Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica - Primo esame parziale

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 27 novembre 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per il superamento della prova, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 18/30 e raggiungere la sufficienza in ciascun gruppo di domande.

Domande generali di comprensione.

1. Determinare (se esistono) l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme numerico $A = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Dire inoltre se tale insieme è limitato e se ammette minimo e massimo.
2. Indicare, tra le seguenti funzioni, quali sono iniettive, quali suriettive e quali biiettive:

$$\begin{aligned} &f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{1+x^2} \\ &f : [0,1] \to [1,+\infty), \qquad f(x) = \sqrt{1+x^2} \\ &f : [-1,1] \to [1,+\infty), \qquad f(x) = \sqrt{1+x^2} \\ &f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

3. Indicare, tra le seguenti curve o equazioni, quali possono essere il grafico di una funzione $y = f(x)$: (i) un'ellisse; (ii) un ramo di iperbole equilatera.
4. Quali tra i seguenti insiemi costituisce una partizione dell'intervallo $[0,1]$ in n sottointervalli?

$$\begin{aligned} &P = \{x_i = (i-1)/(n+1), \quad 1 \leq i \leq n\} \\ &P = \{x_i = (i-1)/(n-1), \quad 1 \leq 0 \leq n+1\} \\ &P = \{x_i = i/n, \qquad 0 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

5. Vero o falso? Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e monotona. Allora f è:
   - sempre derivabile in (a,b);
   - sempre invertibile in $[a,b]$;
   - sempre strettamente crescente in $[a,b]$.

6. Vero o falso?
   - in un punto di flesso a tangente verticale una funzione è derivabile ma non continua;
   - in un punto di flesso a tangente verticale una funzione è continua ma non derivabile;
   - in un punto di flesso a tangente verticale una funzione non è ne' derivabile ne' continua;
   - in un punto angoloso una funzione è derivabile ma non continua;
   - in un punto angoloso una funzione è continua ma non derivabile;
   - in un punto angoloso una funzione non è ne' derivabile ne' continua.
7. La funzione integrale di $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $x \in [0, \pi]$ è:
   - $F(x) = \cos x$;
   - $F(x) = 1 - \cos x$;
   - $F(x) = -\cos x$.
8. Se una funzione $f(x)$ ammette polinomio di Taylor $P_n(x)$ di ordine n attorno ad un punto $x = x_0$, allora:
   - P_n è unico;
   - la funzione ammette infiniti polinomi di Taylor di ordine n;
   - la funzione ammette due polinomi di Taylor di ordine n che differiscono per una costante.

Domande teoriche.

1. Enunciare e dimostrare il criterio della derivata seconda per gli estremi locali di una funzione.
2. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Esercizi.

1. Studiare la funzione
   $$f(x) = \sin x + \cos^2 x$$
2. Determinare la media della funzione
   $$f(x) = x\,|\ln x|$$
   nell'intervallo $[1/2, 2]$.
3. Calcolare i primi due termini significativi del polinomio di Taylor della funzione
   $$f(x) = \cos -1$$
   attorno al punto $x_0 = 0$.
4. Determinare le regioni di convessità e concavità della funzione:
   $$f(x) = \sin^2 x$$