Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Analisi Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 20 aprile 2013

1. Dati gli insiemi numerici

$$E_1 = \{0\} \cup (1, 2]; \qquad E_2 = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad E_3 = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

   determinarne estremo superiore ed estremo inferiore e punti di accumulazione; dire se ammettono massimo e minimo e, in caso affermativo, determinarli.

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\, 2^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2(\frac{1}{n} + \sqrt{3})}$$

3. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2 \sin(\frac{1}{x})}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln \left[x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right].$$

   aiutandosi con il teorema di de l'Hopital.

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 5\, e^x + 6}{e^{2x} - 3\, e^x - 4}$$

5. Identificare e classificare i punti di discontinuità delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}; \qquad f_2(x) = [\cos x],$$

   dove $[x]$ indica la parte intera di x, ed i punti di non derivabilità della funzione

$$f_3(x) = e^{\sqrt{|x|}}$$

(1) $E_1 = \{0\} \cup (1,2]$ $\quad \sup E_1 = \max E_1 = 2$ $\quad$ Acc. $= [1,2]$

$\inf E_1 = \min E_1 = 0$

$E_2 = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \inf E_2 = \min E_2$ $\quad E_2$ non ha massimo

$\sup E_2 = e$ $\quad$ Acc. $= \{e\}$

$E_3 = \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \inf E_3 = \min E_3 = 0$ $\quad E_3$ non ha massimo

$\sup E_3 = 1$ $\quad$ Acc. $= \{1\}$

---

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)2^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+2)2^n} = 2 \qquad R = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2\left(\frac{1}{n}+\sqrt{3}\right)} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{n+n^2\sqrt{3}} = 3 \qquad R = \frac{1}{3}$$

---

(3) $$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\sin(1/x)}{1/x^2}} \; ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x^2} \overset{(H)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-2\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} x \cos\frac{1}{x} = +\infty$$

Quindi anche

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left[x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \left[x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = -\infty$

(4) $f(x) = \dfrac{g(y)}{h(y)}$ $\quad y = e^x > 0 \quad g(y) = y^2 - 5y + 6 \;;\; h(y) = y^2 - 3y - 4$

$D:\ h(y) \neq 0 \qquad y_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 & x \neq \ln 4 \\ -1 & \text{NON ACC.} \end{cases}$

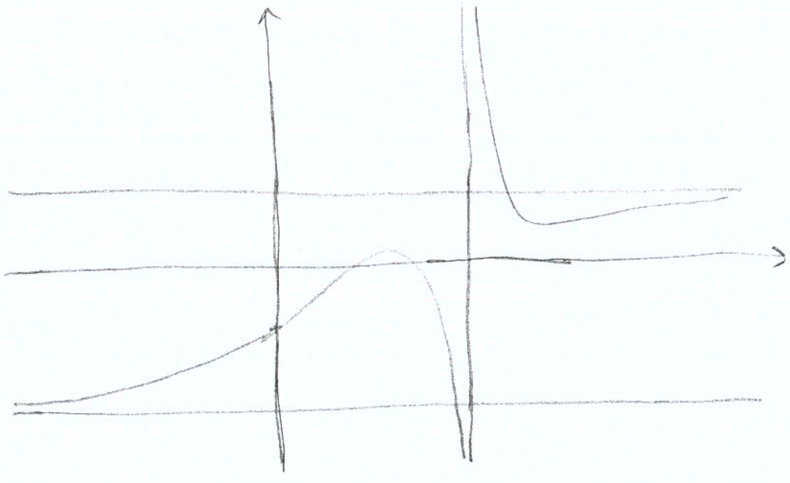
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{3}{2} \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad f(0) = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to (\ln 4)^{\mp}} f(x) = \mp\infty \qquad f(x) = 0 \quad y_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \quad x = \ln 2, \ln 3$

$f'(x) = e^x \dfrac{(2y-5)(y^2-3y-4) - (2y-3)(y^2-5y+6)}{(y^2-3y-4)^2} = e^x \dfrac{2y^2 - 20y + 38}{(\quad)^2} =$

$= 2e^x \dfrac{e^{2x} - 10e^x + 19}{(\quad)^2} \qquad f' = 0 \quad y_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-19}}{2} = \begin{cases} \dfrac{5-\sqrt{6}}{2} \\ \dfrac{5+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

$x \simeq \begin{cases} 0.94 \\ 2.01 \end{cases}$



$\ln 4$

---

(5) $f_1(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)} = x^2 + 2x + 4 \qquad x \neq 2$ DISCONT. ELIMINABILE

$f_2(x) = [\cos x]$

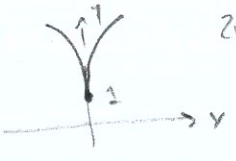
DISC. ELIMIN. IN $x = 2k\pi$

DISC. A SALTO IN $\frac{\pi}{2} + k\pi$

$f_3(x) = e^{\sqrt{|x|}} = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ e^{\sqrt{-x}} & x \leq 0 \end{cases} \qquad f_3'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\, e^{\sqrt{-x}} & x < 0 \end{cases}$

$f'_-(0) = -\infty$

$f'_+(0) = +\infty$ CUSPIDE



6. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}$$
usando gli andamenti asintotici ed i polinomi di Taylor.

7. Calcolare l'integrale
$$\int_{-1}^{2} e^{|x|}\sqrt{1-e^{|x|}}\,dx.$$

8. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da
$$f(x,y)=\ln(xy)+y\ln x.$$
Calcolarne la derivata direzionale nel punto $(2,1)$, lungo la direzione del vettore $\mathbf{v}=(1/2,\sqrt{3}/2)$.

9. Calcolare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y)=\ln\left(x^3+y^2-y\right)$$

---

6) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3!\,x^3}\cdots}{x\left[\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4!\,x^4}\cdots\right]}\sim\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}}=2$$

7) L'integrale non esiste perchè $1-e^{|x|}<0$ $\forall x$.

8) $f(x,y)$ è differenziabile in $(2,1)$ e pertanto

$$D_{\hat{v}}f(2,1)=\langle \hat{v},\nabla f(2,1)\rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{y}{x}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y}+\ln x$$

$$D_{\hat{v}}f(2,1)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1+\ln 2\right]=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+\ln 2}{2}$$

⑨ $f(x,y) = \ln(x^3+y^2-y)$ $\qquad\qquad$ $\underline{x^3+y^2-y > 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3+y^2-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y-1}{x^3+y^2-y}$$

$\underline{\nabla} f = 0$ in $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Ma $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{4}\right)$ NON ESISTE