Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 10 gennaio 2018

Prova teorica - A

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 gennaio 2018

1. • Fornire le definizioni di

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$

   • utilizzando la definizione di limite, dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x+1}{x-1} = 2.$$

2. • Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione reale di variabile reale;

   • data la funzione $f : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{R},\ f(x) = |\sin x|$, determinarne massimi e minimi relativi ed assoluti e discutere l'applicazione del teorema di Fermat a tale funzione.

3. • Introdurre la definizione di media di una funzione reale di variabile reale su un intervallo $[a, b]$, specificando per quale classe di funzioni la definizione ha senso; quindi, enunciare e dimostrare il teorema della media del calcolo integrale;

   • calcolare la media e discutere l'applicazione del teorema della media alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 + 2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

4. • Enunciare e dimostrare il teorema di Abel di convergenza su intervalli per le serie di potenze;

   • se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$, si può dedurre che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-1)^n$ converge in $x = 1/2$? e in $x = 0$?

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 10 gennaio 2018

Prova teorica - B

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 gennaio 2018

1. • Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per una funzione reale di variabile reale;
   • si consideri la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da
   $$f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 + 2, & 1 < x \le 2; \end{cases}$$
   stabilirne l'immagine, il massimo ed il minimo, e verificare l'applicabilità del teorema degli zeri.

2. • Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle per una funzione reale di variabile reale;
   • si consideri la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da
   $$f(x) = 1 - |x|;$$
   stabilirne l'immagine, il massimo ed il minimo, e verificare le condizioni per l'applicabilità del teorema di Rolle.

3. • Enunciare e dimostrare il teorema sul criterio di integrabilità delle funzioni reali di variabile reale;
   • usando il criterio di integrabilità ed eventuali altri teoremi, discutere l'integrabilità semplice ed assoluta, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, della funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da
   $$f(x) = \begin{cases} -\alpha, & x \text{ razionale} \\ \alpha, & x \text{ irrazionale} \end{cases}$$

4. • Enunciare e dimostrare il teorema sul criterio del rapporto per le serie numeriche;
   • è data la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\,\pi/10)}{n};$$
   si può stabilire il suo carattere sulla base del criterio del rapporto? Giustificare la risposta.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 10 gennaio 2018

Prova teorica - C

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 gennaio 2018

1.
- Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione sequenziale del limite ("teorema ponte");
- usando il teorema ponte, dimostrare che $\lim_{x\to+\infty}\sin(x^2)$ non esiste.

2.
- Fornire la definizione di funzione derivabile in un punto, di derivata, derivata destra e derivata sinistra; quindi, enunciare e dimostrare il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili;
- caratterizzare i punti di non derivabilità delle funzioni

$$f_1(x) = |x^2 - 5\,x + 6| \qquad f_2(x) = \sqrt{|x^2 - 5\,x + 6|} \qquad f_3(x) = (x^2 - 5\,x + 6)^{1/3}.$$

3.
- Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale;
- sia $f(x)$ una funzione integrabile a media nulla su un intervallo $[a,b]$ e sia $F(x)$ la sua funzione integrale; scegliere l'alternativa corretta, giustificando la risposta: $F(b) = 1$ ☐ ; $F(b) = 0$ ☐ ; $F(b) = a$ ☐ ; $F(b) = b$ ☐ .

4.
- Enunciare e dimostrare il teorema sul criterio della radice per le serie numeriche;
- è data la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/6)^n}{n};$$
si può stabilire il suo carattere sulla base del criterio della radice? Giustificare la risposta.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 10 gennaio 2018

Prova teorica - D

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 gennaio 2018

1.
   - Introdurre i simboli di relazione asintotica di “o piccolo”, di “O grande” e di equivalenza asintotica;
   - determinare i seguenti ordini di infinitesimo per $x \to 0$:
$$\frac{\sin(x^2)}{x} - x; \;\; \ln(1-\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x})$$

2.
   - Enunciare e dimostrare il Teorema di de l’Hopital;
   - calcolare i seguenti limiti usando, dove possibile, il teorema di de l’Hopital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-x\,e^x}{x}.$$

3.
   - Enunciare e dimostrare il teorema sull’integrabilità delle funzioni monotone;
   - dimostrare l’integrabilità della funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ usando il teorema succitato, in combinazione con eventuali altri risultati.

4.
   - Introdurre la nozione di serie di potenze e definire il raggio di convergenza; quindi, enunciare e dimostrare il teorema sul criterio del rapporto per le serie di potenze;
   - utilizzando il criterio del rapporto **PER LE SERIE DI POTENZE** stabilire se la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(e^{-n})}{n}\, 2^n;$$
converge.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Analisi Matematica 1 - Studenti A/L
Appello del 10 gennaio 2018

Prova teorica - E

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 gennaio 2018

1.
   - Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per una funzione reale di variabile reale;
   - si consideri la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da

   $$f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 - 2, & 1 < x \le 2; \end{cases}$$

   stabilirne l'immagine, il massimo ed il minimo, e verificare l'applicabilità del teorema dei valori intermedi.

2.
   - Enunciare e dimostrare il teorema sul criterio di convessità per una funzione reale di variabile reale;
   - cosa si può dire, usando il criterio succitato, sulla convessità della funzione

   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \le x \le 0 \\ 1 - x, & 0 < x \le 1 \ ? \end{cases}$$

3.
   - Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per gli integrali impropri su intervalli limitati;
   - usando il criterio del confronto su intervalli illimitati ed eventuali altri teoremi, discutere l'integrabilità della funzione $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = e^{-x} \sin x$.

4.
   - Enunciare e dimostrare il teorema sulla sviluppabilità in serie di Taylor per una funzione reale di variabile reale;
   - discutere la sviluppabilità in serie di Taylor della funzione

   $$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ 2\,x^3, & x > 0; \end{cases}$$

   attorno al punto $x_0 = 0$.