufficientemente piccolo) e approssimiamo la derivata con il rapporto incrementale:

$$y'(x+h) = f(x+h, y(x+h)) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$
$$\Rightarrow y(x+h) \approx y(x) + hf(x+h, y(x+h)).$$

Quindi partendo da x_0 ed $\eta_0 = y_0$ si possono ottenere i valori η_i che approssimano i valori esatti

$$y_i = y(x_i) \;\text{ nei punti }\; x_i = x_0 + ih$$

con l'algoritmo

$$\eta_0 = y_0$$
$$\eta_{i+1} = \eta_i + hf(x_{i+1}, \eta_{i+1}),$$
$$x_{i+1} = x_i + h.$$

Il metodo si chiama di *Eulero implicito* perchè ad ogni passo si deve risolvere un equazione implicita per η_{i+1}.

Integrando l'equazione $y'(x) = f(x, y(x))$ sull' intervallo $[x, x+h]$ otteniamo

$$y(x+h) - y(x) = \int_x^{x+h} f(x, y(x))dx.$$

Usando la formula del trapezio per approssimare l'integrale abbiamo

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(f(x, y) + f(x+h, y(x+h)).$$

Da qui otteniamo un altro algoritmo che si chiama metodo di Crank-Nicolson o anche Heun implicito:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= y_0 \\
\eta_{i+1} &= \eta_i + \frac{h}{2}(f(x_i, \eta_i) + f(x_{i+1}, \eta_{i+1})), \\
x_{i+1} &= x_i + h.
\end{aligned}$$

Osserviamo che il metodo di Crank-Nicolson rappresenta la media dei metodi Eulero esplicito ed Eulero implicito.

Esempio. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + 5x, \\ y(0) = 5 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}.$$

Approssimare il valore di $y(0.4)$ con $h = 0.1$ e con il metodo di Eulero espicito, Eulero implicito e di Crank-Nicolson.

i seguenti:

i	x_i	η_i^{EE}	η_i^{EI}	η_i^{CN}
0	0	5	5	5
1	0.1	5	5.10101	5.05025
2	0.2	5.1	5.30715	5.20253
3	0.3	5.302	5.62593	5.46148
4	0.4	5.61106	6.06868	5.83510

Eulero implicito con passo h:

$$\begin{aligned}
&\eta_0 = 1, \\
&\eta_1 = \eta_0 - \lambda h \eta_1 \ \Rightarrow \eta_1 = 1/(1+\lambda h), \\
&\eta_2 = \eta_1 - \lambda h \eta_2 \ \Rightarrow \eta_2 = 1/(1+\lambda h)^2, \\
&\ldots \\
&\eta_i = \eta_{i-1} - \lambda h \eta_i \ \Rightarrow \eta_i = 1/(1+\lambda h)^i.
\end{aligned}$$

Di nuovo fissiamo x e consideriamo h tale che sono necessari n passi per arrivare ad esso; cioè

$$h = \frac{x - x_0}{n} = x/n \ \Rightarrow n = x/h.$$

Risulta

$$\lim_{h\to 0} \eta_n = \lim_{h\to 0} 1/(1+\lambda h)^{x/h} = e^{-\lambda x} = y(x).$$

Dove abbiamo usato che

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \log(1+\lambda h)^{x/h} &= -x \lim_{h\to 0} \log(1+\lambda h)/h \\
&= -x \lim_{h\to 0} \lambda/(1+\lambda h) = -x\lambda.
\end{aligned}$$

Quindi, il metodo di Eulero implicito è convergente. In modo analogo si dimostra la convergenza del metodo di Crank-Nicolson.

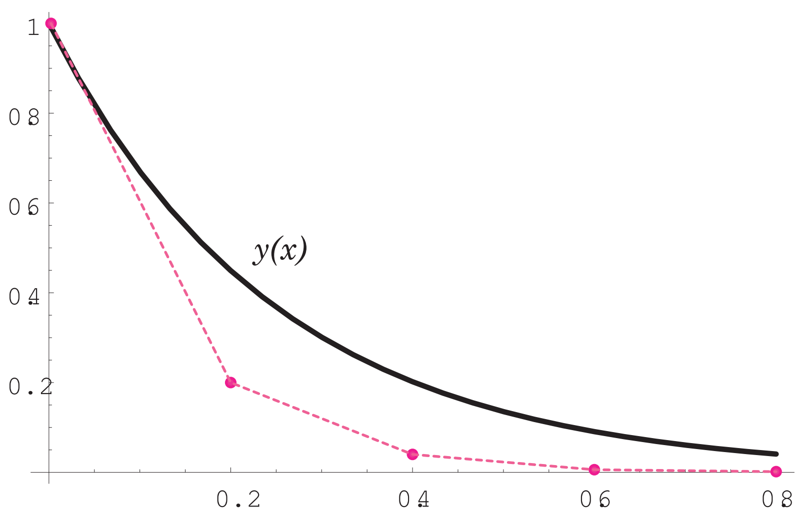
Esempio. Studiare il comportamento al crescere di n delle soluzioni numeriche del problema

$$\begin{cases} y'(x) = -4y(x), & \lambda > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con Eulero esplicito e $h = 0.2$ e $h = 0.6$.

Soluzione Per $h = 0.2$ abbiamo $h\lambda = 0.8 < 2$ e

i	x_i	η_i	$y(x_i)$	$\lvert\eta_i - y(x_i)\rvert$
0	0	1	1	0
1	0.2	0.2	0.4493	0.2493
2	0.4	0.04	0.2018	0.1618
3	0.6	0.008	0.0908	0.0827
4	0.8	0.0016	0.04076	0.03916



Metodi di secondo e quarto ordine

Consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & f : D \to R, \\ y(\overline{x}) = \overline{y} & \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Tutti i metodi ad un solo passo sono caratterizzati da una funzione $\Phi(x, y, h)$ in modo che i valori approssimati per $y(x_i)$ si ottengono usando l'algoritmo:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \overline{y} \\ \eta_{i+1} &= \eta_i + h\,\Phi(x_i, \eta_i; h), \\ x_{i+1} &= \overline{x} + i\,h. \end{aligned}$$

Allora la differenza tra il valore della soluzione esatta in $\overline{x}+h$ e la sua approssimazione:

$$e = y(\overline{x} + h) - \eta_1 = y(\overline{x} + h) - \overline{y} - h\Phi(\overline{x}, \overline{y}, h)$$

si chiama *errore di discretizzazione locale.* Il metodo si chiama di ordine p se $e = \mathcal{O}(h^{p+1})$, cioè l'errore di discretizzazione locale è di ordine $p + 1$ nel quale caso (se Φ è lipchiziana) l'errore globale è di ordine p.

Per trovare metodi espliciti del secondo ordine cerchiamo $\Phi(x, y, h)$ tale che nello sviluppo di e in h i termini che contengono h e h^2 si cancellano.

La prima possibilità è di prendere

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y))$$

ma questo metodo richiede il calcolo delle derivate di f e non è molto usato.

Allora cerchiamo Φ nella forma

$$\Phi(x, y, h) = a_1 f(x, y) + a_2 f(x + p_1 h, y + p_2 h f(x, y))$$

dove vogliamo determinare le costanti a_1, a_2, p_1, p_2 dalla condizione che nello sviluppo di e in h i termini che contengono h e h^2 si cancellano. Sviluppando Φ in h otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, h) = \quad & (a_1 + a_2) f(x, y) + \\ & + a_2\, h(p_1 f_x(x, y) + p_2 f_y(x, y) f(x, y)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Sostituendo nella (**??**) abbiamo per l'errore locale:

$$\begin{aligned} e = \quad & h(1 - a_1 - a_2) f(\overline{x}, \overline{y}) + \\ & + h^2((\frac{1}{2} - a_2 p_1) f_x(\overline{x}, \overline{y}) + (\frac{1}{2} - a_2 p_2) f_y(\overline{x}, \overline{y}) f(x, y)) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Quindi per avere l'errore locale del terzo ordine

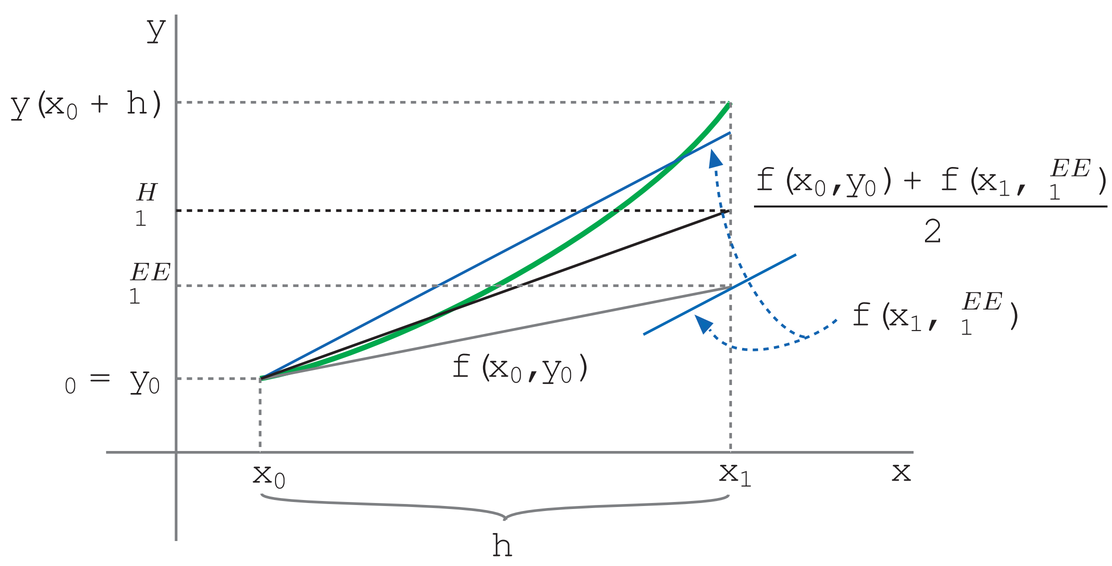
$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2 p_1 = 1/2, \quad a_2 p_2 = 1/2.$$

Significato geometrico del metodo di Heun e confronto con Eulero esplicito

Osserviamo che la formula per un singolo passo del metodo di Heun può essere scritta come

$$\begin{aligned}\eta_1^H &= y_0 + h\left(f(x_0,y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0,y_0))\right)/2 \\ &= y_0 + h\left(f(x_0,y_0) + f(x_1,\eta_1^{EE})\right)/2\end{aligned}$$

dove η_1^{EE} indica un passo con Eulero esplicito. Quindi $\Phi(x,y,h)$ nella formula di Heun è la media dei valori della pendenza f nel punto precedente e nel punto dove manda il metodo di Eulero esplicito. Abbiamo la seguente interpretazione geometrica:



Esempio. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x + y, \\ y(0) = 1 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}.$$

Approssimare il valore di $y(0.5)$ con $h = 0.1$ e con i metodi di Eulero espicito, Heun e Runge-Kutta. Confrontare con la soluzione esatta.

Soluzione: Ricordiamo che la soluzione esatta (analitica) del problema è:

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Abbiamo già risolto il problema con Eulero esplicito con il seguente risultato:

i	x_i	η_i	$y(x_i)$	$\lvert\eta_i - y(x_i)\rvert$
0	0	1	1	0
1	0.1	1.1	1.11034	0.01034
2	0.2	1.22	1.24281	0.02280
3	0.3	1.362	1.39972	0.03771
4	0.4	1.5282	1.58365	0.05544
5	0.5	1.72102	1.79744	0.07642

Quindi il metodo di Eulero esplicito ci dà 1.72 per la stima di $y(0.5)$ con un errore di 0.8 (arrotondando). Scriviamo

$$y(0.5)^{EE} = 1.72 \pm 0.08.$$

Con il metodo di Runge-Kutta abbiamo:

$$\Phi(x,y,h) = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \text{ dove}$$
$$k_1 = f(x,y) = x + y,$$
$$k_2 = f(x + \frac{h}{2}, y + h\,\frac{k_1}{2}) = x + y + \frac{h}{2}(1 + k_1),$$
$$k_3 = f(x + \frac{h}{2}, y + h\,\frac{k_2}{2}) = x + y + \frac{h}{2}(1 + k_2),$$
$$k_4 = f(x + h, y + h\,k_3) = x + y + h(1 + k_3).$$

Facciamo il primo passo con $x_0 = 0$, $\eta_0 = 1$:

$$x_1 = h = 0.1$$
$$k_1 = x_0 + \eta_0 = 1,$$
$$k_2 = x_0 + \eta_0 + h(1 + k_1)/2 = 1 + 0.1 = 1.1,$$
$$k_3 = x_0 + \eta_0 + h(1 + k_2)/2 = 1.105,$$
$$k_4 = x_0 + \eta_0 + h(1 + k_3) = 1.2105.$$

Quindi

$$\eta_1 = \eta_0 + h\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,/6 = 1.11034$$

Continuando costruiamo la seguente tabella di confronto

i	x_i	η_i	$y(x_i)$	$\lvert\eta_i - y(x_i)\rvert$
0	0	1	1	0
1	0.1	1.11034	1.11034	1.69485×10^{-7}
2	0.2	1.24281	1.24281	3.74619×10^{-7}
3	0.3	1.39972	1.39972	6.21027×10^{-7}
4	0.4	1.58365	1.58365	9.15121×10^{-7}
5	0.5	1.79744	1.79744	1.26421×10^{-6}

Quindi il metodo di Runge-Kutta ci dà

$$y(0.5)^{RK} = 1.79744 \pm 1.3 \times 10^{-6}.$$

Esempio. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,y, \\ y(1) = 2 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}.$$

Approssimare il valore di $y(1.2)$ con $h = 0.1$ con il metodo di Eulero esplicito e dare una stima dell'errore usando l'estrapolazione di Richardson.

Soluzione:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 & \eta_0 &= 2 \\ x_1 = h &= 1.1 & \eta_1 &= \eta_0 + h(x_0\eta_0) = 2 + 0.2 = 2.2 \\ x_2 = 2h &= 1.2 & \eta_2 &= \eta_1 + h(x_1\eta_1) = 2.2 + 0.242 = 2.442 \end{aligned}$$

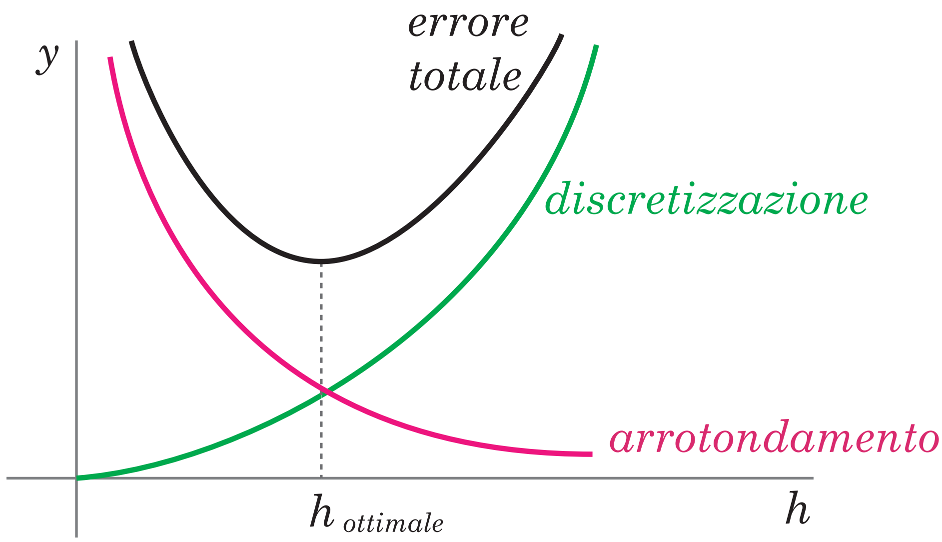
Quindi $\eta(1.2; 0.1) = 2.442$. Adesso ripetiamo la stima con un passo doppio $h = 0.2$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 & \eta_0 &= 2 \\ x_1 = h &= 1.2 & \eta_1 &= \eta_0 + h(x_0\eta_0) = 2 + 0.2 \times 2 = 2.4 \end{aligned}$$

Quindi $\eta(1.2; 0.2) = 2.4$. Il metodo di Eulero è di primo ordine, cioè $p = 1$, quindi secondo la formula data dalla estrapolazione di Richardson, l'errore $|y(1.2) - \eta(1.2; 0.1)|$ può essere stimato da

$$|y(1.2) - \eta(1.2; 0.1)| \simeq \left| \frac{\eta(x; 2h) - \eta(x; h)}{2^1 - 1} \right| = 2.442 - 2.4 = 0.042$$

I grafici dell' errore di discretizzazione, l'errore di arrotondamento e l'errore totale sono presentati sotto:



È chiaro che l'errore totale ha un minimo che dà il valore ottimale di h.

Casi particolari. Il problema dell'instabilità e esistenza della soluzione

Diciamo che un metodo numerico è instabile se un piccolo errore nelle condizioni iniziali (dovuto per esempio del troncamento) cresce in modo esponenziale man mano che il calcolo va avanti.

Esempio. Studiare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y - 3x, \\ y(0) = 1/3 + \epsilon \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

dove ϵ è una piccola perturbazione della condizione iniziale.

La soluzione generale del problema è

$$y(x) = x + c_1 e^{3x} + 1/3.$$

La soluzione del problema di Cauchy è allora:

$$y_\epsilon(x) = x + 1/3 + \epsilon\, e^{3x}.$$

Quindi $|y_\epsilon(x) - y_0(x)| = \epsilon\, e^{3x}$ cresce in modo esponenziale con l'alontanamento di x da x_0 ed ogni approccio numerico sarà molto instabile.

Equazioni alle differenze

Un equazione alle differenze di ordine k e' un equazione del tipo

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0$$

che coinvolge una variabole intera $n = 0, 1, \dots$ e una variabile dipendente discreta y_n.

Definizione. E' detta equazione alle differenze lineare a coeficienti costanti di ordine k, un espressione del tipo:

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \dots + a_k y_n = g(n), \qquad a_k \neq 0. \tag{4}$$

Se $g(n) = 0$, l'equazione si chiama omogenea.

Caso omogeneo

Sia

$$r^k + a_1 r^{k-1} + \dots + a_k = 0, \tag{5}$$

l'equazione charatteristica associata. Se r_i e' una radice del equazione (**??**) di moltiplicita' s, allora l'equazione **??** ha s soluzioni indipendenti ad essa associati:

$$y(r,0) = r^n,\ y(r,1) = n\,r^n,\ y(r,2) = n^2\,r^n, \dots,\ y(r,s-1) = n^{s-1}\,r^n.$$

In conclusione, la soluzione generale del equazione (**??**) e'

$$y_n = \sum_{r,m<s} A_{r,m} y(r,m),$$

dove $A_{r,s}$ sono costanti arbitrari in R.

Esempio. Risolvere l'equazione alle differenze omogenea

$$y_{n+2} + y_n = 0$$

con condizione iniziali $y_0 = 2$ e $y_1 = 1$.

Soluzione: Le radici della equazione charatteristica sono:

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \pm i = e^{\pm\pi/2}.$$

Le soluzioni dell'equazione alle differenze reali sono le succesioni:

$$y_n = A\cos(n\pi/2) + B\sin(n\pi/2).$$

Per soddisfare le condizioni iniziali poniamo:

$$\begin{cases} y_0 = A = 2 \\ y_1 = A\cos(n\pi/2) + B\sin(n\pi/2) = B = 1 \end{cases}$$

Qundi $A = 2$ e $B = 1$ e la soluzione dell'equazione delle differenze e':

$$y_n = 2\cos(n\pi/2) + \sin(n\pi/2).$$

Esempio. Risolvere l'equazione alle differenze non omogenea

$$y_{n+1} - 2y_n = q^n$$

con condizione iniziale $y_0 = 1$.

Soluzione: Le radici della equazione charatteristica sono:

$$r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2.$$

Le soluzioni dell'equazione alle differenze reali sono le succesioni:

$$y_n = A \times 2^n.$$

Soluzione particolare: $z_n = B\, q^n$ Affinche' sia una soluzione si deve avere:

$$B\, q^{n+1} - 2B\, q^n = q^n$$

Quindi $B = 1/(q-2)$ con $q \neq 2$. Tutte le soluzioni dell'equazione data sono del tipo:

$$y_n = A\, 2^n + q^n/(q-2), \quad q \neq 2.$$

La condizione iniziale fornisce:

$$y_0 = A + 1/(q-2) = 1 \Rightarrow \ A = 1 - 1/(q-2) = (q-3)/(q-2).$$

Qundi la soluzione dell'equazione delle differenze e':

$$y_n = 2^n(q-3)/(q-2) + q^n/(q-2).$$

Osserviamo che in un metodo lineare a k passi il valore di $y(x_n)$ si può stimare ricorsivamente tramite (**??**) purchè, oltre ad y_0, si assegnino altri $k-1$ valori iniziali:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{k-1}.$$

La scelta di tali valori è delicata, essi vanno calcolate con grande precisione riccorendo ad un metodo ad un passo, oppure allo svipuppo in serie della soluzione in un intorno del punto iniziale.

Applicando un metodo a k passi, con $k > 1$, al problema test con $f(x, y) = -\lambda\, y$:

$$\begin{cases} y'(x) = -\lambda y(x), & \lambda > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

l'equazione (**??**) diventa un'equazione alle differenze omogeneo:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \Rightarrow$$
$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} + h\lambda \sum_{i=0}^{k} \beta_i y_{n+i} = 0$$

Tale equazione ha k soluzioni fondamentali. Affinchè il metodo sia **convergente** deve succedere che per $h \to 0$ una soluzione dell'equazione alle differenze converga alla soluzione del problema test e le soluzioni spurie tendono a zero.

Proposizione Un metodo a k passi è convergente se e solo se è consistente e tutte le radici (reali e complessi) del polinomio

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i,$$

cadano all'interno del disco unitario e quelle di modulo uno sono semplici.

- *Adam-Moulton implicito:*

$$y_{n+4} - y_{n+3} = \frac{h}{24}(9f_{n+4} + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1}),$$

$$k = 4,$$
$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = -1,\ \alpha_4 = 1,$$
$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = \frac{1}{24},\ \beta_2 = -\frac{5}{24},\ \beta_3 = \frac{19}{24},\ \beta_4 = \frac{9}{24};$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0,$$
$$c_5 = 3^5 \cdot (-1) + 4^5 \cdot 1 - 5\,\frac{1 - 2^4 \cdot 5 + 3^4 \cdot 19 + 4^4 \cdot 9}{24}$$
$$= -3.17$$

Quindi il metodo risulta di quarto ordine. Il polinomio $\rho(z) = z^4 - z^3$ e le sue radici $z_1 = 1$ e $z_2 = z_3 = z_4 = 0$ cadano all'interno del disco unitario e quella di modulo uno è semplice. Il metodo, quindi, è convergente.

Esempio. Stimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-y}, \\ y(0) = 1 \quad \text{(condizione iniziale)} \end{cases}.$$

in $x = 0.4$ con $h = 0.2$ e con il metodo di Crank-Nicolson come correttore e Eulero esplicito come predittore.

Soluzione: Crank-Nicolson fornisce l'algorithmo:

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(e^{-y_n} + e^{-y_{n+1}}).$$

Al primo passo si ha:

$$y_1 = y_0 + 0.1(e^{-y_0} + e^{-y_1}) \ \rightarrow$$
$$y_1 = 1 + 0.1(e^{-1} + e^{-y_1}).$$

In questo caso lo schema non è esplicitabile, ma osserviamo che y_1 è la soluzione di un equazione non-lineare del tipo:

$$y_1 = \Phi_1(y_1), \text{con } \Phi_1(y) = 1 + 0.1(e^{-1} + e^{-y}).$$

Approssimiamo la soluzione per y_1 con lo schema di Punto Fisso, prendendo come valore iniziale una prima approssimazione y_1^0 ottenuta con Eulero esplicito:

$$y_1^0 = y_0 + h\, e^{-y_0} \simeq 1.07358.$$

Dopo miglioriamo questa stima facendo due passi con schema di Punto Fisso:

$$y_1^1 = \Phi_1(y_1^0) = 1.07097$$
$$y_1^2 = \Phi_1(y_1^1) = 1.07106$$

Accettiamo $y_1 = 1.07106$ e proseguiamo.

Sistemi di equazioni differenziali.
Equazioni differenziali ordinari di ordine superiore ad uno.

Un sistema di equazioni differenziali di ordine uno consiste in un insieme di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d\,y_1}{d\,x} = F_1(x, y_1, \ldots, y_k), & y_1(x_0) = y_{1,0} \\ \frac{d\,y_2}{d\,x} = F_2(x, y_1, \ldots, y_k), & y_2(x_0) = y_{2,0}, \\ \ldots\ldots & \\ \frac{d\,y_k}{d\,x} = F_k(x, y_1, \ldots, y_k), & y_k(x_0) = y_{k,0}. \end{cases} \tag{8}$$

Scriveremo questo sistema in forma matriciale usando vettori colonna:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\,y_1}{d\,x} \\ \frac{d\,y_2}{d\,x} \\ \ldots \\ \frac{d\,y_k}{d\,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x, y_1, \ldots, y_k) \\ F_2(x, y_1, \ldots, y_k) \\ \ldots \\ F_k(x, y_1, \ldots, y_k) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \ldots \\ y_k(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \ldots \\ y_{k,0} \end{bmatrix}$$

Per procedura numerica per risolvere il problema ai valori iniziali (8), si intende una procedura per costruire valori approssimati

$$\begin{bmatrix} \eta_{1,0} \\ \eta_{2,0} \\ \ldots \\ \eta_{k,0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta_{1,1} \\ \eta_{2,1} \\ \ldots \\ \eta_{k,1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \eta_{1,n} \\ \eta_{2,n} \\ \ldots \\ \eta_{k,n} \end{bmatrix}$$

della soluzione $\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_k(x) \end{bmatrix}$ nei punti

$$x_0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Ogni equazione differenziale di ordine superiore di uno può essere trasformato in un sistema di equazioni differenziali di ordine uno:

Esempio. Stimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - 5y' + 2y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

in $x = 0.4$ con $h = 0.2$ e con il metodo di Crank-Nicolson.

Soluzione: Posto

$$z_0(x) = y(x)$$
$$z_1(x) = y'(x)$$
$$z_2(x) = y''(x),$$

si ottiene il problema di Couchy equivalente:

$$\begin{cases} z_0' = z_1, & z_0(0) = 1 \\ z_1' = z_2, & z_1(0) = 1 \\ z_2' = -2\, z_0 + 5\, z_1, & z_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} z_0' \\ z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -2\, z_0 + 5\, z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} z_0(0) \\ z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per la stima in $x_1 = 0.2$ si ottiene

$$\Xi_1 = E \cdot \Xi_0 = \begin{bmatrix} 1.2059 \\ 1.0588 \\ 0.5882 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} y(0.2) \\ y'(0.2) \\ y''(0.2) \end{bmatrix}$$

Per la stima in $x_2 = 0.4$ si ottiene

$$\Xi_2 = E \cdot \Xi_1 = \begin{bmatrix} 1.4356 \\ 1.2385 \\ 1.2086 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} y(0.4) \\ y'(0.4) \\ y''(0.4) \end{bmatrix}$$

Conclusione: il metodo di Crank-Nicolson da per la stima di $y(0.4) \simeq 1.4356$.