

**Corso di Laurea in Ingegneria Edile**  
**Anno Accademico 2009/2010**  
**Analisi Matematica**

Nome .....

N. Matricola .....

Ancona, 15 luglio 2010

**Istruzioni.**

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

**Domande preliminari.**

1. (2 punti) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^4 + x - 1}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x - 1}{2x^2 - 1}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$$

**Domande teoriche.**

1. (5 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per una funzione reale di variabile reale.
2. (4 punti) Introdurre la definizione di integrale curvilineo di prima specie.

## Esercizi.

1. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(4e^{-x} - 1)(e^{-x} + 2)}{e^{-x} - 1}.$$

2. (3 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_D x y^2 dx dy$$

dove  $D$  è il dominio triangolare di vertici i punti  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, 1)$  e  $C = (-1, 1)$ .

3. (4 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= 0 \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

4. (4 punti) Calcolare e classificare i punti critici della funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (y^2 - 1) \cos x$$

5. (4 punti) Calcolare la lunghezza della curva data da

$$\begin{aligned} x &= t - 1 \\ y &= 1 - t^2 \\ z &= 2 + \frac{2}{3}t^3, \end{aligned}$$

$$t \in [0, 1].$$

---

$$\begin{aligned} 5) \quad \ell &= \int_{\gamma} ds = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (-2t)^2 + (2t^2)^2} dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} dt = \int_0^1 \sqrt{(1 + 2t^2)^2} dt = \int_0^1 (1 + 2t^2) dt \\ &= \left[ t + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

## Domande prelesione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^4 + x - 1} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x - 1}{2x^2 - 1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0$$

## Esercizi

$$1) f(x) = \frac{(4e^{-x} - 1)(e^{-x} + 2)}{e^{-x} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \mp \infty$$

$$\text{Domini } x \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = 0 \quad \text{quando } 4e^{-x} - 1 = 0$$

$$e^{-x} = \frac{1}{4}, \quad e^x = 4 \quad x = 2 \ln 2 \approx 1.4$$

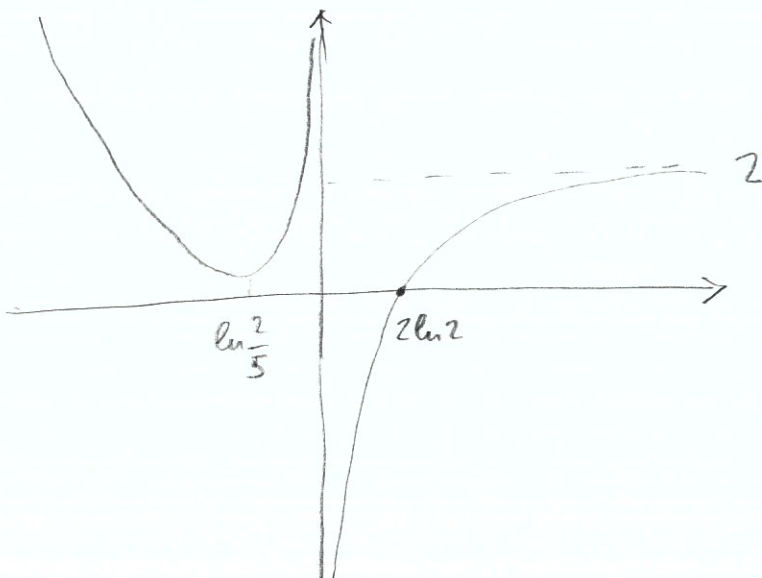
$$f'(x) = \frac{(e^{-x} - 1)[-4e^{-x}(e^{-x} + 2) - e^{-x}(4e^{-x} - 1)] + e^{-x}(4e^{-x} - 1)(e^{-x} + 2)}{(e^{-x} - 1)^2} =$$

$$= e^{-x} \frac{-4e^{-2x} + 8e^{-x} + 5}{(e^{-x} - 1)^2}$$

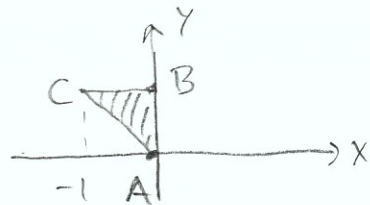
$$f'(x) = 0 \quad (e^{-x})_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-4} = \begin{cases} +\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

NON ACC.

$$e^{-x} = \frac{5}{2} \quad e^x = \frac{2}{5} \quad x = \ln \frac{2}{5} \approx -0.9$$



$$2) \iint_D xy^2 dx dy$$



$$\iint = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 dy xy^2 =$$

$$= \int_{-1}^0 dx x \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-x}^1 = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 dx x (x^3 + 1) = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{10}$$

$$3) y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$p^2 + 2p + 5 = 0$$

$$y(x) = A e^{(-1-2i)x} + B e^{(-1+2i)x}$$

$$y'(x) = A(-1-2i)e^{(-1-2i)x} + B(-1+2i)e^{(-1+2i)x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A(-1-2i)+B(-1+2i)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A(-1-2i+1-2i)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4iA=1 \\ B=-A \end{cases}$$

$$A = \frac{i}{4} \quad B = -\frac{i}{4} \quad y(x) = e^{-x} \frac{e^{-2ix} - e^{2ix}}{4} i = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$$

$$4) f(x, y) = (y^2 - 1) \cos x$$

$$f_x = (1 - y^2) \sin x$$

$$f_{xx} = (1 - y^2) \cos x$$

$$f_y = 2y \cos x$$

$$f_{yy} = 2 \cos x$$

$$f_{xy} = -2y \sin x$$

$$\begin{cases} (1 - y^2) \sin x = 0 \\ 2y \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow \sin x = 0 & x = 0, \pi, \dots \pm k\pi \\ \cos x = 0 \rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

Punti critici:  $(k\pi, 0)$  e  $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pm 1)$

①

②

$$\textcircled{1} H = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \quad \det(H) > 0 \quad \begin{cases} k \text{ pari minimo} \\ k \text{ dispari massimo} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} H = \begin{pmatrix} 0 & (\pm 2)^k \\ (\pm 2)^k & 0 \end{pmatrix} \quad \det(H) < 0 \quad \underline{\text{selle}}$$