Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2009/2010
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 23 gennaio 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (4 punti) Risolvere le equazioni

$$x^3 - 2\,x^2 - x = 0$$
$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

Domande teoriche.

1. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange per una funzione reale di variabile reale.
2. (5 punti) Enunciare le condizioni sulla matrice Hessiana che corrispondono agli estremi locali di una funzione reale di due variabili reali.

Esercizi.

1. (5 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x}$$

nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

2. (3 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D (x^2 + 2y^2)\, dx\, dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

3. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

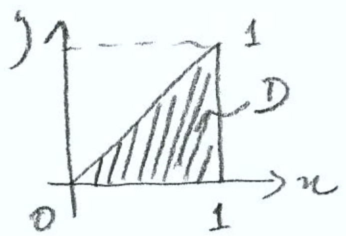
$$y'' - 5y' + 6y = 5 \sin x$$

con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. (4 punti) Calcolare e classificare gli estremi liberi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin^2 x + \cos y$$

2



$$\iint_D (x^2+2y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\,(x^2+2y^2) =$$

$$= \int_0^1 dx \left[x^2 y + 2\frac{y^3}{3}\right]_0^x = \int_0^1 dx \left(x^3 + \frac{2}{3}x^3\right) =$$

$$= \int_0^1 dx\, \frac{5}{3}x^3 = \frac{5}{3}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

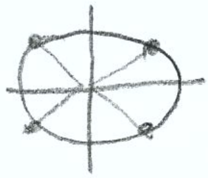
Domande elementari

$x^3-2x^2-x=0$; $x(x^2-2x-1)=0$

$x_1=0$

$x_{2,3}=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$

$\cos^2 x-\frac{1}{2}=0$; $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$

Esercizi

1) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos x}$ D: $1+\cos x\neq 0$ $x\neq\pm\pi$

$f(x)=f(-x)$

$f(x)\geq 0\ \forall x$

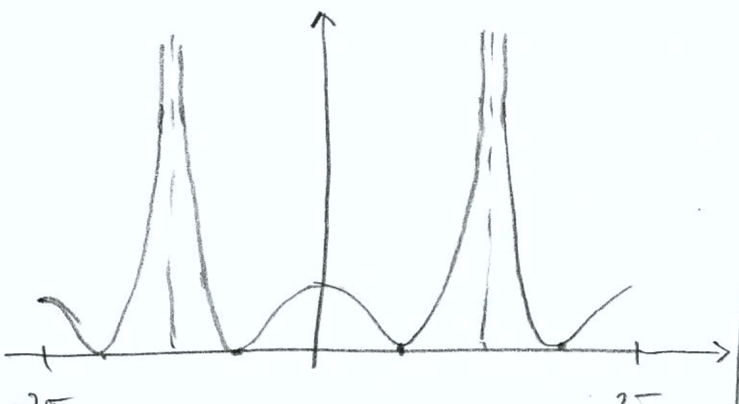
$\lim_{x\to\pm\pi^{\pm}} f(x)=+\infty$ $x=\pm\pi$ asintoti verticali

$f(0)=\frac{1}{2}$ $f(x)=0$ $\cos x=0$ $x=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3}{2}\pi$

$$f'(x)=\frac{-2\cos x\sin x(1+\cos x)+\sin x\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}=\cos x\sin x\frac{\cos x-2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=-\cos x\sin x\frac{2+\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$f'(x)=0$ $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,$
$\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3}{2}\pi$



3) $y(x)=y_{om}(x)+y_p(x)$

$y_p(x)=A\cos x+B\sin x$

$-A\cos x-B\sin x-5(-A\sin x+B\cos x)+$
$+6(A\cos x+B\sin x)=5\sin x$

$$\begin{cases}5A-5B=0\\5A+5B=5\end{cases}$$

$A=B=\frac{1}{2}$ $y_p(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$

Omogenea: $\rho^2-5\rho+6=0$ $\rho_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}2\to e^{2x}\\3\to e^{3x}\end{cases}$

Soluzione generale: $y(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{3x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$

$y'(x)=2\alpha e^{2x}+3\beta e^{3x}+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$

Condizioni iniziali: $\begin{cases} \alpha+\beta+\frac{1}{2}=1 \\ 2\alpha+3\beta+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{1}{2} \\ 2\alpha+3\beta=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \beta=-\frac{3}{2} \\ \alpha=2 \end{cases}$

La soluzione è $y(x)=2e^{2x}-\frac{3}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$

---

(4) $f(x)=\sin^2 x+\cos y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\sin x\cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(\cos^2 x-\sin^2 x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

Punti critici: $\begin{cases} 2\sin x\cos x=0 \\ \sin y=0 \end{cases}$ $\qquad x=k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi$

$y=l\pi \qquad k,l=0,\pm1,\pm2,\dots$

Sono di due tipi $\quad T^{(1)}_{kl}=(k\pi,l\pi)$ e $T^{(2)}_{kl}=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,l\pi\right)$

Matrice Hessiana:

$T^{(1)}_{kl} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (-1)^{l-1} \end{pmatrix}$

l pari: punto di sella

l dispari: punto di minimo

$T^{(2)}_{kl} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & (-1)^{l-1} \end{pmatrix}$

l pari: punto di massimo

l dispari: punto di sella