Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 19 febbraio 2011

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Esercizi.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{x^2 + x - 2}.$$

2. (3 punti) Calcolare la media della funzione
$$f(x) = \frac{\cos\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
nell'intervallo $[0, \pi]$.

3. (5 punti) Per quali valori di α il membro di destra dell'equazione differenziale
$$f''(x) + f'(x) - 2\,f(x) = 2\,e^{\alpha x}$$
è soluzione dell'omogenea associata? Risolvere quindi il problema di Cauchy con $\alpha = -1$ e le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

4. (4 punti) Calcolare e classificare gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = a\,x^2 + y^3 - 3\,x\,y$$
al variare del parametro reale a.

Domande teoriche.

1. Enunciare il teorema degli zeri per una funzione reale di variabile reale. Utilizzando tale teorema e le proprietà delle funzioni coinvolte, dimostrare che la funzione

$$f(x) = \sin x - e^{-x}$$

ha due zeri nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Per ciascuno di essi, determinare un intervallo di ampiezza $\pi/2$ che lo contiene.

2. Enunciare e dimostrare il teorema sulle proprietà della funzione logaritmo.

3. Determinare quali dei seguenti problemi di Cauchy ammette soluzione unica:

   (i) $f''(x) - f(x) = 0$, con $f(0) = 1$;

   (ii) $f''(x) - f(x) = 0$, con $f'(0) = 2$;

   (iii) $f''(x) + f(x) = 0$, con $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$;

   (iv) $f''(x) + f'(x) + f(x) = 0$, con $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$;

4. Enunciare e dimostrare il teorema sulla forma polare dei numeri complessi. Scrivere quindi i seguenti numeri complessi in forma polare:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = i, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = \frac{1+i}{1-i}, \quad z_6 = (1+2i)\,(1-i)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 19 febbraio 2011

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Esercizi.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 - 5x + 6}.$$
2. (3 punti) Calcolare la media della funzione
$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$
nell'intervallo $[2, 3]$.
3. (5 punti) Per quali valori di α il membro di destra dell'equazione differenziale
$$f''(x) - 5f'(x) + 6\, f(x) = 2\, e^{\alpha x}$$
è soluzione dell'omogenea associata? Risolvere quindi il problema di Cauchy con $\alpha = 1$ e le condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.
4. (4 punti) Calcolare e classificare gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = x^3 - a\, y^2 + 4\, x\, y$$
al variare del parametro reale a.

Domande teoriche.

1. Enunciare e dimostrare il teorema sulla formula di Taylor al prim'ordine per una funzione reale di variabile reale, scrivendo esplicitamente l'espressione dell'errore.

2. Enunciare il teorema di Fermat per una funzione reale di variabile reale. Determinare quindi massimi e minimi della funzione

$$f(x) = |\sin x|$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

3. Sia $\mathbf{f}(t) = (\cos^2 t, \sin t, a\, e^t)$, $-\infty < t < \infty$, ed $a \in \mathbb{R}$ una funzione vettoriale. Scrivere l'espressione del versore tangente alla curva in funzione del parametro t; per quali valori di a esistono punti dove il versore tangente si annulla? Quali sono questi punti?

4. Stabilire l'insieme numerico nel quale la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

è differenziabile e calcolarne la derivata direzionale nel punto $(1, 2)$ lungo la direzione del versore $(1, -1)/\sqrt{2}$.