Corso di Laurea in Ingegneria Edile
Anno Accademico 2009/2010
Analisi Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 17 aprile 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande preliminari.

1. (2 punti) Determinare le primitive delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{x}$$
$$f_2(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f_3(x) = x\, e^{x^2}$$

Domande teoriche.

1. (5 punti) Enunciare e dimostrare la regola per la derivazione di una funzione composta (regola della catena) per una funzione reale di variabile reale.

2. (4 punti) Dire sotto quali condizioni una funzione $f : I \to \mathbb{R}^n$, con $I \in \mathbb{R}$ rappresenta una curva nello spazio $\mathbb{R}^n$. Dare la definizione di curva semplice, curva piana, curva chiusa e curva regolare. Classificare quindi la curva (detta "astroide") data da

$$x = R\cos^3 t$$
$$y = R\sin^3 t$$

(dire, cioè, se è piana, semplice, chiusa e regolare).

Esercizi.

1. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{(x^2+1)/(x^2-1)}.$$

2. (4 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x\, y\, dx\, dy$$

dove D è il dominio costituito dall'unione dei due quadrati $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ e $\{(x,y) : -1 \leq x \leq 0,\ -1 \leq y \leq 0\}$ e dai due quarti di cerchio di raggio $R = 1$, centro l'origine e situati nel secondo e quarto quadrante.

3. (3 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= x^2 y - x^2 \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

4. (4 punti) Calcolare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x\, y\, e^{x-y}$$

5. (4 punti) Calcolare la lunghezza dell'arco di elica cilindrica dato dall'equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= R \sin\varphi \\ y &= R \cos\varphi \\ z &= a\, \varphi \end{aligned}$$

Domande preliminari

$\int f_1(x)dx = \ln|x| + c$; $\int f_2(x)dx = \frac{1}{x} + c$; $\int f_3(x)dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

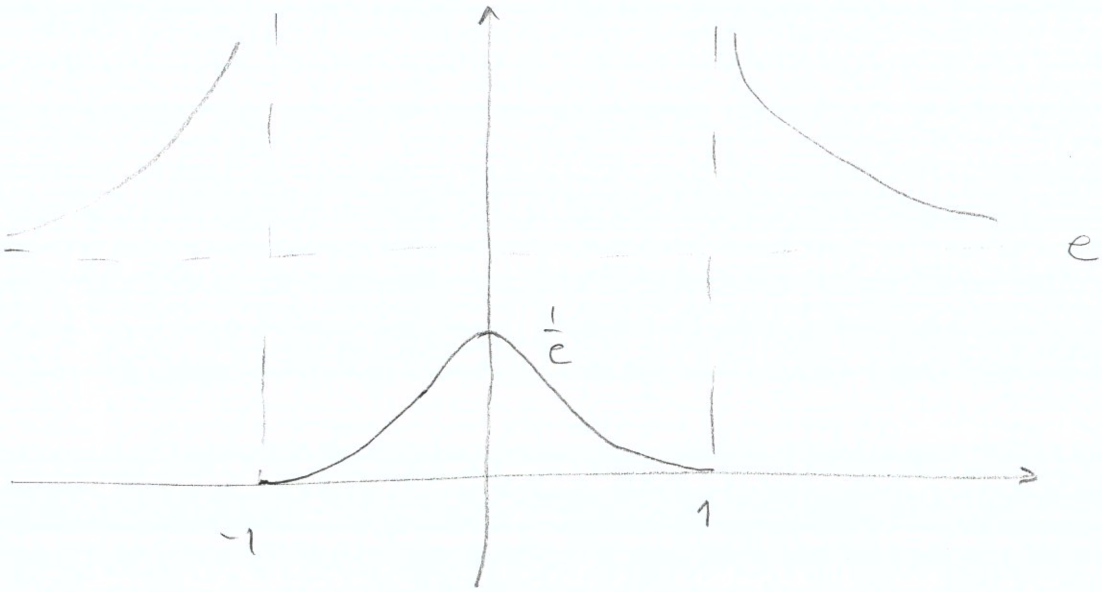
Esercizi ① $f(x) = e^{g(x)}$ $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ Dominio $x \neq \pm 1$

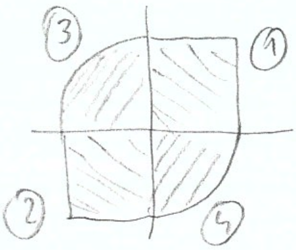
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$f(x) > 0 \ \forall x$; $f(0) = \frac{1}{e}$ $f'(x) = e^{g(x)} \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} e^{g(x)}$

$f'(x) = 0$ per $x = 0$ e $f' < 0$ per $x > 0$ $\Rightarrow$ MASSIMO



2 D: 

$$\iint_D = 2\iint_{1} + 2\iint_{3} = 2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\iint_{1} xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx\, x \int_0^1 dy\, y = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\iint_{2} xy\,dx\,dy = \iint r\,dr\,d\varphi\; r^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{1}{8}$$

Omogenea: $\frac{dy}{dx} = x^2 y \qquad \frac{dy}{y} = x^2\,dx$

3 $\begin{cases} y' = x^2 y - x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$\ln y = \frac{x^3}{3} + C \qquad y = A e^{x^3/3}$

Sol. particolare $y_p(x) = A(x) e^{x^3/3} \qquad (A' + \cancel{x^2 A}) e^{x^3/3} = \cancel{A x^2 e^{x^3/3}} - x^2$

$A' = -x^2 e^{-x^3/3} \qquad A = e^{-x^3/3} + C$

$y(x) = \left(e^{-x^3/3} + C\right) e^{x^3/3} \qquad y(0) = 1 + C = 2 \qquad \boxed{y(x) = e^{x^3/3} + 1}$

$C = 1$

---

4 $\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{-y}(e^x + x e^x) = (1+x) y e^{x-y}$

$\frac{\partial f}{\partial y} \quad x e^x (e^{-y} - y e^{-y}) = x(1-y) e^{x-y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\left\{e^{x-y} + (1+x) e^{x-y}\right\} = (2+x) y e^{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\left\{-e^{x-y} - (1-y) e^{x-y}\right\} = (y-2) x e^{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1+x)\left\{e^{x-y} - y e^{x-y}\right\} = (1+x)(1-y) e^{x-y}$$