

Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica - Primo esame parziale

Nome

N. Matricola

Ancona, 27 novembre 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per il superamento della prova, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 18/30 e raggiungere la sufficienza in ciascun gruppo di domande.

Domande generali di comprensione.

1. Determinare (se esistono) l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme numerico $A = \{-n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Dire inoltre se tale insieme è limitato e se ammette minimo e massimo.
2. Indicare, tra le seguenti funzioni, quali sono iniettive, quali suriettive e quali biiettive:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= e^x \\ f : \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty), & f(x) &= e^x \\ f : \mathbb{R} &\rightarrow (1, +\infty), & f(x) &= e^x + e^{-x} \\ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= e^x + e^{-x} \end{aligned}$$

3. Indicare, tra le seguenti curve o equazioni, quali possono essere il grafico di una funzione $y = f(x)$: (i) $x^2 - y^2 = 0$; (ii) $x^2 - y^3 = 0$.
4. Siano $a < b < c < d$ numeri reali e sia $f(x)$ una funzione a scala definita sul dominio $D = [a, b] \cup [c, d]$ e tale che $f(x) > 0$ su $[a, b]$ ed $f(x) < 0$ su $[c, d]$. L'integrale di $f(x)$ sul dominio D è allora dato da

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \int_c^d f(x) dx & \quad \text{oppure da} \\ \int_a^b f(x) dx + \int_c^d f(x) dx & \quad ? \end{aligned}$$

5. Quale delle seguenti funzioni si annulla in almeno un punto interno all'intervallo di definizione sulla base del teorema degli zeri (di Bolzano)?

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= x \sin x \\ f : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= (x - 4) \cos x \\ f : [\pi/2, 3\pi/2] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= x \sin x \end{aligned}$$

6. Vero o falso?

- $f(x)$ convessa e derivabile in $[a, b]$ implica $f'(x)$ negativa in $[a, b]$;
- $f(x)$ convessa e derivabile in $[a, b]$ implica $f'(x)$ positiva in $[a, b]$;
- $f(x)$ convessa e derivabile due volte in $[a, b]$ implica $f''(x)$ positiva in $[a, b]$;
- $f(x)$ convessa e derivabile due volte in $[a, b]$ implica $f''(x)$ negativa in $[a, b]$.

7. La funzione integrale di $f(x) = e^x$ nell'intervallo $x \in [0, 1]$ è:

- $F(x) = e^x$;
- $F(x) = e^x + 1$;
- $F(x) = e^x - 1$.

8. Siano $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ i polinomi di Taylor di ordine n di due una funzioni $f(x)$ e $g(x)$ attorno ad un punto $x = x_0$; allora:

- il polinomio di Taylor di $f(x) + g(x)$ è $P_n(x) + Q_n(x)$;
- il polinomio di Taylor di $f(x) - g(x)$ è $P_n(x) - Q_n(x)$;
- il polinomio di Taylor di $f(x) \cdot g(x)$ è $P_n(x) \cdot Q_n(x)$;
- il polinomio di Taylor di $f(x) + g(x)$ non è identificabile a priori.

Domande teoriche.

1. Enunciare e dimostrare il teorema della media per il calcolo integrale.
2. Enunciare e dimostrare il criterio della derivata seconda per la convessità di una funzione reale di variabile reale.

Esercizi.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x$$

2. Determinare la media della funzione

$$f(x) = |x - 1| \ln x$$

nell'intervallo $[1/2, 2]$.

3. Calcolare i primi due termini significativi del polinomio di Taylor della funzione

$$f(x) = \ln(x + 1) - x$$

attorno al punto $x_0 = 0$.

4. Determinare le regioni di convessità e concavità della funzione:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$$