Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2009/2010
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 17 giugno 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande preliminari.

1. (2 punti) Calcolare i seguenti limiti

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x^4+x-1} \\ \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-1}{x^4-1} \\ \lim_{x\to+\infty} e^{-1/x^2} \end{array}} \begin{array}{l} = 0 \\ = \infty \\ = 1 \end{array}$$

Domande teoriche.

1. (5 punti) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per una funzione reale di variabile reale.

2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicità del problema di Cauchy per le equazioni differenziali del prim'ordine.

Esercizi.

1. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(4\,e^x - 1)(e^x + 2)}{e^x - 1}.$$

2. (3 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x^2\, y\, dx\, dy$$

dove D è il dominio triangolare di vertici i punti $A = (0,0)$, $B = (0,1)$ e $C = (1,1)$.

3. (4 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &y'' + y' - 2y = 0 \\ &y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

4. (4 punti) Calcolare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^2 - 1)\,\sin y$$

5. (4 punti) Calcolare la lunghezza della curva piana data da

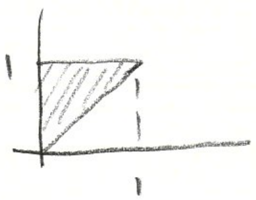
$$\begin{aligned} x &= \cos^3 \varphi \\ y &= \sin^3 \varphi \\ z &= 0 \end{aligned}$$

(Tale curva è detta "astroide").

① $$f(x) = \frac{(4e^x-1)(e^x+2)}{e^x-1}$$

Per la soluzione vedi Matematica 1 del 17/6/2010

---

② 

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$

o anche $\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$

$$\iint_D x^2 y \, dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y dx\, x^2 y = \int_0^1 dy\, y \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y = \int_0^1 dy\, \frac{y^4}{3} = \frac{1}{15}$$

---

③ $$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

(e^{-2x}, e^x)

$y(x) = Ae^{-2x} + Be^x$

$y' = -2Ae^{-2x} + Be^x$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A + B = 1 \end{cases}$$

$A = \frac{1}{3}$ $\quad B = \frac{5}{3}$

---

④ $f(x,y) = (x^2-1)\sin y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2-1)\cos y$$

$$\begin{cases} 2x\sin y = 0 \\ (x^2-1)\cos y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (1-x^2)\sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\cos y$$

① $\begin{cases} x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

② $\begin{cases} \sin y = 0 \\ (x^2-1)\cos y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = k\pi \\ x = \pm 1 \end{cases}$

① $H = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det H > 0$ $\begin{cases} \text{massimi per } k \text{ pari} \\ \text{minimi } k \text{ dispari} \end{cases}$

4 continue

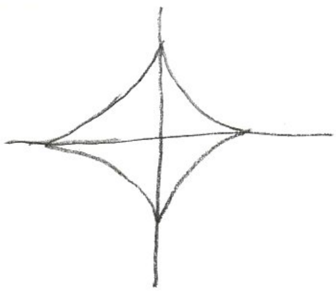
(2) $H = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det H < 0$

SELLE

---

(5) $\begin{cases} x = \cos^3 \varphi \\ y = \sin^3 \varphi \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = -3\cos^2\varphi \sin\varphi \\ y' = 3\sin^2\varphi \cos\varphi \end{cases}$

Curva non regolare nei punti $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$



$$L = 4\int_0^{\pi/2} \|\gamma'(\theta)\|\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} 3\sqrt{\cos^4\varphi \sin^2\varphi + \sin^4\varphi \cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}\, d\varphi = 12\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 12\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6$$