Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2009/2010
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 26 febbraio 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (4 punti) Risolvere

$$x^4 + x^2 - 6 = 0$$
$$x^4 - x^2 - 6 < 0$$

Domande teoriche.

1. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per una funzione reale di variabile reale.
2. (5 punti) Enunciare il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie del second'ordine a coefficienti costanti e dimostrarne esistenza ed unicità della soluzione.

Soluzioni Domande elementari 1) $x^4+x^2-6=0 \quad x^2=t \quad t^2+t-6=0$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -3 \to \text{NO } x \\ 2 \to \boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{2}} \end{cases}$

2) $x^4-x^2-6<0$

$x^2=t \quad t^2-t-6=0 \qquad -2<t<3$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \qquad t=x^2 \Rightarrow -2<x^2<3 \Rightarrow 0<x^2<3$

$\Rightarrow \boxed{-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}}$

Esercizi.

1. (5 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2-3}}.$$

2. (3 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \left(y + \sqrt{1+x}\right) dx\, dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x+1\}$.

3. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 3\,y' + 2\,y = 2\,e^x$$

con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4. (4 punti) Calcolare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x\,y\,e^{x^2-y^2}$$

Soluzioni

1) Dominio $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3} > 0$

$x^2+x-6=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

$x^2-3=0 \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$

	-3	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	
N	+	−	−	−	+
D	+	+	−	+	+
	+	−	+	−	+

$\{x<-3\} \cup \{-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\} \cup \{x>2\}$

$f(-3) = f(2) = 0 \qquad f(0) = \sqrt{2}$

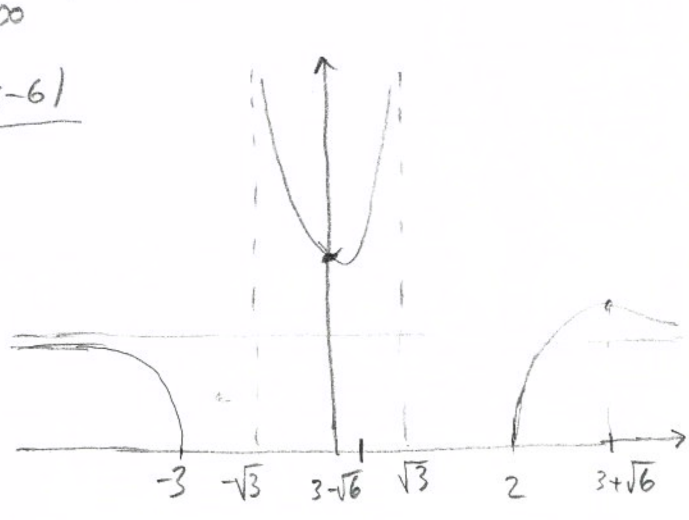
$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x$

$\lim_{x\to -\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+x-6}}\ \dfrac{(2x+1)(x^2-3) - 2x(x^2+x-6)}{(x^2-3)^2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{}\ \dfrac{-x^2+6x-3}{(x^2-3)^2}$

$f'(x) = 0 \qquad x_{1,2} = 3\pm\sqrt{6} \approx \begin{cases} 0.55 \\ 5.45 \end{cases}$



2) $\iint_D \left(y+\sqrt{1+x}\right) dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} dy \left(y+\sqrt{1+x}\right) =$

$= \int_{-1}^{0} dx \left\{ \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x+1} + (x+1)^{3/2} \right\} = \int_{-1}^{0} dx \left[\frac{(x+1)^2}{2} + (x+1)^{3/2} \right] =$

$= \left[\frac{(x+1)^3}{6}\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\Big|_{-1}^{0} \right] = \frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{5+12}{30} = \frac{17}{30}$

3) $y'' + 3y' + 2y = 2e^x$ $\qquad y(0)=0 \qquad y'(0)=1$

$y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$ $\qquad$ Per l'omogenea: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$

$y_p(x) = \alpha e^x$

$y_p' = y_p'' = \alpha e^x$ $\qquad y_{om}(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}$

$(\alpha + 3\alpha + 2\alpha)e^x = 2e^x$ $\qquad y_{GEN}(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + \frac{1}{3}e^x$

$6\alpha = 2 \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$ $\qquad y' = -2Ae^{-2x} - Be^{-x} + \frac{1}{3}e^x$

$y(0)=0 \longrightarrow \begin{cases} A + B + \frac{1}{3} = 0 \\ -2A - B + \frac{1}{3} = 1 \end{cases}$ $\qquad -A + \frac{2}{3} = 1 \qquad \boxed{A = -\frac{1}{3}}$

$y'(0)=1 \longrightarrow$ $\qquad \boxed{B=0}$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x}$$

4) $f(x,y) = xye^{x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y + 2x^2y)e^{x^2-y^2} = y(1+2x^2)e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x - 2xy^2)e^{x^2-y^2} = x(1-2y^2)e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = [4xy + 2xy(1+2x^2)]e^{x^2-y^2} = 2xy(3+2x^2)e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = [-4xy - 2xy(1-2y^2)]e^{x^2-y^2} = -2xy(3-2y^2)e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = [1+2x^2 - 2y^2(1+2x^2)]e^{x^2-y^2} = (1+2x^2)(1-2y^2)e^{x^2-y^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(1+2x^2) = 0 \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(H) = -1 < 0 \qquad \text{SELLA}$$