

Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica - Primo esame parziale

Nome

N. Matricola

Ancona, 27 novembre 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per il superamento della prova, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 18/30 e raggiungere la sufficienza in ciascun gruppo di domande.

Domande generali di comprensione.

1. Determinare (se esistono) l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme numerico $A = \{n^3, n \in \mathbb{Z}\}$. Dire inoltre se tale insieme è limitato e se ammette minimo e massimo.
2. Indicare, tra le seguenti funzioni, quali sono iniettive, quali suriettive e quali biiettive:

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= x^2 \\ f : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= x^3 \\ f : [1, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \ln x \\ f : [1, +\infty) &\rightarrow [0, +\infty), & f(x) &= \ln x \end{aligned}$$

3. Indicare, tra le seguenti curve o equazioni, quali possono essere il grafico di una funzione $y = f(x)$: (i) $x - \sin y = 0$; (ii) $y - \sin^2 x = 0$.
4. Quali tra i seguenti insiemi costituisce una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ in n sottointervalli?

$$\begin{aligned} P &= \{x_i = (i-1)/n, \quad 0 \leq i \leq n-1\} \\ P &= \{x_i = (i-1)/n, \quad 1 \leq i \leq n+1\} \\ P &= \{x_i = i/n, \quad 0 \leq i \leq n+1\} \end{aligned}$$

5. Quale delle seguenti funzioni è invertibile?

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= \cos x \\ f : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= \cos x \\ f : [\pi/2, 3\pi/2] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= \cos x \end{aligned}$$

6. Vero o falso?

- Se $f(x)$ è derivabile due volte in un punto di massimo, $x = x_0$, allora $f''(x_0) > 0$;
- se $f(x)$ è derivabile due volte in un punto di massimo, $x = x_0$, allora $f''(x_0) < 0$;
- se $f(x)$ è derivabile due volte in un punto di minimo, $x = x_0$, allora $f''(x_0) > 0$;
- se $f(x)$ è derivabile due volte in un punto di minimo, $x = x_0$, allora $f''(x_0) < 0$;

7. Nella seguente tabella, quali delle funzioni $g(x)$ nella colonna di destra sono primitive delle corrispondenti funzioni $f(x)$ nella colonna di sinistra?

$$\begin{array}{l} f(x) = 1/x^2, \quad g(x) = 1/x \\ f(x) = 1/x^2, \quad g(x) = -1/x \\ f(x) = 1/x^2, \quad g(x) = \ln x \\ f(x) = 1/x^2, \quad g(x) = 1/x^3 \end{array}$$

8. Quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere?

$$\begin{array}{l} x = o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \\ x^2 = o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \sin^2 x = o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \\ \sin^2 x \sim x^2, \quad x \rightarrow 0 \end{array}$$

Domande teoriche.

1. Enunciare i quattro teoremi sull'algebra dei limiti e dimostrarne uno a piacere.
2. Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri (Bolzano).

Esercizi.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

2. Determinare la media della funzione

$$f(x) = \sin x |\cos x|$$

nell'intervallo $[0, \pi]$.

3. Calcolare i primi due termini significativi del polinomio di Taylor della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$$

attorno al punto $x_0 = 0$.

4. Determinare le regioni di convessità e concavità della funzione:

$$f(x) = x^3 \ln x$$