Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2009/2010
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 06 settembre 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande preliminari.

1. (2 punti) Calcolare i seguenti limiti

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \\ \lim_{x\to +\infty} e^x \sin x \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x} \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x^2} \end{array}}$$

Domande teoriche.

1. (5 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione reale di variabile reale.
2. (4 punti) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$ una funzione reale. Dare la definizione di derivabilità e differenziabilità in un punto del dominio ed in tutto il dominio ed enunciare le condizioni di necessità e sufficienza che legano derivabilità e differenziabilità (cioè: una funzione derivabile è sempre differenziabile? E una funzione differenziabile è sempre derivabile?).

Esercizi.

1. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{|x-\pi/2|}\cos 2x$$

nell'intervallo $x \in [0, \pi]$.

2. (3 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D (x^2 + 2\,y^2)\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$.

3. (4 punti) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\boxed{y' = y^3\cos x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Determinare quindi la soluzione particolare con la condizione iniziale $y(0) = 1$ e stabilire il dominio in cui tale soluzione è definita.

4. (4 punti) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = \sin^2 x\,\cos y$$

e stabilirne la natura mediante lo studio della matrice hessiana.

5. (4 punti) Calcolare la lunghezza della curva piana data da

$$x = \sin t - t\cos t$$
$$y = t\sin t + \cos t,$$

$t \in [0, \pi/2]$.

Domande preliminari

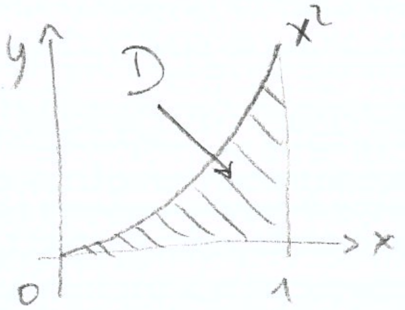
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \; ; \quad \lim_{x\to +\infty} e^x \sin x \quad \text{NON ESISTE}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x} = 0 \; ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x^2} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\frac{1}{x} = \infty$$

Esercizi

① vedi Matematica I

② $\displaystyle\iint_D (x^2+2y^2)\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^4\}$



$$\iint = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\,(x^2+2y^2) =$$

$$= \int_0^1 dx \left[x^2y + 2\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} = \int_0^1 dx \left(x^4 + \frac{2}{3}x^6\right) =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{21}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{21} = \frac{31}{105}$$

③ $y' = y^3 \cos x \; ; \quad \dfrac{y'}{y^3} = \cos x \; ; \quad -\dfrac{1}{2y^2} = \sin x + C \; ;$

$y^2 = -\dfrac{1}{2(\sin x + C)} \; ; \quad y(x) = \pm\sqrt{-\dfrac{1}{2(\sin x + C)}}$ deve essere $\sin x + C < 0$

$y(0) = 1 \implies 1 = +\sqrt{-\dfrac{1}{2C}} \qquad C = -\dfrac{1}{2} \qquad y(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-2\sin x}}$

⑤ $\gamma = (\sin t - t\cos t,\ t\sin t + \cos t) \qquad t \in [0, \pi/2]$

$\gamma' = (\cos t + t\sin t - \cos t,\ t\cos t + \sin t - \sin t) = (t\sin t,\ t\cos t)$

$\|\gamma'\| = \sqrt{t^2} = t \qquad L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \|\gamma'\|\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$

4) $f(x,y) = \sin^2 x \cos y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin 2x \cos y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin^2 x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos 2x \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin 2x \sin y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin^2 x \cos y$$

Punti critici:
$$\begin{cases} \sin 2x \cos y = 0 \\ \sin^2 x \sin y = 0 \end{cases}$$

(i) $\sin 2x = 0$; $2x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$; $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ e } \pm\pi \\ \sin^2 x \sin y = 0 \quad \forall y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\pi/2 \\ \sin y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\pi/2 \\ y = 0, \pm\pi \end{cases}$$

$P_1(y) = (0,y)$ $P_2(y) = (\pi, y)$ $P_3(y) = (-\pi, y)$

$P_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ $P_5 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ $P_6 = (\frac{\pi}{2}, -\pi)$

$P_7 = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ $P_8 = (-\frac{\pi}{2}, \pi)$ $P_9 = (-\frac{\pi}{2}, -\pi)$

(ii) $\begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ $P_{10} = (0, \frac{\pi}{2})$ $P_{11} = (\pi, \frac{\pi}{2})$ $P_{12} = (-\pi, \frac{\pi}{2})$

$P_{13} = (0, -\frac{\pi}{2})$ $P_{14} = (\pi, -\frac{\pi}{2})$ $P_{15} = (-\pi, -\frac{\pi}{2})$

Sono isolati P_1, P_4, P_7 (P_{10} e P_{13} già compresi in $P_1(y)$)

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2\cos y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H_7$$

H_4 e H_7 definite negative P_4 e P_7 minimi