Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 12 febbraio 2018

Prova teorica - A

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 12 febbraio 2018

1. • Fornire la definizione di

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty;$$

• utilizzando la definizione di limite, dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{n} = -\infty.$$

2. • Introdurre gli ordini di infinitesimo per $x \to x_0$ per le funzioni reali di variabile reale;

• determinare i seguenti ordini di infinitesimo:

$$\ln(1+x) + 1 - x - \cos x, \quad x \to 0$$
$$e^{2/x} - 1 - \sin\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \to \infty$$
$$\frac{x-1}{x^2-4}, \quad x \to 1$$

3. • Integrali impropri su intervalli limitati: integrabilità delle funzioni potenza.

• stabilire le proprietà di convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sin\sqrt{x-1}}, \qquad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}.$$

PROVA A

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-n^2}{n} = -\infty \iff \forall M>0 \ \exists n_0 : \frac{n-n^2}{n} < -M \ \forall n > n_0$

$\frac{n-n^2}{n} < -M \Rightarrow n-n^2 < -Mn \Rightarrow n^2-(M-1)n > 0 \quad n_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ M-1 \end{cases}$

$n^2-(M-1)n>0$ per $n<0$ e $n>M-1 \Rightarrow n_0 = [M-1]$

2) $\ln(1+x)+1-x-\cos x = \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \cancel{1} - \cancel{x} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) =$

$= \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ordine 3 perché $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$

$e^{2/x} - 1 - \sin\left(\frac{2}{x}\right) = \cancel{1} + \cancel{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cancel{1} - \left[\cancel{\frac{2}{x}} - \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$

$= \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ordine 2 perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 2$

$\frac{x-1}{x^2-4}$ ordine 1 perché $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = -\frac{1}{3}$

3) $\int_1^2 \frac{dx}{\sin\sqrt{x-1}}$ $\quad \frac{1}{\sin\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x\to 1$ converge per il criterio del confronto asintotico

$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \to 1$ $\quad$ "

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 12 febbraio 2018

Prova teorica - B

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 12 febbraio 2018

1. - Enunciare e dimostrare il teorema sull'invertibilità delle funzioni continue;
   - determinare gli intervalli di invertibilità della funzione $f(x) = x^4 - 5\,x^2 + 4$.

2. - Introdurre la classificazione delle discontinuità per le funzioni reali di variabile reale;
   - identificare i punti di non derivabilità delle funzioni

   $$f_1(x) = \frac{|x-1|}{x^2+1}, \quad f_2(x) = \frac{(x+2)^{2/3}}{x^2+1}, \quad f_3(x) = \frac{(x+2)^{1/3}}{x^2+1}$$

   e determinarne la natura.

3. - Enunciare e dimostrare il corollario sulla convergenza assoluta degli integrali impropri su domini limitati;
   - utilizzando il corollario precedente su intervalli illimitati ed eventuali altri teoremi, determinare le proprietà di convergenza dell'integrale

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

PROVA B

1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \qquad f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2-5)$

$x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$f'<0$	$f'>0$	$f'<0$	$f'>0$
	$-\sqrt{5/2}$	0	$\sqrt{5/2}$

Intervalli di invertibilità

$(-\infty, -\sqrt{5/2}]$ f strett. decrescente

$[-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0]$ " crescente

$[0, \sqrt{\frac{5}{2}}]$ f strett. decrescente

$[\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty)$ " crescente

2) $f_1 = \dfrac{|x-1|}{x^2+1}$ $x=1$ è punto angoloso

$$f_1'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1-x}{x^2+1}}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$f_1'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x^2+1}}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$f_2 = \dfrac{(x+2)^{2/3}}{x^2+1}$ $x=-2$ è una cuspide

$$f_2'(-2^-) = \lim_{x\to -2^-} \frac{\frac{(x+2)^{2/3}}{x^2+1}}{x+2} = -\infty$$

$$f_2'(-2^+) = \lim_{x\to -2^+} \frac{\frac{(x+2)^{2/3}}{x^2+1}}{x+2} = +\infty$$

$f_3 = \dfrac{(x+2)^{1/3}}{x^2+1}$ $x=-2$ è un flesso verticale

$$f_3'(-2^-) = \lim_{x\to -2^-} \frac{\frac{(x+2)^{1/3}}{x^2+1}}{x+2} = +\infty$$

$$f_3'(-2^+) = \lim_{x\to -2^+} \frac{\frac{(x+2)^{1/3}}{x^2+1}}{x+2} = +\infty$$

3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ converge assolutamente perché $0 < \dfrac{|\sin x|}{x^2} < \dfrac{1}{x^2}$

e $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Dalla convergenza assoluta segue la convergenza semplice dell'integrale dato

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 12 febbraio 2018

Prova teorica - C

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 12 febbraio 2018

1.
   - Enunciare e dimostrare il teorema del confronto fra limiti finiti per le successioni di numeri reali;
   - Dimostrare i limiti notevoli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(x_n)}{x_n^2} = \frac{1}{2}$$

   per ogni successione infinitesima x_n (con $x_n \neq 0$ per ogni n).

2.
   - Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno per una funzione reale di variabile reale;
   - dimostrare che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

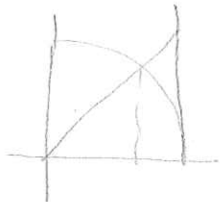
$$f(x) = 1 + e^{-x}\,\sin x$$

   è positiva per ogni $x > a$.

3.
   - Enunciare e dimostrare il teorema sul criterio del confronto integrale per le serie numeriche;
   - usando il teorema, dimostrare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

$\boxed{\text{PROVA C}}$



1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1 \quad \forall \{x_n\}$ infinitesima

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin x < x < \tan x \Rightarrow \underbrace{1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}}$

vale anche per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\{x_n\}$ infinitesima $\Rightarrow \exists\, n_0 : |x_n| < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \forall n > n_0 \quad 1 < \dfrac{x_n}{\sin x_n} < \dfrac{1}{\cos x_n} \Rightarrow \dfrac{\sin x_n}{x_n} < 1$ e $\dfrac{\sin x_n}{x_n} > \cos x_n$

$\Rightarrow \cos x_n < \dfrac{\sin x_n}{x_n} < 1$ il risultato segue dal teorema dei Carabinieri

2) $f(x) = 1 + e^{-x} \sin x$ Abbiamo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a : |f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall x > a$

così $1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon \quad \forall x > a$

Se ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2} \quad \forall x > a$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ converge $\iff \displaystyle\int_1^{\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}\,dx$ converge

Vedi prova B

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 12 febbraio 2018

Prova teorica - D

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 12 febbraio 2018

1. • Enunciare e dimostrare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone;
   • stabilire le proprietà di convergenza (dire cioè se sono convergenti, divergenti o irregolari) delle successioni

$$\left\{\frac{n^2-1}{n^2+2}\right\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \left\{\tan\left(\frac{n\pi-2}{2n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

   sulla base della loro proprietà di monotonia.

2. • Enunciare e dimostrare il teorema sul criterio di monotonia per le funzioni derivabili;
   • determinare le proprietà di continuità, derivabilità e monotonia della funzione $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=(x-[x])^2$; studiando il segno della derivata, dire se il teorema è applicabile alla funzione su tutto l'intervallo $[0,2]$.

3. • Enunciare e dimostrare il teorema del confronto asintotico per gli integrali impropri su intervalli illimitati;
   • usando il teorema del confronto asintotico determinare le proprietà di convergenza degli integrali

$$\int_1^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx \qquad \int_1^{+\infty}\left(e^{1/\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

PROVA D

1) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2+2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad a_{n+1}-a_n = \dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+2} - \dfrac{n^2-1}{n^2+2} =$

MONOTONA CRESCENTE
LIMITATA PERCHÉ
$a_n < 1 \ \forall n$

CONVERGENTE

$$= \frac{[(n+1)^2-1][n^2+2]-[n^2-1][(n+1)^2+2]}{[(n+1)^2+2][n^2+2]} =$$

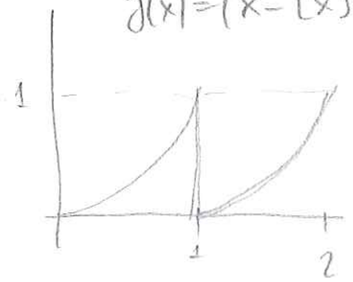
$$= \frac{[(n+1)^2-1][\cancel{n^2}+2-(\cancel{n^2}-1)]-(n^2-1)}{[\ \ ][\ \ ]} = \frac{3[(n+1)^2-1]+n^2-1}{[\ \ ][\ \ ]} =$$

$$= \frac{3(n^2+1)+(n^2-1)-4}{[\ \ ][\ \ ]} > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$\left\{\tan\left(\dfrac{n\pi-2}{2n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \tan\left(\dfrac{n\pi-2}{2n}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)$

$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n} \to \dfrac{\pi}{2}$ MONOTONA CRESCENTE $\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)$ MONOTONA CRESC. ILLIMITATA

2) $f(x) = (x-[x])^2$



NON CONTINUA NON MONOTONA
$f' > 0$ in $(0,1)$ e $(1,2)$ ma non deriv. in 1
quindi il teorema non si applica

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$ $\quad \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x} = \cancel{\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)-\cancel{\dfrac{1}{x}} = -\dfrac{1}{2x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x} \sim -\dfrac{1}{2x^3}$ $\quad$ l'$\int$ CONVERGE

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(e^{1/\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ $\quad e^{1/\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow e^{1/\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{2x}$ $\quad$ l'$\int$ DIVERGE

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 23 febbraio 2018

Prova pratica - A

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 23 febbraio 2018

1. Studiare la funzione

$$\begin{aligned} f(x) &= -[(x-1)\,(x-2)^2]^{1/3}, & x < 1 \\ &= [(x-2)^2\,(x-1)]^{1/3}, & x \geq 1. \end{aligned}$$

   Nel tracciarne il grafico, evidenziare gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità, tutti gli asintoti oltre ai punti critici e punti stazionari. Non occorre il calcolo della derivata seconda.

2. Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{2n}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

3. Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}, & 0 < x \leq \pi/2 \\ &= \frac{2\,x - \pi}{2\,x^3 - \pi\,x^2}, & x > \pi/2 \end{aligned}$$

   e si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

   Dimostrare che l'integrale converge usando il criterio del confronto asintotico e calcolarne il valore.

4. Determinare la serie di MacLaurin delle funzioni

$$(i)\ f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}, \qquad (ii)\ \ln(1 - x^2) - \cos x$$

   scrivendo in modo esplicito i termini fino alla *(i)* settima e *(ii)* sesta potenza.

PROVA PRATICA A

1) $f(x) = \begin{cases} -[(x-1)(x-2)^2]^{1/3} & x<1 \\ [(x-2)^2(x-1)]^{1/3} & x \geq 1 \end{cases}$ $\quad D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$f(0) = -[-4]^{1/3} = \sqrt[3]{4}$ $\quad f(x)=0 \quad x=1$ e $x=2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}[(x-1)(x-2)^2]^{-2/3}(-3x^2+10x-8) \\ \frac{1}{3}[(x-1)(x-2)^2]^{-2/3}(3x^2-10x+8) \end{cases}$

$f'=0 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{3} = \begin{cases} 4/3 \\ \cancel{2} \end{cases}$

In $x=1$ e $x=2$
$f(x)$ NON DERIVABILE

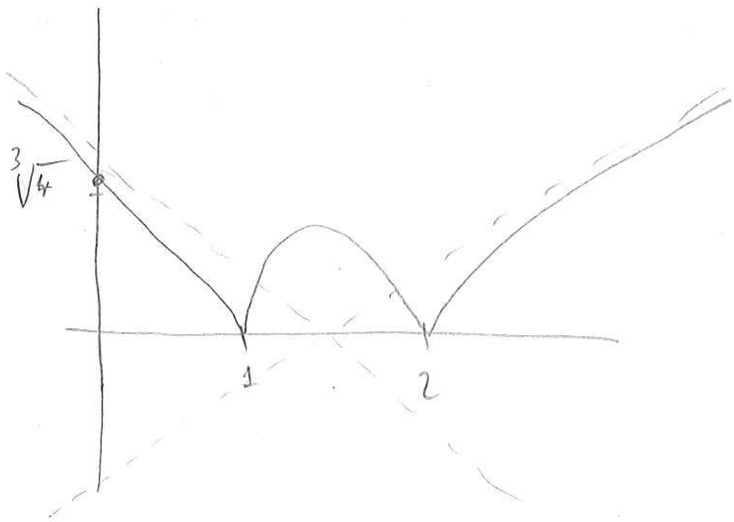
$\lim_{x\to1^-} f'(x) = -\infty \quad \lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$ CUSPIDE

$\lim_{x\to2^-} f'(x) = -\infty \quad \lim_{x\to2^+} f'(x) = +\infty$ "

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = -\frac{5}{3} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x)+x] = \frac{5}{3}$

$y = x - \frac{5}{3}$
$y = -x + \frac{5}{3}$ ASINTOTI OBLIQUI



2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{2n}} = S$; Consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad |x|<1$

Derivando $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ per $x = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3^2}\right)^n = \frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{8}{9}\right)^2}$

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{2n}} = \frac{9}{64}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = S$; consideriamo nuovamente $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ per $x = \frac{1}{2}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$

3) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$ converge perché $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \to 0$

$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{2x-\pi}{2x^3-\pi x^2}\,dx$ $\quad$ " $\quad f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, $x \to +\infty$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx = \left[2\sqrt{\operatorname{sen} x}\right]_0^{\pi/2} = 2$

$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{2x-\pi}{2x^3-\pi x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{2x-\pi}{x^2(2x-\pi)}\,dx = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\pi/2}^{+\infty} = \frac{2}{\pi}$

$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = 2 + \frac{2}{\pi}$

4) (i) $f(x) = x\left(1 - x^3 + x^6 - x^9 \dots\right) = x - x^4 + x^7 + \dots$

anche $f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+1}$

(ii) $\ln(1-x^2) - \cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - \sum_{n \text{ pari}} (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!}$

$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{(2n)!}\right) x^{2n}$

$= -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \dots - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots\right) =$

$= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{11}{24} x^4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6!}\right) x^6 + \dots$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 23 febbraio 2018

Prova pratica - B

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 23 febbraio 2018

1. Studiare la funzione

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\left[\frac{(x-1)^2}{2-x}\right]^{1/3}, \qquad x < 2 \\
&= \left[\frac{(x-1)^2}{x-2}\right]^{1/3}, \qquad x \geq 2.
\end{aligned}
$$

   Nel tracciarne il grafico, evidenziare gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità, tutti gli asintoti oltre ai punti critici e punti stazionari. Non occorre il calcolo della derivata seconda.

2. Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}$$

3. Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x}+x}, \qquad 0 < x \leq 4 \\
&= \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \qquad x \geq 4
\end{aligned}
$$

   e si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

   Dimostrare che l'integrale converge usando il criterio del confronto asintotico e calcolarne il valore.

4. Determinare la serie di MacLaurin delle funzioni

$$(i)\ f(x) = \frac{x}{1-x^3} - \sin x, \qquad (ii)\ \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2} + \cos x$$

   scrivendo in modo esplicito i termini fino alla *(i)* quinta e *(ii)* sesta potenza.

PROVA PRATICA B

1) $f(x) = \begin{cases} -\left[\dfrac{(x-1)^2}{2-x}\right]^{1/3} & x<2 \\ \left[\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right]^{1/3} & x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

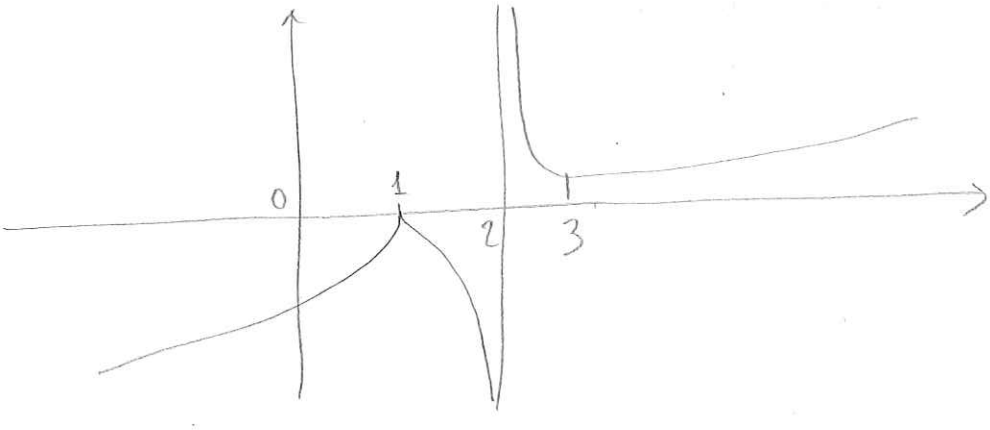
$f(0) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad f(x) = 0 \quad x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x-3)}{3(x-2)^2\left[\frac{(x-1)^2}{x-2}\right]^{2/3}} & x>2 \\ \dfrac{(x-1)(x-3)}{3(x-2)^2\left[-\frac{(x-1)^2}{x-2}\right]^{2/3}} & x<2 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \quad \cancel{x=1}$ e $x = 3$

f NON DERIVABILE IN $x=1$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty$ CUSPIDE



2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{3}{2}$ (vedi prove A) $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}} = \frac{4}{9}$ (vedi A)

3) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+x}\,dx$ converge perché $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x\to 0$

$\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ converge perché $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$, $x \to +\infty$

$\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 0 \qquad \int_4^{+\infty} f(x)\,dx = \ln 2$

4) (i) $f(x) = \frac{x}{1-x^3} - \sin x = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[x^{3n+1} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right] =$$

$$= x\left(\cancel{1} + x^3 + x^6 + \dots\right) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= + \frac{x^3}{3!} + x^4 - \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(ii) $f(x) = \ln(1-x^2) - \cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$

$$= -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) x^{2n} =$$

$$= -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \dots - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots =$$

$$= -1 - \frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\right) x^4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6!}\right) x^6 - \dots$$