# Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
# Anno Accademico 2012/2013
# Analisi Matematica 1

Nome ..................................................

N. Matricola .................................................. Ancona, 20 aprile 2013

1. Dati gli insiemi numerici

$$E_1 = \overset{[-1,1)}{\cancel{[1,1)}} \cup \{3\}; \qquad E_2 = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad E_3 = \left\{ \frac{n^4 - 2}{n^4 + 2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

determinarne estremo superiore ed estremo inferiore e punti di accumulazione; dire se ammettono massimo e minimo e, in caso affermativo, determinarli.

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\,2^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2(\frac{1}{n} + \sqrt{3})}$$

3. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x \sin(\frac{1}{x^2})}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln\left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

aiutandosi con il teorema di de l'Hopital.

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 5\,e^x + 6}{e^{2x} + 3\,e^x - 4}$$

5. Identificare e classificare i punti di discontinuità delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{27 - x^3}{x - 3}; \qquad f_2(x) = [\cos^2 x],$$

dove $[x]$ indica la parte intera di $x$, ed i punti di non derivabilità della funzione

$$f_3(x) = e^{-|x|^{1/4}}$$

(1) $E_1 = [-1,1) \cup \{3\}$ $\quad \sup E_1 = \max E_1 = 3 \quad$ Acc. $= [-1,1]$

$\inf E_1 = \min E_1 = -1$

$E_2 = \left\{ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \inf E_2 = \min E_2 = 0 \quad \max E_2$ non esiste

$\sup E_2 = \frac{1}{e} \quad$ Acc. $= \left\{ \frac{1}{e} \right\}$

$E_3 = \left\{ \frac{n^4-2}{n^4+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \inf E_3 = \min E_3 = -\frac{1}{3} \quad \max E_3$ non esiste

$\sup E_3 = 1 \quad$ Acc. $= \{1\}$

---

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)2^n}$ ; $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+2)2^n} = 2 \quad R = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2\left(\frac{1}{n}+\sqrt{3}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+n^2\sqrt{3}}$ ; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n+n^2\sqrt{3}}} = 3 \quad R = \frac{1}{3}$

---

(3) $\lim_{x\to+\infty} e^{x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1/x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \ln\left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{2}{x^3}}\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\frac{x}{2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$

4) $f(x) = \dfrac{g(y)}{h(y)}$ $\quad y = e^x > 0$ $\quad g(y) = y^2 + 5y + 6$

$h(y) = y^2 + 3y - 4$

D: $h(y) \neq 0$ $\quad y_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -4 & \text{NON ACCETT.} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

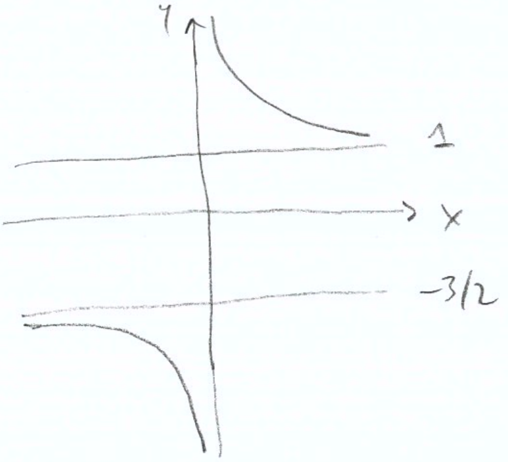
D: $x \neq 0$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{3}{2}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \mp \infty$ $\quad f(x) = 0$ $\quad y_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$ NON ACCETT.

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$

$$f'(x) = e^x \frac{(2y+5)(y^2+3y-4) - (2y+3)(y^2+5y+6)}{(y^2+3y-4)^2} = -2e^x \frac{e^{2x} + 10e^x + 19}{(e^{2x} + 3e^x - 4)}$$

$f'(x) \neq 0$ sempre

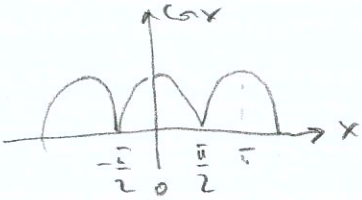


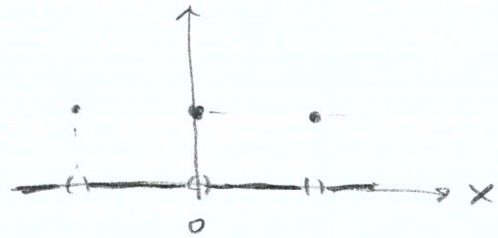

5) $f_1(x) = \dfrac{27 - x^3}{x-3} = \dfrac{(3-x)(9+3x+x^2)}{x-3} =$

$= -(x^2+3x+9)$ per $x \neq 3$

DISCONT. ELIMIN. IN $x = 3$

$f_2(x) = [\cos^2 x]$




DISCONT. ELIMINABILI IN $x = k\pi$

$$f_3(x) = e^{-|x|^{1/4}} = \begin{cases} e^{-\sqrt[4]{x}} & , x \geq 0 \\ e^{-\sqrt[4]{-x}} & , x < 0 \end{cases}$$

$$f_3'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} x^{-3/4} e^{-\sqrt[4]{x}} & x > 0 \\ \frac{1}{4} (-x)^{-3/4} e^{-\sqrt[4]{-x}} & x < 0 \end{cases}$$

CUSPIDE

6. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$
usando gli andamenti asintotici ed i polinomi di Taylor.

7. Calcolare l'integrale
$$\int_{-1}^{2} e^{-|x|}\sqrt{1-e^{-|x|}}\,dx.$$

8. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da
$$f(x,y)=e^{xy}+y\,e^{x}.$$
Calcolarne la derivata direzionale nel punto $(2,1)$, lungo la direzione del vettore $\mathbf{v}=(1/2,\sqrt{3}/2)$.

9. Calcolare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y)=e^{x^3+y^2-y}$$

---

(6)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4!\,x^4}\dots\right]}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3!\,x^3}\dots} =$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

---

(7)
$$\int_{-1}^{2} e^{-|x|}\sqrt{1-e^{-|x|}}\,dx = \int_{-1}^{0} e^{x}\sqrt{1-e^{x}}\,dx + \int_{0}^{2} e^{-x}\sqrt{1-e^{-x}}\,dx =$$
$$=\left[-\frac{2}{3}\left(1-e^{x}\right)^{3/2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}\left(1-e^{-x}\right)^{3/2}\right]_{0}^{2} = \frac{2}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{e}\right)^{3/2}+\left(1-\frac{1}{e^2}\right)^{3/2}\right\}$$

---

(8) $f$ differenziabile in $(2,1)$ $\Rightarrow$ $D_{\hat v} f(2,1) = \langle \hat v, \nabla f(2,1)\rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,e^{xy} + y\,e^{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\,e^{xy} + e^{x}$$

$$D_{\hat v} f(2,1) = \frac{1}{2}\left[e^2+e^2\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^2+e^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2e^2\left(1+\sqrt{3}\right) = e^2\left(1+\sqrt{3}\right)$$

(9) $f(x,y) = e^{x^3+y^2-y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 e^{x^3+y^2-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (2y-1)\, e^{x^3+y^2-y}$$

$$\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 2y-1 = 0 \end{cases} \qquad P \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (6x + 9x^4)\, e^{x^3+y^2-y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2(2y-1)\, e^{x^3+y^2-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[2 + (2y-1)^2\right] e^{x^3+y^2-y}$$

In $P \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$ abbiamo

$$H_{11} = H_{12} = 0 \qquad H_{22} = 2e^{-1/4}$$

NON DECIDIBILE