

**Corso di Laurea in Ingegneria Edile**  
**Anno Accademico 2010/2011**  
**Analisi Matematica - Primo esame parziale**

Nome .....

N. Matricola .....

Ancona, 27 novembre 2010

**Istruzioni.**

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per il superamento della prova, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 18/30 e raggiungere la sufficienza in ciascun gruppo di domande.

**Domande generali di comprensione.**

1. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme numerico  $A = \{-1/n, n \in \mathbb{N}\}$ . Dire inoltre se tale insieme è limitato e se ammette minimo e massimo.
2. Indicare, tra le seguenti funzioni, quali sono iniettive, quali suriettive e quali biettive:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= x^2 \\ f : [-1, 1] &\rightarrow [0, 1], & f(x) &= x^2 \\ f : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1], & f(x) &= x^3 \\ f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= x^2 \end{aligned}$$

3. È dato un arco di circonferenza con asse di simmetria parallelo all'asse  $y$  ed angolo al centro  $\alpha$ . Per quali valori di  $\alpha$  l'arco può essere il grafico di una funzione  $y = f(x)$ ?
4. Calcolare l'integrale della funzione a scala  $f(x) = [x]$  nell'intervallo  $x \in [-1, 1]$ .
5. Determinare la composizione  $h(x) = (g \circ f)(x)$  delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 & g(x) &= \sin x \\ f(x) &= \sin x & g(x) &= x^2 \\ f(x) &= x^2 + 1 & g(x) &= \sqrt{x} \\ f(x) &= \sqrt{x} & g(x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

6. Vero o falso?

- $f'(x)$  positiva in  $[a, b]$  implica  $f(x)$  crescente in  $[a, b]$ ;
- $f'(x)$  non negativa in  $[a, b]$  implica  $f(x)$  crescente in  $[a, b]$ .

- $f(x)$  crescente e derivabile in  $[a, b]$  implica  $f'(x)$  positiva in  $[a, b]$ ;
  - $f(x)$  non crescente e derivabile in  $[a, b]$  implica  $f'(x)$  negativa in  $[a, b]$ .
7. Nella seguente tabella, quali delle funzioni  $g(x)$  nella colonna di destra sono primitive delle corrispondenti funzioni  $f(x)$  nella colonna di sinistra?

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x, & g(x) = \cos x \\ f(x) = \cos x, & g(x) = \sin x - 1 \\ f(x) = 2 \sin x, & g(x) = \sin^2 x \\ f(x) = 2 \sin x, & g(x) = \sin^2 x - 1 \end{array}$$

8. Se una funzione  $f(x)$  ammette polinomio di Taylor di ordine  $n$  attorno ad un punto  $x = x_0$ , allora  $f$  è:
- derivabile  $n$  volte ma non  $n + 1$  volte in  $x_0$ ;
  - derivabile almeno  $n$  volte in  $x_0$ ;
  - derivabile infinite volte in  $x_0$ .

### Domande teoriche.

1. Enunciare e dimostrare il teorema sulla convessità di una funzione integrale.
2. Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange.

### Esercizi.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 (\ln x - 1)$$

2. Determinare la media della funzione

$$f(x) = (x - 1) e^{|x|}$$

nell'intervallo  $[0, 2]$ .

3. Calcolare i primi due termini significativi del polinomio di Taylor della funzione

$$f(x) = \sin x - x$$

attorno al punto  $x_0 = 0$ .

4. Determinare le regioni di convessità e concavità della funzione:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$$