Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica - Secondo esame parziale

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 gennaio 2011

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per il superamento della prova, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 18/30 e raggiungere la sufficienza in ciascun gruppo di domande.

Domande generali di comprensione.

1. Stabilire l'ordine di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali e dire quali sono lineari (e quali no) e quali sono omogenee (e quali no),
$$\begin{aligned} &y^{IV} + (x^2 - 1)\, y = 0 \\ &y'' + y = 2x \\ &y''' - 2\, y^2 = 0 \\ &y' + x\, e^y = 1, \end{aligned}$$
dove $y = y(x)$ è la funzione incognita. Dire inoltre quante soluzioni linearmente indipendenti ammette ciascuna di esse e di quante condizioni ausiliarie abbisognano per avere una soluzione unica.

2. Definire il gradiente di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, in un punto $\mathbf{x} \in D$ e stabilire la relazione con la derivata direzionale, evidenziando le condizioni sotto le quali vale tale relazione.

3. Determinare modulo ed argomento dei numeri complessi
$$z = 1 \qquad z = -1 \qquad z = i \qquad z = -i \qquad z = 1 + i \qquad z = (1 + i)^2$$

4. Dire quale delle seguenti successioni è convergente:
$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad a_n = n^2 - 1 \qquad a_n = \sin n$$

5. Stabilire le proprietà di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$
specificando il criterio adottato.

6. Determinare il versore tangente alla curva $(x(t) = \sqrt{t^2},\ y(t) = \sin t)$, $-\pi \le t \le \pi$, nei punti interni del dominio e calcolarlo nel punto $t = 0$.

7. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = x\,y^2 - x^3$ nel piunto $(1, 1)$ lungo la direzione del versore $\widehat{\mathbf{e}} = (1, 2)/\sqrt{5}$ utilizzando (a) la definizione di derivata direzionale e (b) il gradiente della funzione. Verificare che coincidono e giustificarlo.

8. Stabilire il segno della forma quadratica indotta dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2\,\lambda \end{pmatrix}$$

al variare di λ.

Domande teoriche.

1. Enunciare e dimostrare il teorema sulla convergenza delle serie telescopiche.

2. Dare la definizione di punto di sella per una funzione di due o più variabili.

Esercizi.

1. È data l'equazione differenziale del second'ordine $\boxed{y'' - 3y' - 4y = e^x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Scrivere l'equazione omogenea associata, determinarne due soluzioni linearmente indipendenti e scriverne la soluzione generale. Trovare quindi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e risolvere il problema di Cauchy aggiungendo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 0,\ y'(0) = 1}$.

2. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x\,y^2 - 3\,x\,y - x^2$$

e stabilirne la natura mediante lo studio della matrice hessiana.

3. È data la funzione vettoriale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $f(t) = (\cos t, -\sin t)$, $0 \le t \le \pi$. Tracciarne il grafico e calcolare la lunghezza della curva da essa rappresentata.

4. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor al second'ordine della funzione di due variabili:

$$f(x, y) = e^{x+y}\,\sin(xy).$$

Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2010/2011
Analisi Matematica - Secondo esame parziale

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 gennaio 2011

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- Per il superamento della prova, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 18/30 e raggiungere la sufficienza in ciascun gruppo di domande.

Domande generali di comprensione.

1. Stabilire l'ordine di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali e dire quali sono lineari (e quali no) e quali sono omogenee (e quali no),

$$\begin{aligned} &y''' + (1 - 1/x)\, y = 0 \\ &y'' + y = -2/x \\ &y''' - 2/y = 0 \\ &y' - e^y = 1, \end{aligned}$$

   dove $y = y(x)$ è la funzione incognita. Dire inoltre quante soluzioni linearmente indipendenti ammette ciascuna di esse e di quante condizioni ausiliarie abbisognano per avere una soluzione unica.

2. Definire il gradiente di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, in un punto $\mathbf{x} \in D$ e stabilire la relazione con la derivata direzionale, evidenziando le condizioni sotto le quali vale tale relazione.

3. Eseguire le seguenti operazioni fra numeri complessi, scrivendo il risultato nella forma di un numero complesso

   $i/(i-1)$, $\quad -i/(i+1)$, $\quad (1+i)\,(2-i)$, $\quad (1+i)/(1-i)$, $\quad (1+i)^3$, $\quad (1+i)^2-1/(1-i)$.

4. Dire quale delle seguenti successioni è convergente:

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad a_n = -n^2 + 1 \qquad a_n = \cos n$$

5. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R = 2$. Per $x = 3/2$ la serie

(i) converge solo puntualmente;
(ii) converge assolutamente;
(iii) non converge.

6. Determinare il versore tangente alla curva $(x(t) = \cos^2 t,\ y(t) = \sin t)$, $0 \le t \le \pi$, nei punti interni del dominio e calcolarlo nel punto $t = \pi/2$.

7. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = x^2\, y - y^3$ nel piunto $(-1, 1)$ lungo la direzione del versore $\widehat{\mathbf{e}} = (2, -1)/\sqrt{5}$ utilizzando (a) la definizione di derivata direzionale e (b) il gradiente della funzione. Verificare che coincidono e giustificarlo.

8. Stabilire il segno della forma quadratica indotta dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

al variare di λ.

Domande teoriche.

1. Enunciare e dimostrare il teorema sulla convergenza delle serie monotone.

2. Dare la definizione di massimo relativo per una funzione di due o più variabili.

Esercizi.

1. È data l'equazione differenziale del second'ordine $\boxed{y'' - 5y' + 6y = \sin x}$ per la funzione incognita $y = y(x)$. Scrivere l'equazione omogenea associata, determinarne due soluzioni linearmente indipendenti e scriverne la soluzione generale. Trovare quindi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e risolvere il problema di Cauchy aggiungendo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 1,\ y'(0) = 0}$.

2. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2\, y + 2\, x\, y - y^2$$

e stabilirne la natura mediante lo studio della matrice hessiana.

3. È data la funzione vettoriale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $f(t) = (-\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$. Tracciarne il grafico e calcolare la lunghezza della curva da essa rappresentata.

4. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor al second'ordine della funzione di due variabili:

$$f(x, y) = e^{xy}\, \sin(x + y).$$