Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2019/2020
Analisi Matematica - Appello del 13 luglio 2020

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 luglio 2020

1. (9 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

   determinandone: campo di esistenza, intersezioni con gli assi, asintoti verticali ed asintoti orizzontali, proprietà di simmetria (se presenti), limiti notevoli, punti di non derivabilità, massimi e minimi, asintoti obliqui (se presenti) e grafico qualitativo.

2. (8 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \left(x^2\,\sin(x^2\,y)\right)dx\,dy$$

   dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi/2 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1/x\}$.

3. (6 punti) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = y^2 - 1$$

   e risolvere quindi il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(0) = 0$.

4. (7 punti) Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(2\,x)^n$$

PROVA SCRITTA ANALISI MATEMATICA

13/7/2020 ING. EDILE

— o — o —

1) $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

Dominio : $x \neq 0$ $\quad x^2-1 \geq 0$ $\qquad x \neq 0$ $\quad \{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1\}$

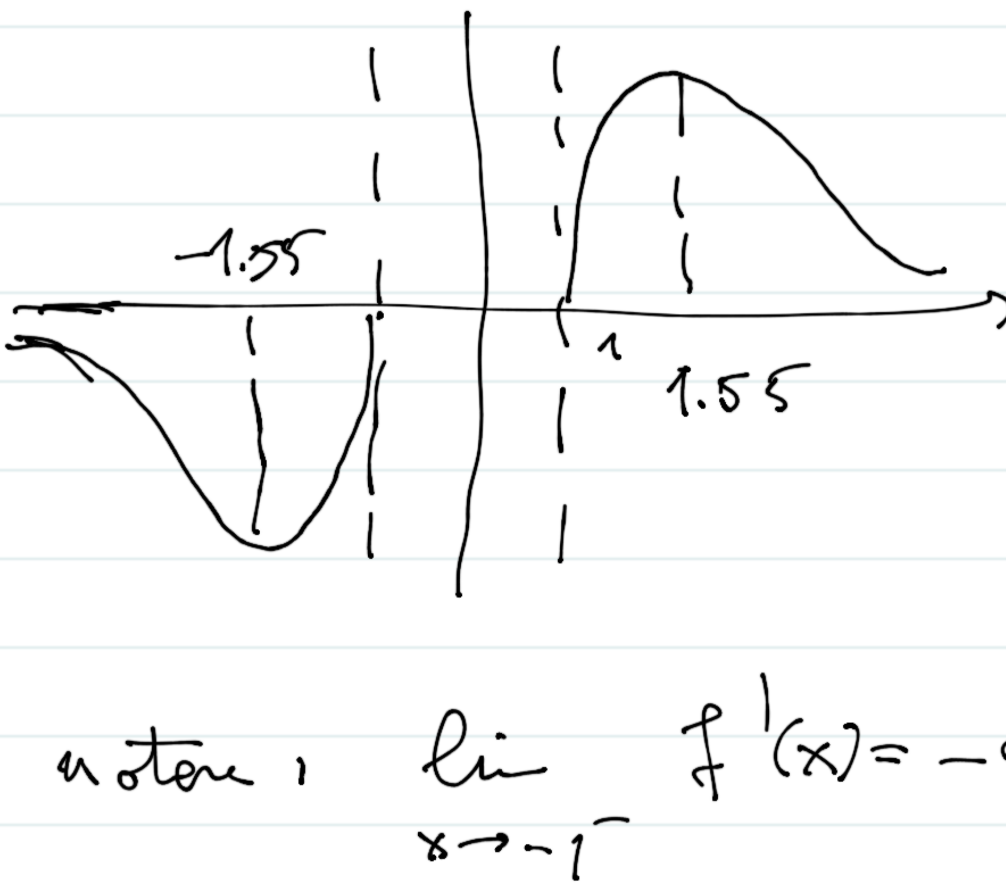
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} + \frac{1}{x}\,\frac{\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\;\frac{1+2x^2-x^4}{(x+x^3)^2}$$

$f'=0$ per $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} \approx \pm 1.55$

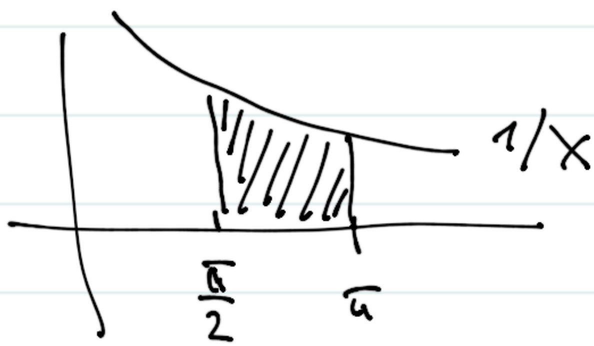


Da notare: $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$

2) $\iint_D \left(x^2 \sin(x^2 y)\right) dx\, dy$

D :



$$\int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \int_0^{1/x} \sin(x^2 y)\, dy = \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \left[-\frac{\cos(x^2 y)}{x^2}\right]_0^{1/x} dx$$

$$= -\int_{\pi/2}^{\pi} \left[\cos x - 1\right] dx = -\left[\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi + 2}{2}$$

3) $\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{dy}{y^2-1} = dx$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left\{ \ln(1-y) - \ln(1+y) \right\} = x + c$$

$$\ln \frac{1-y}{1+y} = 2(x+c)$$

$$\frac{1-y}{1+y} = e^{2(x+c)}$$

$$1-y = (1+y)\, e^{2(x+c)}$$

$$y\left(e^{2(x+c)} + 1\right) = 1 - e^{2(x+c)}$$

$$y(x) = \frac{1 - e^{2(x+c)}}{1 + e^{2(x+c)}}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$y(x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

4) $$\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n 2^n x^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2$$

$$R = \frac{1}{2}$$