Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2013/2014
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 8 novembre 2014

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{e^{-|3\,x+2|}}{x^2-4}.$$

Soluzione. Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 2\}$. Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale ed $x = \pm 2$ sono asintoti verticali. Intersezioni con gli assi: nessuna con l'asse x, mentre $f(0) = -e^{-2}/4$.
Prima di calcolare le derivate risolviamo il valore assoluto:

$$f(x) = \frac{e^{-(3x+2)}}{x^2-4}, \qquad x > -\frac{2}{3}$$
$$f(x) = \frac{e^{3x+2}}{x^2-4}, \qquad x < -\frac{2}{3}$$

e quindi le derivate sono

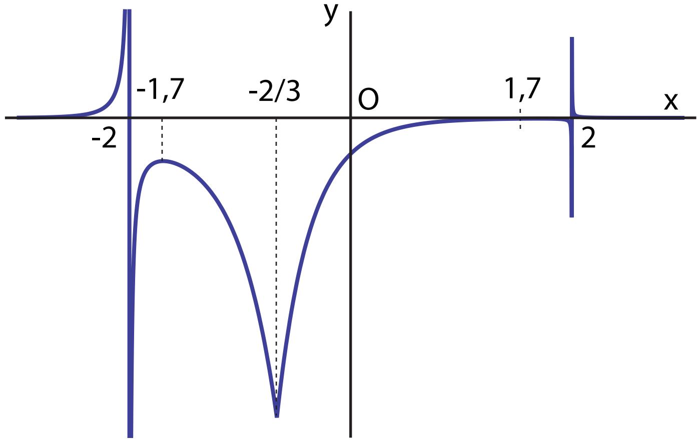
$$\frac{-3\,e^{-(3x+2)}\,(x^2-4) - 2\,x\,e^{-(3x+2)}}{(x^2-4)^2} = \frac{-3\,x^2-2\,x+12}{(x^2-4)^2}\,e^{-(3x+2)}, \qquad x > -\frac{2}{3}$$
$$\frac{3\,e^{3x+2}\,(x^2-4) - 2\,x\,e^{3x+2}}{(x^2-4)^2} = \frac{3\,x^2-2\,x-12}{(x^2-4)^2}\,e^{-(3x+2)}, \qquad x < -\frac{2}{3}$$

Zeri della derivata:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{3}, \qquad x > -\frac{2}{3}$$
$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{3}, \qquad x < -\frac{2}{3}$$

Ma le radici x_1 ed x_3 non sono accettabili, in quanto fuori dall'intervallo dove l'espressione corrispondente rappresenta la derivata della funzione, quindi i soli punti stazionari sono

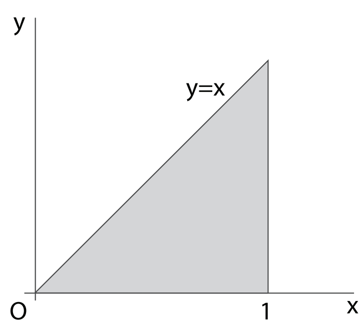
$$\frac{-1+\sqrt{37}}{3} \approx 1,7 \quad \text{e} \quad \frac{1-\sqrt{37}}{3} \approx -1,7$$



In $x = -2/3$ la funzione presenta un punto angoloso che, da quanto si desume dagli altri elementi raccolti, è un punto di minimo locale. Il grafico qualitativo è esposto nella figura.

2. Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = x^2 e^{x\,y}$ sulla regione del piano cartesiano delimitata dall'asse x, dalla retta $x = 1$ e dalla bisettrice del I quadrante.

Soluzione. Il dominio d'integrazione è illustrato nella figura.



$$\int_0^1 dx \int_0^x dy\, x^2 e^{x\,y} = \int_0^1 dx\, x^2 \int_0^x dy\, e^{x\,y} = \int_0^1 dx\, x^2 \left[\frac{e^{x\,y}}{x}\right]_0^x$$
$$\int_0^1 dx\, x \left(e^{x^2} - 1\right) = \left[\frac{e^{x^2}}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$$

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{x}{\sin y}$$
$$y(0) = \pi/3.$$

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili.

$$\begin{aligned}\sin y\, dy &= x\, dx \\ -\cos y &= \frac{x^2}{2} + C\end{aligned}$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo che $-\cos \pi/3 = C$, quindi $C = -1/2$, $\cos y = (1-x^2)/2$ e la soluzione è

$$y(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$$

4. Determinare le proprietà di convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}.$$

Soluzione. L'integrale è improprio perchè $1 + \cos x = 0$ per $x = \pi$. Per x vicino a π lo sviluppo di Taylor dà

$$\cos x = \cos \pi - (x-\pi)\, \sin \pi - \frac{(x-\pi)^2}{2}\, \cos \pi + o((x-\pi)^3) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$$

e quindi

$$\sqrt{1+\cos x} \sim \frac{x-\pi}{\sqrt{2}}, \quad x \to \pi$$

Siccome

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{x-\pi}\, dx = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sqrt{2}}{x}\, dx$$

diverge, diverge pure l'integrale di partenza per il criterio del confronto asintotico.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\, 2^n}\, x^n.$$

Soluzione. Usando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n\, 2^n}{(n+1)\, 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

e quindi $R = 2$.

6. Giustificare al meglio che

$$\sin\left(\frac{99}{100}\pi\right) \approx \frac{\pi}{100}$$

usando le serie di Taylor.

Soluzione. Notiamo che $(99/100)\,\pi$ è molto vicino a π. Quindi, usando la serie di Taylor attorno a π,

$$\sin\left(\pi - \frac{1}{100}\pi\right) = \sin\pi - \frac{1}{100}\pi\, cos\pi + ... = \frac{1}{100}\pi + ...$$

7. Determinare il dominio naturale della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{\cos y}{\sin x}}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano cartesiano. Scrivere quindi le derivate parziali prime della funzione e calcolarle nel punto $(\pi/2, 0)$.

Soluzione. Deve essere

$$\frac{\cos y}{\sin x} \geq 0, \quad \sin x \neq 0$$

le cui soluzioni sono date dall'unione insiemistica delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} \cos y \geq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos y \leq 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

e che sono date da

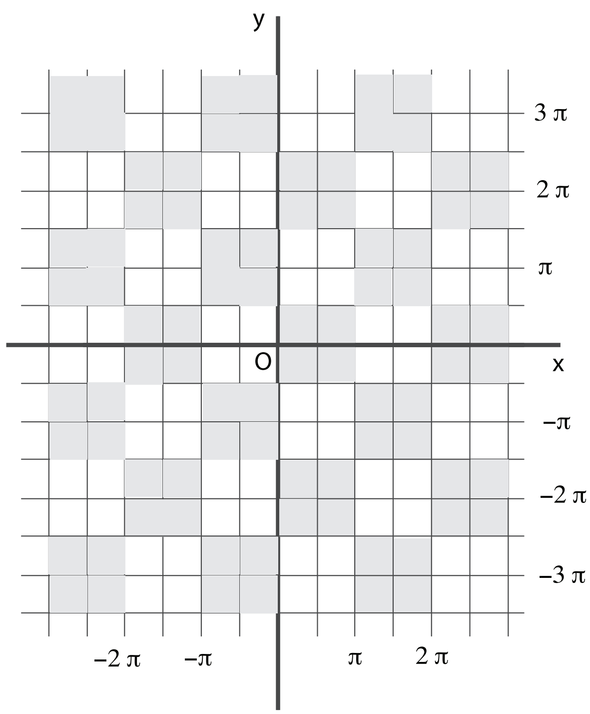
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \leq y \leq \frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \\ 2\,m\,\pi < x < (2\,m+1)\,\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2} + 2\,n\,\pi \\ (2\,m+1)\,\pi < x < (2\,m+2)\,\pi \end{cases}$$

per $n, m \in \mathbb{Z}$. Il dominio è rappresentato dalla zona ombreggiata nella figura. Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin x}{\cos y}}\,\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin x}{\cos y}}\,\frac{\sin y}{\sin x}$$

che, nel punto $(\pi/2, 0)$ sono entrambe nulle.



y
x
O
3 π
2 π
π
−π
−2 π
−3 π
−2 π
−π
π
2 π

Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2013/2014
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 8 novembre 2014

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{e^{-|1-2\,x|}}{4\,x^2-9}.$$

Soluzione. Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 3/2\}$. Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale ed $x = \pm 3/2$ sono asintoti verticali. Intersezioni con gli assi: nessuna con l'asse x, mentre $f(0) = -e^{-1}/9$.
Prima di calcolare le derivate risolviamo il valore assoluto:

$$f(x) = \frac{e^{2x-1}}{4\,x^2-9}, \qquad x < \frac{1}{2}$$
$$f(x) = \frac{e^{1-2x}}{4\,x^2-9}, \qquad x > \frac{1}{2}$$

e quindi le derivate sono

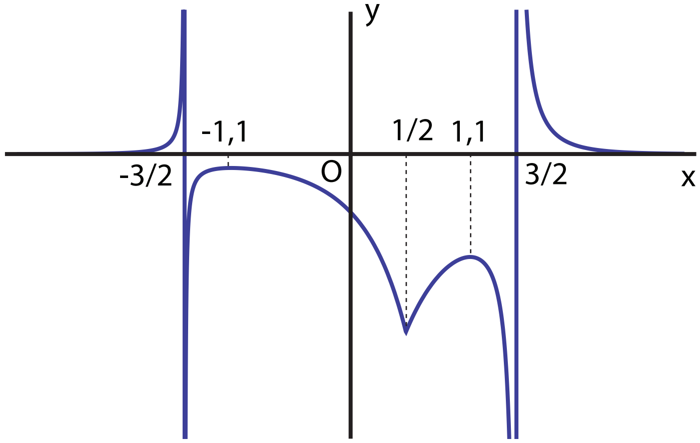
$$\frac{2\,e^{2x-1}\,(4\,x^2-9) - 8\,x\,e^{2x-1}}{(4\,x^2-9)^2} = \frac{8\,x^2-8\,x-18}{(x^2-4)^2}\,e^{2x-1}, \qquad x < \frac{1}{2}$$
$$\frac{-2\,e^{1-2x}\,(4\,x^2-9) - 8\,x\,e^{1-2x}}{(4\,x^2-9)^2} = \frac{-8\,x^2-8\,x+18}{(x^2-4)^2}\,e^{1-2x}, \qquad x > \frac{1}{2}$$

Zeri della derivata:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}, \qquad x < \frac{1}{2}$$
$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}, \qquad x > \frac{1}{2}$$

Ma le radici x_1 ed x_3 non sono accettabili, in quanto fuori dall'intervallo dove l'espressione corrispondente rappresenta la derivata della funzione, quindi i soli punti stazionari sono

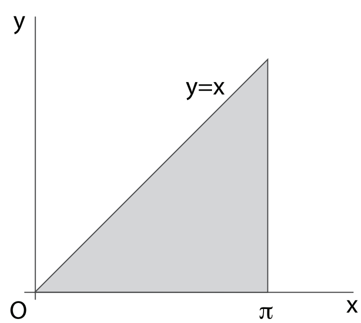
$$\frac{1-\sqrt{10}}{2} \approx -1,1 \quad \text{e} \quad \frac{-1+\sqrt{10}}{2} \approx 1,1$$



In $x = 1/2$ la funzione presenta un punto angoloso che, da quanto si desume dagli altri elementi raccolti, è un punto di minimo locale. Il grafico qualitativo è esposto nella figura.

2. Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = x^2 \cos(x\, y)$ sulla regione del piano cartesiano delimitata dall'asse x, dalla retta $x = \sqrt{\pi}$ e dalla bisettrice del I quadrante.

Soluzione. Il dominio d'integrazione è illustrato nella figura.



$$\int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_0^x dy\, x^2 \cos(x\, y) = \int_0^{\sqrt{\pi}} dx\, x^2 \left[\frac{\sin(x\, y)}{x}\right]_0^x =$$
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} dx\, x \sin(x^2) = \left[-\frac{\cos(x^2)}{2}\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1$$

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{\cos x}{y-1}$$
$$y(0) = 1.$$

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili.

$$\begin{aligned}
&y' = \frac{\cos x}{y-1} \\
&(y-1)\,dy = \cos x\,dx \\
&\frac{(y-1)^2}{2} = \sin x + C
\end{aligned}$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo che $C = 0$, quindi $y - 1 = \pm\sqrt{2\sin x}$ e la soluzione è

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{2\sin x}.$$

Il problema ammette quindi due soluzioni.

4. Determinare le proprietà di convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}.$$

Soluzione. L'integrale è improprio perchè $1 - \sin x = 0$ per $x = \pi/2$. Usando Taylor abbiamo

$$\begin{aligned}
&1 - \sin x \sim 1 - \left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&\sqrt{1-\sin x} \sim \frac{x}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

e quindi l'integrale diverge per il criterio del confronto asintotico.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\,(\ln n)\,x^n.$$

Soluzione. Usando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n}\,\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 3$$

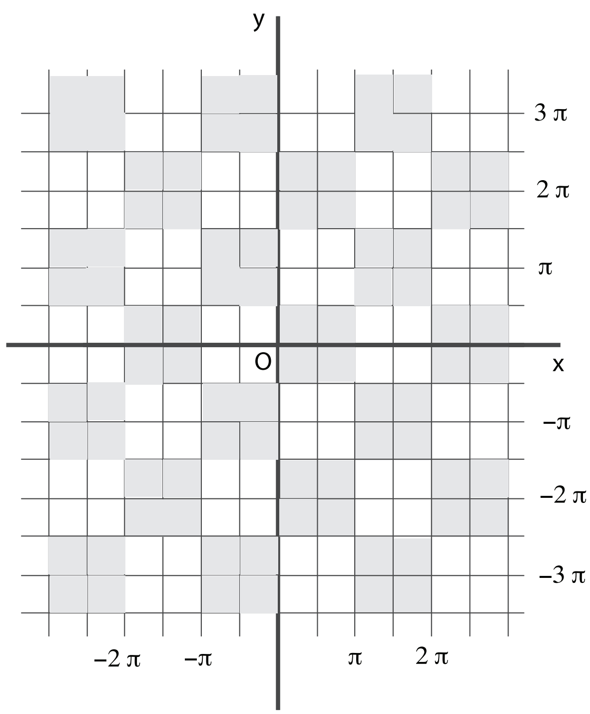
quindi $R = 1/3$.

6. Giustificare al meglio che
$$\cos\left(\frac{49}{100}\pi\right) \approx \frac{\pi}{100}$$
usando le serie di Taylor.

Soluzione. Notiamo che $(49/100)\pi$ è molto vicino a $\pi/2$. Quindi, usando Taylor,
$$\cos\left(\frac{49}{100}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{100}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{100}\pi\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + ... = \frac{1}{100}\pi$$

7. Determinare il dominio naturale della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{\cos x}{\sin y}}$$
e rappresentarlo graficamente sul piano cartesiano. Scrivere quindi le derivate parziali prime della funzione e calcolarle nel punto $(0,\pi/2)$.

Soluzione. Deve essere
$$\frac{\cos x}{\sin y} \geq 0, \quad \sin y \neq 0$$
le cui soluzioni sono date dall'unione insiemistica delle soluzioni dei sistemi
$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin y > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin y < 0 \end{cases}$$
e che sono date da
$$\begin{aligned} &-\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \\ &2\,m\,\pi < y < (2\,m+1)\,\pi \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \leq x \leq \frac{3\,\pi}{2} + 2\,n\,\pi \\ &(2\,m+1)\,\pi < y < (2\,m+2)\,\pi \end{aligned}$$
Il dominio è rappresentato dalla zona ombreggiata nella figura. Le derivate parziali sono
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin y}{\cos x}}\,\frac{\sin x}{\sin y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin y}{\cos x}}\,\frac{\cos y}{\sin^2 y} \end{aligned}$$
che, nel punto $(0,\pi/2)$ sono entrambe nulle.


y
x
O
3 π
2 π
π
−π
−2 π
−3 π
−2 π
−π
π
2 π