Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 gennaio 2011

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Esercizi.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = [(x-1)\,(x-2)^2]^{1/3}.$$

2. (3 punti) Calcolare la media della funzione
$$f(x) = e^{|x|}\,\cos x$$
nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

3. (5 punti) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$f''(x) + 4\,f(x) = \sin 3x$$
e risolvere quindi il problema di Cauchy con le condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

4. (4 punti) Calcolare e classificare gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = x + a\,(x + b\,\sin y) + x^2 - 2\,x\,\sin y$$
al variare dei parametri reali a e b.

Domande teoriche.

1. Enunciare il teorema degli zeri per una funzione reale di variabile reale. Utilizzando tale teorema, dimostrare che la funzione

$$f(x) = e^x + x$$

ha almeno uno zero nell'intervallo $[-1, 0]$. Determinare quindi in quale dei sottointervalli, $[-1, -0.5]$ e $[-0.5, 0]$, è situato lo zero.

2. Enunciare il teorema del valor medio di Lagrange per una funzione reale di variabile reale. Determinare il punto interno $x = c$ dell'enunciato del teorema per la funzione

$$f(x) = -2x - x^2 + 4x^3$$

nell'intervallo $[-1, 1]$. È il punto c unico?

3. Determinare il numero di soluzioni linearmente indipendenti per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali e, nel caso *(iv)*, trovarle:

   (i) $f'''(x) - f(x) = 0$

   (ii) $f^{iv}(x) - f''(x) = 0$

   (iii) $f'''(x) + f'(x) = 0$

   (iv) $f''(x) - f'(x) = 0$

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, con $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ una funzione vettoriale e sia γ la curva da essa rappresentata.

   (i) Scrivere la rappresentazione parametrica della curva nello spazio (x, y, z);

   (ii) scrivere l'espressione della lunghezza della curva;

   (iii) scrivere l'equazione che governa l'ascissa curvilinea;

   (iv) scrivere l'espressione del versore tangente alla curva.

Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 gennaio 2011

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Esercizi.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = [(x-1)\,(x+2)^2]^{1/3}.$$
2. (3 punti) Calcolare la media della funzione
$$f(x) = e^{|x|}\,|\sin x|$$
nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
3. (5 punti) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$f''(x) + 9\,f(x) = e^{3x}$$
e risolvere quindi il problema di Cauchy con le condizioni iniziali $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$.
4. (4 punti) Calcolare e classificare gli estremi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = x + a\,(x + b\,\cos y) + x^2 - 2\,x\,\cos y$$
al variare dei parametri reali a e b.

Domande teoriche.

1. Enunciare il teorema dei valori intermedi per una funzione reale di variabile reale. Utilizzando tale teorema, dimostrare che la funzione
$$f(x) = e^{|x|} - 2$$
ha almeno uno zero nell'intervallo $[0, 1]$.

2. Enunciare il teorema della media (integrale) per una funzione reale di variabile reale. Determinare il punto interno $x = c$ dell'enunciato del teorema per la funzione
$$f(x) = x^2 + x + 2$$
nell'intervallo $[-1, 1]$. È il punto c unico?

3. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di funzioni:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \frac{(2x)^n}{n^2}$$

4. Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili, differenziabile in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.
   - *(i)* Scrivere il polinomio di Taylor al second'ordine in un intorno di un punto $(x_0, y_0) \in D$;
   - *(ii)* individuare la matrice Hessiana;
   - *(iii)* definire i punti stazionari della funzione;
   - *(iv)* definire i punti di minimo, di massimo e di sella della funzione;
   - *(v)* utilizzando il polinomio di Taylor, enunciare e giustificare le condizioni sulla matrice Hessiana affinchè un punto stazionario sia un punto di minimo, di massimo o di sella.